附 錄 1

指數及對數函數

在數學及電腦科學的學習研究中，學習者會面對指數函數與對數函數之學習。函數的概念在 5.2 節被介紹到，且在該章節中之習題 15 的 (d) 部份，我們遇到了函數 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(x)=e^x$，對 $x\in\mathbf{R}$。這是一個指數函數的例子。接著，在例題 5.61，我們偶然遇見了函數 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$，$f(x)=e^x$——此時結合一個對數函數，定義為 $\ln x$，$x\in\mathbf{R}^+$。最後，在同一章中的例題 5.7.3，另一個對數函數——名為 $\log_2 n$，$n\in\mathbf{Z}^+$——出現在算法的解析中。且因為這些類型的函數也出現於後面的章節中，所以我們現在在這一附錄中，再對這兩類函數的一些基本的特性，再提出評論。

讓我們從指數為正整數的概念開始。例如，我們知道 3^7 表示為 7 個 3 的乘積——即

$$3^7=3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3=2187.$$

在這例子中，那數字 3 稱為 3^7 的**底數** (base)，數字 7 稱為**指數** (exponent)，或**次方** (power)。通常，當指數為一正整數，底數——稱它為 b——可為任意的實數 (包括 0)。關於，指數為負整數時，我們使用下列的定義：

定義 A1.1

對每一個非零實數 b 且每一個 $n\in\mathbf{Z}^+$，我們有 $b^{-n}=1/b^n$。

例題 A1.1

由定義 A1.1，我們瞭解到

a) $3^{-7}=1/3^7=1/2187$　　b) $(1/2)^{-6}=1/(1/2)^6=1/(1/64)=64$

c) $(-3/5)^{-5}=1/(-3/5)^5=1/(-243/3125)=-3125/243$

最後，當我們的指數是整數 0，則我們定義 $b^0=1$，b 為任意**非零** (nonzero) 實數 †。

前面的概念可被整理於下，其中在第一部份我們使用一個遞迴定義的概念 (介紹於第 4 章的第 2 節中)。

對所有的 $b \in \mathbf{R}$，

a) $b^1=b$，且 $b^n=b\cdot b^{n-1}$，對 $n\in\mathbf{Z}^+$ 其中 $n>1$;
b) 若 $b\neq 0$ 且 $n\in\mathbf{Z}^+$，則 $b^{-n}=1/b^n$；且
c) 若 $b\neq 0$，則 $b^0=1$。

為了從指數為整數延伸到那些指數為有理數，我們再回想到代數學上已知的結論，若 $q\in\mathbf{Z}^+$，$q>1$，且 b 為任一非負實數，則表示式 $b^{1/q}$ 表 b 的 q 次方根。因此 $b^{1/q}$ 是實數 a，其中 $a^q=b$。例如，

$$32^{1/5}=2 \text{ 因為 } 2^5=32\text{，且 } (1/8)^{1/3}=1/2 \text{ 因為 } (1/2)^3=1/8.$$

但是當我們面對到方程式 $2^2=4$ 與 $(-2)^2=4$，我們必須自問這裡的 $4^{1/2}$ 是表示什麼意義？最後的協定認為 $4^{1/2}$ 只能表示為其中的正根，所以 $4^{1/2}=2$，而不是 -2 或 ± 2。例如，$9^{1/2}=3$，$16^{1/2}=4$，且對所有 $r\in\mathbf{R}$，$(r^2)^{1/2}=|r|$，其值為 r 的絕對值不為 r。同樣地，雖然 $2^4=(-2)^4=(2i)^4=(-2i)^4=16$，但 $16^{1/4}$ 表示為 16 的正開 4 次方根，即為，2。

當 b 為一個負實數且 q 是一個正奇數，我們由較早的 $b^{1/q}$ 之定義去理解。我們發現，舉例來說，$(-8)^{1/3}=-2$，因為 $(-2)^3=-8$ 且沒有其它實數的開三次方根為 -8。然而，在 $q=2$ 的例子中，$(-4)^{1/2}$ 表示為一個複數，即不為實數——且我們在這裡將避免如此的狀況。

最後，在未對無理數的發展做完整討論前，我們應該同意實數，而非無理數。例如 $2^{1/2}=\sqrt{2}$ 且 $(-5)^{1/3}=\sqrt[3]{-5}$ 是存在的，且通常，對 $q\in\mathbf{Z}^+$ 和 $r\in\mathbf{R}$，下列實數亦是存在的：

$$r^{1/q}=\sqrt[q]{r},\ \text{對 } r\geq 0 \qquad r^{1/q}=\sqrt[q]{r},\ \text{對 } r<0 \text{ 且 } q \text{ 為奇數}$$

且現在我們已經解決了指數 (或次方) 為 $1/q$ 形式之問題，此時的 q 為一個大於 1 的正整數，所以我們提出下面的定義。

定義 A1.2　　令 $b\in\mathbf{R}$ 且令 p，$q\in\mathbf{Z}^+$。則

† 指數 0^0 稱為一個不確定的形式，因為它的值會因不同的情況而不同。這一概念在微積分上被學習且完全應用於羅必達法則。

1) $b^{p/q} = (b^{1/q})^p$ ，對 $b \geq 0$;
2) $b^{-p/q} = (b^{1/q})^{-p} = 1/[(b^{1/q})^p]$ ，對 $b > 0$;
3) $b^{p/q} = (b^{1/q})^p$ ，對 $b < 0$ 且 q 為奇數，且
4) $b^{-p/q} = (b^{1/q})^{-p} = 1/[(b^{1/q})^p]$ ，對 $b < 0$ 且 q 為奇數

這個定義可由下列的例題來說明。

例題 A1.2

a) $(8)^{2/3} = 8^{2/3} = (8^{1/3})^2 = 2^2 = 4\ (= 64^{1/3} = (8^2)^{1/3})$
b) $(81)^{-3/4} = (81^{1/4})^{-3} = 3^{-3} = 1/3^3 = 1/27\ (= (3^{-1})^3 = [(81^{1/4})^{-1}]^3 = [(81)^{-1/4}]^3)$
c) $(-1/32)^{3/5} = [(-1/32)^{1/5}]^3 = (-1/2)^3 = -1/8$
d) $(-1024)^{-2/5} = [(-1024)^{1/5}]^{-2} = (-4)^{-2} = 1/(-4)^2 = 1/16\ (= 1/(-1024)^{2/5})$.

前面例題的 (a) 部份中也評論到，下列的答案是正確的。

$$b^{p/q} = (b^p)^{1/q}, \qquad b \geq 0, \qquad p, q \in \mathbf{Z}^+.$$

定義 A1.2 的另部份亦能被延伸出如下：

$$b^{-p/q} = (b^{-p})^{1/q} = (1/b^p)^{1/q} = (1/b^{p/q}),\ b > 0,\ p, q \in \mathbf{Z}^+.$$
$$b^{p/q} = (b^p)^{1/q},\ b < 0,\ p, q \in \mathbf{Z}^+,\ q \text{ 為奇數}$$
$$b^{-p/q} = (b^{-p})^{1/q} = (1/b^p)^{1/q} = (1/b^{p/q}),\ b < 0,\ p, q \in \mathbf{Z}^+,\ q \text{ 為奇數}$$

例題 A1.3

使用 2 作為我們的底數，從定義 A1.1 且 A1.2，我們知道

$$2^{-3} = 1/8, \quad 2^{-2} = 1/4, \quad 2^{-1} = 1/2, \quad 2^0 = 1, \quad 2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8$$

且

$$2^{-3/2} = (2^{1/2})^{-3} = (\sqrt{2})^{-3} = (1/\sqrt{2})^3 = 1/(2\sqrt{2}) \doteq 0.3535534$$
$$2^{3/2} = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2} \doteq 2.8284271 (\doteq (2^3)^{1/2} = \sqrt{8}).$$

然而，我們該如何討論這些，像是 $2^{\sqrt{3}}$ ，此時，我們面臨到了一個無理數的次方？利用其精確值，$\sqrt{3} = 1.7320508 \cdots$，我們能計算出逐步的有理數之次方：

$$2^1 = 2$$
$$2^{1.7} (= 2^{17/10} = (2^{17})^{1/10} = 131072^{1/10}) \doteq 3.2490096$$
$$2^{1.73} \doteq 3.3172782$$
$$2^{1.732} \doteq 3.3218801$$
$$2^{1.7320} \doteq 3.3218801$$

$$2^{1.73205} \doteq 3.3219952$$
$$\vdots$$

利用計算機或電腦的輔助，我們能計算到小數第七位的地方，$2^{\sqrt{3}}$ 給定為 3.3219971。若我們想要讓它更精確地，我們可以說實數 $2^{\sqrt{3}}$ 是序列 2^1，$2^{1.7}$，$2^{1.73}$，$2^{1.732}$，$2^{1.7320}$，$2^{1.73205}$，…的極限。(在微積分和引言的分析上，我們學得相同的概念。)

利用相似的方法，吾人討論表示式 b^r，$b \in \mathbf{R}^+$，且 $r \in \mathbf{R}$。

利用這些結果，我們現在學會了關於指數，我們敘述下列一些性質——但是我們不去證明它們：

定理 A1.1 **指數性質** (The Properties of Exponents)。對所有 a，$b \in \mathbf{R}^+$，且所有 x，$y \in \mathbf{R}$

1) $(b^x)(b^y) = b^x \cdot b^y = b^{x+y}$,
2) $(b^x)/(b^y) = b^x/b^y = b^{x-y}$,
3) $(b^x)^y = b^{xy} = b^{yx} = (b^y)^x$, 且
4) $(ab)^x = (a^x)(b^x) = a^x \cdot b^x$.

定理 A1.1 的性質，被說明於下面。

例題 A1.4

1) $3^{5/2} \cdot 3^{3/2} = 3^{[(5/2)+(3/2)]} = 3^{8/2} = 3^4 = 81$
2) $(7^{1/5})/(7^{11/5}) = 7^{[(1/5)-(11/5)]} = 7^{-10/5} = 7^{-2} = 1/7^2 = 1/49$
3) $[(\sqrt{2})^3]^2 = (\sqrt{2})^6 = (2^{1/2})^6 = 2^{(1/2)6} = 2^3 = 8$
4) $(3\sqrt{5})^4 = 3^4(\sqrt{5})^4 = (81)(25) = 2025$

我們現在已完成定義指數函數的預備所需。

定義 A1.3 對一個固定正實數 b，若函數 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ 定義為 $f(x) = b^x$，則函數 f 被稱為**以 b 爲底數的指數函數** (exponential function for base b) [有時，我們以 $\exp_b(x)$ 表 b^x]。

例題 A1.5 a) 在圖 A1.1，我們發現四個函數的圖形：

$$f_1: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+, \quad f_1(x) = x^2 \qquad f_2: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+, \quad f_2(x) = 2^x$$
$$f_3: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f_3(x) = x^3 \qquad f_4: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+, \quad f_4(x) = 3^x$$

函數 f_1 和 f_3 皆是多項函數——不是指數函數。所以，當我們檢查指數函數 f_2 和 f_4 時，我們瞭解到表示式 x^2(對 f_1) 與 2^x (對 f_2) 之間，且 x^3 (對 f_3) 與 3^x (對 f_4) 之間都存在一個明顯的差異。指數函數 f_2 與 f_4 滿足：

1) 對所有 $x \in \mathbf{R}$，$f_2(x)>0$ 且 $f_4(x)>0$ ——特別地，對所有 $x>0$，$f_2(x)>1$ 且 $f_4(x)>0$，然而對所有 $x<0$，$0<f_2(x)<1$ 且 $0<f_4(x)<1$。
2) 對所有 x，$y \in \mathbf{R}$，$x<y \Rightarrow f_2(x)<f_2(y)$ [且 $f_4(x)<f_4(y)$] (對每一個以 $b>1$ 為底數的指數函數，此特性皆成立。亦即，當 $b>1$ 且 $x<y$，$b^x<b^y$。)
3) 若 v，$w \in \mathbf{R}$ 且 $f_2(v)=f_2(w)$，則 $v=w$。[當我們討論一個指數函數 $f(x)=b^x$，$b>1$ 時，此特性亦成立。所以，對 v，$w \in \mathbf{R}$，且 $b>1$，$b^v=b^w \Rightarrow v=w$。]

b) 函數 $f_5: \mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$，定義為 $f_5(x)=(1/2)^x=2^{-x}$，它的圖形被給在圖 A1.2。圖形說明下列的性質，對所有指數函數 $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$，$f(x)=b^x$，$0<b<1$，下列敘述是正確地。

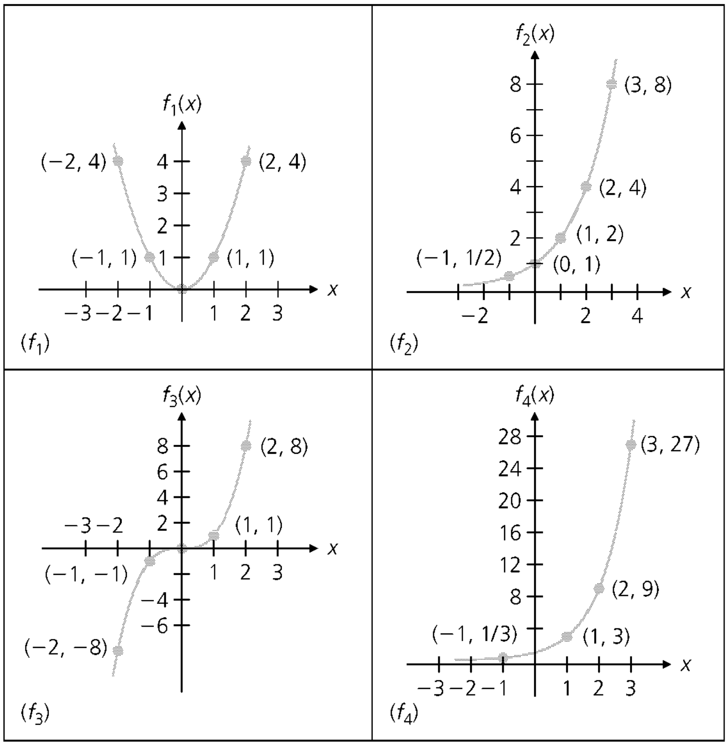

圖 A1.1

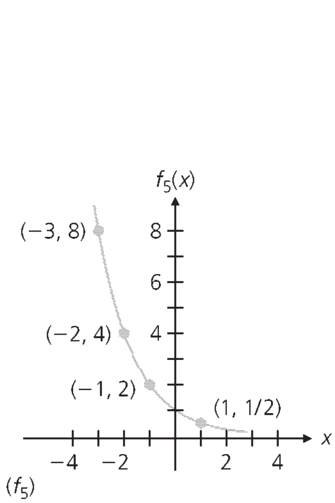

圖 A1.2

1) 對所有 $x \in \mathbf{R}$，$f_5(x) > 0$ ——此時我們求出對 $x < 0$，$f_5(x) > 1$ 且對 $x > 0$，$f_5(x) < 1$。
2) 若 x，$y \in \mathbf{R}$，$x < y$，則 $f_5(x) > f_5(y)$。
3) 對 x，$y \in \mathbf{R}$，若 $f_5(x) = f_5(y)$，則 $x = y$。

c) 當我們討論指數函數 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ 為 $f(x) = e^x$，$e \doteq 2.71828$ 為一無理數。這一個函數被描繪如圖 A1.3 的函數 f_6，此時，我們使用到近似值 $e^2 \doteq 7.38906$ 和 $e^3 \doteq 20.08554$。函數 f_7 (亦描繪在圖 A1.3 中) 亦為一指數函數，$f_7(x) = e^{-x}$。

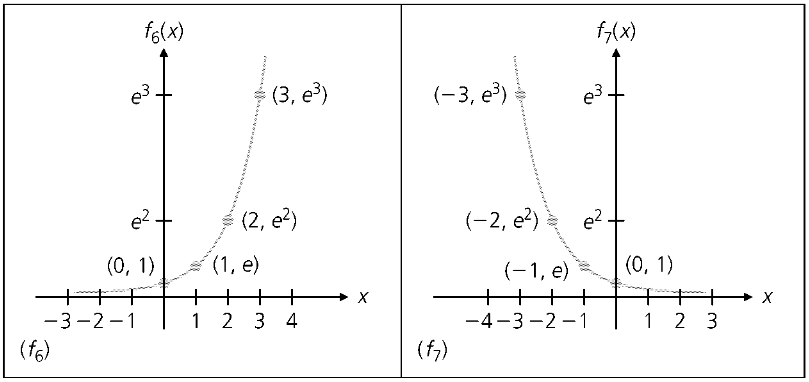

圖 A1.3

從例題 A1.5 的 (a) 與 (b) 部份之特性 (3)，我們學到對所有 $b \in \mathbf{R}^+$且對所有 x，$y \in \mathbf{R}$，若 $b \neq 1$ 且 $b^x = b^y$，則 $x = y$。這個評論幫助我們去解決下面的替數方程式。

例題 A1.6

求有哪些實數 n，滿足方程式 $(1/2)^{-6n^2} = (1/8)^{-(10n+4)/3}$？

此方程式可被寫成 $2^{6n^2} = 8^{(10n+4)/3}$，因為，$(1/2)^{-6n^2} = [(1/2)^{-1}]^{6n^2} = 2^{6n^2}$ 且 $(1/8)^{-(10n+4)/3} = [(1/8)^{-1}]^{(10n+4)/3} = 8^{(10n+4)/3}$，則

$$2^{6n^2} = 8^{(10n+4)/3} \Rightarrow 2^{6n^2} = (2^3)^{(10n+4)/3} \Rightarrow 2^{6n^2} = 2^{(10n+4)} \Rightarrow$$
$$6n^2 = 10n + 4 \Rightarrow 3n^2 = 5n + 2 \Rightarrow$$
$$3n^2 - 5n - 2 = (3n+1)(n-2) = 0 \Rightarrow n = -1/3 \text{ or } n = 2.$$

我們現在學會了計算指數函數，我們將轉移我們的注意力到另一個與指數函數息息相關的函數，稱之為對數或對數函數。然而，在介紹這函數

之前，我們將複習一些對數的基本特性。首先，我們在下面的定義中，考慮指數與對數之間明確的關係。

定義 A1.4

令 b 為一個不為 1 的固定正實數。若 $x \in \mathbf{R}^+$，我們寫 $\log_b x$ 表示為*以 b 為底數之 x 的對數*，其為唯一的實數 y，滿足 $b^y = x$。

這個概念可以被重新陳述如下：$\log_b x$ 為以 b 為底數想得 x 的指數。所以，

$$y = \log_b x \text{ 若且唯若 } x = b^y$$

例題 A1.7

下面的結果，可由前面的定義推得：

a) 因為 $2^3 = 8$，我們可得 $\log_2 8 = 3$。
b) 因為 $3^{-4} = 1/(3^4) = 1/81$，所以可推得 $\log_3(1/81) = -4$。
c) 對所有 $b \in \mathbf{R}^+$，此時 $b \neq 1$，它指出
　i) $\log_b b = 1$　　因為 $b^1 = b$,
　ii) $\log_b b^2 = 2$　　因為 $b^2 = b^2$, 且
　iii) $\log_b (1/b) = -1$　　因為 $b^{-1} = 1/b$,
d) 因為 $\sqrt{7} = 7^{1/2}$，指出 $\sqrt{7} = 1/2$.。

例題 A1.8

假設 b，$x \in \mathbf{R}^+$，此時 b 是一個固定且不等於 1 的數。若 $\log_b x = 6$，那 $\log_{b^2} x$ 是什麼？

我們知道 $\log_b x = 6 \Leftrightarrow b^6 = x$，所以 $x = (b^2)^3$。且 $x = (b^2)^3 \Leftrightarrow \log_{b^2} x = 3$。(利用相同的方法，可以推得 $\log_{b^3} x = 2$ 且 $\log_{b^6} x = 1$)。

結合定理 A1.1 中被討論的指數性質 (1)，(2)，和 (3)，下列關於對數的性質是互相對應的。

定理 A1.2

令 b，r，$s \in \mathbf{R}^+$，此時 b 是一個固定且不等於 1 的數。則

1) $\log_b(rs) = \log_b r + \log_b s$,
2) $\log_b(r/s) = \log_b r - \log_b s$, 且
3) $\log_b(r^s) = s \log_b r$.

證明： 我們將證明部份 (1)，且部份 (2) 的證明則留為這附錄的習題。對於部份 (3) 我們只證明當 s 為一非零整數的情形——但是我們應該接受且使用這裡一般的敘述。

假設 $x=\log_b r$ 且 $y=\log_b s$，則，因為 $x=\log_b r \Leftrightarrow b^x=r$ 且 $y=\log_b s \Leftrightarrow b^y=s$，由定理 A1.1 的部份 (1)，可推得 $rs=(b^x)(b^y)=b^{x+y}$。因為 $rs=b^{x+y} \Leftrightarrow \log_b(rs)=x+y$；我們證得

$$\log_b(rs)=x+y=\log_b r+\log_b s$$

在下一個的例題裡，我們發現定理 A1.2 的三個結果，可以被使用於計算對數。

例題 A1.9 在電腦與計算機未被發明前，對數常被用來幫助於計算積、商，和次方與開方根。這些對數經常是以 10 為底數，且這些對數的對數表，常被拿來作為對數計算的工具 [對數是由蘇格蘭的數學家 John Napier (1550-1617) 所發現。在 17 世紀，領航員與天文學家利用它們去減少對乘法與除法計算所花費之時間]。

舉例來說，因為 $\log_{10} 10=1$ 且 $\log_{10} 100=2$，所以我們推得 $1<\log_{10} 31<2$。事實上，$\log_{10} 31=1.4914$。同樣地，我們推得 $2<\log_{10} 137=2.1367<3$。由定理 A1.2，可推得

1) $\log_{10} 4247=\log_{10}(31\cdot 137)=\log_{10} 31+\log_{10} 137=1.4914+2.1367=3.6281,$
2) $\log_{10}(137/31)=\log_{10} 137-\log_{10} 31=2.1367-1.4914=0.6453,$ 且
3) $\log_{10}\sqrt[3]{137}=\log_{10} 137^{1/3}=(1/3)\log_{10} 137=(1/3)(2.1367)=0.7122.$

在微積分，我們求得底數為 $e\doteq 2.71828$ 的對數，稱為**自然對數**，記作為 $\ln x$，$x\in\mathbf{R}^+$。而在電腦科學上，底數為 2 的對數當被討論到。許多計算機可以計算出以 e 或 10 為底數的對數。且由下面的結果我們發現，可由一個對數推得到底數不相同的對數。

定理 A1.3 **底數改變公式** (The Base-Changing Formula)。令 a，$b\in\mathbf{R}^+$，此時 a，b 同時不為 1。對所有 $x\in\mathbf{R}^+$

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

證明：令 $c=\log_b x$ 且 $d=\log_a x$。則 $b^c=x=a^d$ 且 $\log_b x=\log_b a^d=d\log_b a=(\log_a x)(\log_b a)$。因此 $\log_a x=\log_b x/\log_b a$。

例題 A1.10

由對數表與計算機，計算出 $\log_e 2 = \ln 2 = 0.6931$ 且 $\log_e 10 = \ln 10 = 2.3026$。因此由定理 A1.3 推得 $\log_2 10 = \ln 10/\ln 2 = 2.3026/0.6931 \doteq 3.3222$。

例題 A1.11

由定理 A1.3，當 $x = b$ 時，可推得一個特別的公式。於此情形，我們發現

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$$

複習完必要的預備知識，現在我們可定義對數函數了。

定義 A1.5

令 $b \neq 1$，為一個固定的正實數。定義函數 $g: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ 為 $g(x) = \log_b x$，且稱 g 是**底數爲 b 的對數函數** (logarithmic function to the base b)。

例題 A1.12

a) 考慮下列的對數函數

$$g_1: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}, \qquad g_1(x) = \log_2 x \qquad g_2: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}, \qquad g_2(x) = \log_3 x.$$

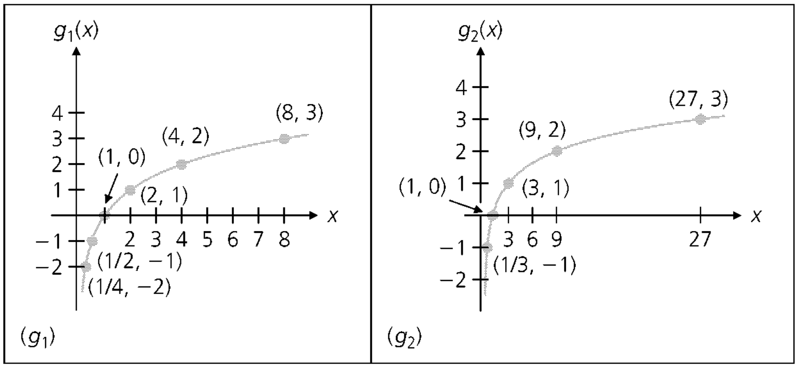

圖 A1.4

這些函數的圖形被描繪在圖 A1.4，且這些函數滿足下列的敘述：

1) 對所有 $x \geq 1$，$g_1(x) \geq 0$ 且 $g_2(x) \geq 0$，且對所有 $x < 1$，$g_1(x) < 0$ 且 $g_2(x) < 0$。(對每一對數函數 $\log_b x$，$b > 1$，此敘述是正確的。)
2) 對所有 x，$y \in \mathbf{R}^+$，$x < y \Leftrightarrow g_1(x) < g_1(y)$ [且 $g_2(x) < g_2(y)$]。對每一對數函數 $\log_b x$，$b > 1$，此數敘述亦是正確的。)
3) 若 u，$v \in \mathbf{R}^+$ 且 $g_1(u) = g_1(v)$，則 $u = v$。(事實上，對 $b > 1$，我們有

$\log_b u = \log_b v \Rightarrow u = v$，因為 $w = \log_b u \Leftrightarrow u = b^w$，且 $w = \log_b v \Leftrightarrow v = b^w$。)

b) 在圖 A1.5 的圖形表示函數 $g_3 : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$，定義為 $g_3(x) = \log_{(1/2)} x$。這個圖形說明出下列的性質，對那些對數函數 $\log_b x$，$0 < b < 1$，皆是正確的。

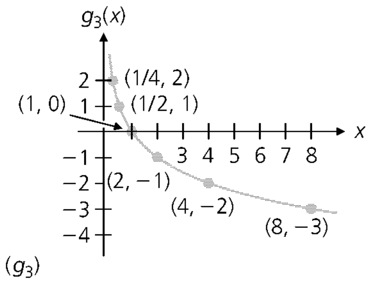

圖 A1.5

1) 此時，對所有 $x \leq 1$，$g_3(x) \geq 0$，而對所有 $x > 1$，$g_3(x) < 0$。
2) 對所有 x，$y \in \mathbf{R}^+$，若 $x < y$ 則 $g_3(x) > g_3(y)$。
3) 若 u，$v \in \mathbf{R}^+$ 且 $g_3(u) = g_3(v)$，則 $u = v$。[此證明和 (a) 部份 (3) 一樣。]

c) 在圖 A1.6 的 (a) 部份中，我們有函數 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$，其中 $f(x) = 2^x$ 及函數 $g : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$，其中 $g(x) = \log_2 x$。這兩個圖形對稱於直線 $y = x$ ——即，若沿直線 $y = x$ 對摺，則函數 f 與 g 的圖形互相重疊。這裡，我們注意到函數 f 圖形上的點與函數 g 圖形上的點是互相對應的。例如，函

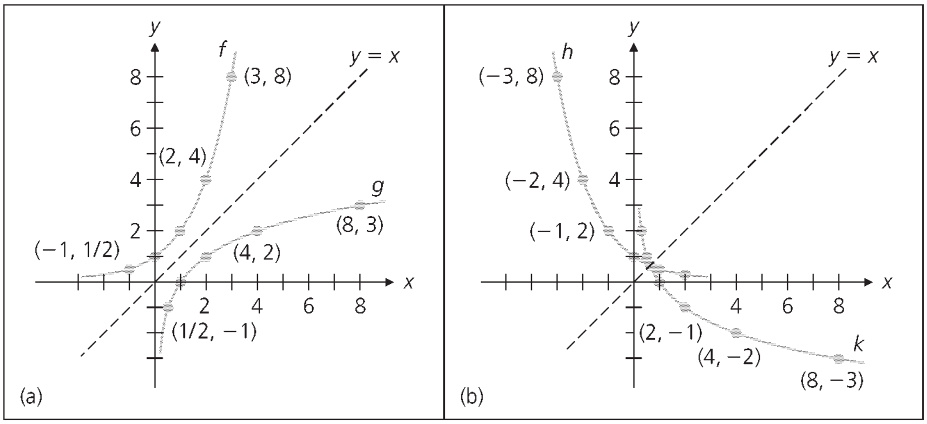

圖 A1.6

數 f 圖形上的點 (2, 4) 與函數 g 圖形上的點 (4, 2)，互相對應。一般而言，函數 f 圖形上的點 $(x, 2^x)$ 與函數 g 圖形上的點 $(2^x, x\ (=\log_2 2^x))$ 互不相對應，且函數 g 圖形上的點 $(x, \log_2 x)$ 對應於函數 f 圖形上的點 $(\log_2 x, x\ (=2^{\log_2 x}))$。

d) 函數 $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$，$h(x)=(1/2)^x$ 與函數 $k:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$，$k(x)=\log_{(1/2)} x$ 的圖形描繪於圖 A1.6 的 (b) 部份。如例題的 (c) 部份一樣，這兩函數亦對稱於直線 $y=x$。函數 h 圖形上的點 $(x, (1/2)^x)$ 對應於函數 k 圖形上的點 $((1/2)^x, x\ (=\log_{(1/2)}(1/2)^x))$，且函數 k 圖形上的點 $(x, \log_{(1/2)} x)$ 對應於函數 h 圖形上的點 $(\log_{(1/2)} x, x\ (=(1/2)^{\log(1/2)^x}))$。(這兩個圖形在 $x \doteq 0.6412$ 時，交會於直線 $y=x$ 上 。)

e) 讀者可以利用 5.6 節中的圖 5.10 所描繪的函數 $y=e^x$ 與 $y=\ln x$ 的圖形再做檢查。在那節中，函數對稱於直線 $y=x$ 的關係結合了合成函數與反函數之概念，一起被討論到。

習題 A.1

1. 對 x，$y \in \mathbf{R}^+$，將下列各項改寫成指數形式。
   a) $\sqrt{xy^3}$　b) $\sqrt[4]{81x^{-5}y^3}$　c) $5\sqrt[3]{8x^9y^{-5}}$
2. 計算下列各項。
   a) $125^{-4/3}$　b) $0.027^{2/3}$　c) $(4/3)(1/8)^{-2/3}$
3. 決定下列各項。
   a) $(5^{3/4})(5^{13/4})$　b) $\dfrac{7^{3/5}}{7^{18/5}}$　c)$(5^{1/2})(20^{1/2})$
4. 當下列各方程式有意義時，求出各方程式的實數解 x。
   a) $5^{3x^2}=5^{5x+2}$　b) $4^{x-1}=(1/2)^{4x-1}$
   c) $(1/25)^{1-x}=(1/125)^x$
5. 將下列各指數方程式改寫成對數方程式。
   a) $2^7=128$　b) $125^{1/3}=5$
   c)$10^{-4}=1/10{,}000$　d) $2^a=b$
6. 求下列各對數的值。
   a) $\log_{10} 100$　b) $\log_{10}(1/1000)$
   c) $\log_2 2048$　d) $\log_2(1/64)$
   e) $\log_4 8$　f) $\log_8 2$
   g) $\log_{16} 1$　h) $\log_{27} 9$
7. 求下列各項的值。
   a) $\log_x 243=5$　b) $\log_3 x=-3$
   c) $\log_{10} 1000=x$　d) $\log_x 32=5/2$
8. 證明定理 A1.2 的部份 (2)。
9. 令 b，$r \in \mathbf{R}^+$，且 b 為不等於 1 的固定值。
   a) 對所有 $n \in \mathbf{Z}^+$，證明 $\log_b r^n=n\log_b r$。
   b) 證明對所有 $n \in \mathbf{Z}^+$，$\log_b r^{-n}=(-n)\log_b r$。
10. 利用 $\log_2 5=2.3219$ 與 $\log_2 7=2.8074$，估算下列各對數函數之值。
    a) $\log_2 10$　b) $\log_2 100$
    c) $\log_2(7/5)$　d) $\log_2 175$
11. 給定 (到小數第四位) $\ln 2=0.6932$，$\ln 3=1.0986$ 與 $\ln 5=1.6094$，並估算下列各對數函數的值。

a) $\log_2 3$ b) $\log_5 2$ c) $\log_3 5$

12. 計算下列各方程式的 x 值。

a) $\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10} x$

b) $\log_4 3 + \log_4 x = \log_4 7 - \log_4 5$

13. 求下列各方程式的 x 值。

a) $\log_{10} x + \log_{10} 6 = 1$

b) $\ln x - \ln (x-1) = \ln 3$

c) $\log_3 (x^2 + 4x + 4) - \log_3(2x-5) = 2$

14. 若 $\log_2 x = (1/3)[\log_2 3 - \log_2 5] + (2/3) \log_2 6 + \log_2 17$，求 x 的值。

15. 令 b 為一不為零之固定正實數。若 a，$c \in \mathbf{R}^+$，證明 $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$。

附 錄 2

矩陣、矩陣運算，及行列式

從第 7 章開始，及後面章節中，某幾種矩陣常被提及到。這些矩陣的數學結構在 19 世紀被英國數學家 Arthur Cayley (1821-1895) 和他的同事 James Joseph Sylvester (1814-1897) 所發展出且一起研討出的知識，在 1858 年，Cayley 的矩陣代數著作中，介紹到矩陣可應用於各領域——例如，物理學的量子理論，心理學的數據分析與生理學上。

對於那些未曾學習過任何關於矩陣的基本概念或只僅學會簡單的矩陣代數的讀者，我們將在這一附錄中，提供一些關於矩陣的概念。(我們將不證明全部的結論，但會結合一些例子，去敘述這些性質，若讀者想要學得更精確的發展，讀者可以參閱這附錄後面的參考文獻。)

首先最重要地，我們開始於下面的概念。

定義 A2.1

對 m，$n \in \mathbf{Z}^+$，一個 $m \times n$ 矩陣為一個有 mn 個元素的矩形陣列，此 $m\,n$ 個元素被安排成 m (水平) 列及 n (垂直) 行。

一個 $m \times n$ 矩陣 A，記作為 $A = (a_{ij})_{m \times n}$，其中 $1 \leq i \leq m$ 且 $1 \leq j \leq n$，且數字 a_{ij} 稱為第 (i, j)- 數 (即，這個數出現在矩陣 A 第 i 列與第 j 行)。一個 $m \times 1$ 矩陣通常稱為**行矩陣** (column matrix) (或**行向量** (column vector))；一個 $1 \times n$ 矩陣則被稱為**列矩陣** (row matrix) (或**列向量** (row vector)。當 $m = n$，則矩陣稱為**方陣** (square)。

例題 A2.1

令 $A=(a_{ij})_{3\times2}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\\ -5 & 4\end{bmatrix}$, $B=(b_{ij})_{2\times4}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ 1 & 2 & -1 & 7\end{bmatrix}$, 且 $C=\begin{bmatrix}\pi & 0\\ 1/2 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$.

這裡的矩陣 A 為一個 3×2 矩陣，此時 $a_{11}=1$，$a_{12}=2$，$a_{21}=0$，$a_{22}=3$，$a_{31}=-5$ 且 $a_{32}=4$。矩陣 B 有 2 列且有 4 行，此時，舉例來說，我們找到 $b_{13}=0$ 且 $b_{24}=7$。在 2×2 階方陣 C 中，我們瞭解到矩陣中的數可能為有理數，亦可為無理數。

(註：矩陣中的數甚至可為複數，但是在這附錄中，我們所討論的矩陣，它們的數皆要求為實數。)

如同其它數學結構，一旦結構被定義，吾人需決定兩個此類結構何時相同，決定之法現在附上。

定義 A2.2

令 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 與 $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 為二個 $m\times n$ 矩陣。當 $a_{ij}=b_{ij}$ 對所有 $1\leq i\leq m$ 且所有 $1\leq j\leq n$，則稱矩陣 A 與矩陣 B 相等，記作 $A=B$。

例題 A2.2

在定義 A2.2 中，我們學到，當兩矩陣的列數與行數均相同且所對應的元素皆相等時，則此兩矩陣為相等矩陣。由此結果，若

$$A=\begin{bmatrix}w & 2 & 0\\ 0 & 3 & x\end{bmatrix} \quad 且 \quad B=\begin{bmatrix}-7 & y & 0\\ 0 & z & 4\end{bmatrix},$$

為兩相等矩陣，則 $w=-7$，$x=4$，$y=2$，$z=3$。

回想我們第一次遇到算術時，在學會計數之後，我們關始學使用加法及乘法來組合整數。沿著相同的想法，我們現在考慮，我們可如何組合矩陣。

定義 A2.3

若矩陣 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 與矩陣 $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 均為 $m\times n$ 矩陣，其和被表為 $A+B$，是 $m\times n$ 矩陣 $C=(c_{ij})_{m\times n}$，其中 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$，對所有 $1\leq i\leq m$，$1\leq j\leq n$。

從定義 A2.3 我們瞭解到相同階數 (行數與列數相等) 矩陣的加法。而且，兩矩陣的加法，是由兩矩陣之相對應元素相加而完成。

例題 A2.3

考慮下列矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 3 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad 且\ C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}.$$

這裡我們發現 $A+B = \begin{bmatrix} 1+2 & 3+(-1) & 4+6 \\ 2+3 & 0+1 & 6+7 \\ 1+4 & 1+2 & 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 10 \\ 5 & 1 & 13 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$。事實上，我們亦有 $B+A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 10 \\ 5 & 1 & 13 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$，這說明了下面的通則。

對任意兩 $m\times n$ 矩陣 E 與矩陣 F，$E+F=F+E$。所以，矩陣的加法是一個可交換的 (二元) 運算之例子。

因為矩陣 A 和矩陣 B 皆具有 3 行，但矩陣 C 只有 2 行，所以我們無法決定 $A+C$ 或 $B+C$。然而，我們可以求得：

$$C+C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -8 \\ -14 & 12 \end{bmatrix}.$$

在例題 A2.3 的最後部份，我們瞭解到，我們可以簡單化地將矩陣 C 之每一項乘上 2 亦可求得 $C+C$。這個推論，讓我們瞭解到下面的通則。

定義 A2.4

若矩陣 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 且 $r\in \mathbf{R}$，則**純量乘積** (scalar product) rA 亦為 $m\times n$ 矩陣，此時對所有 $1\le i\le m$，$1\le j\le n$，第 (i, j)- 項為 ra_{ij}。

例題 A2.4

a) 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$, 則

$$3A = 3\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 6 & 3\cdot 4 \\ 3\cdot 0 & 3\cdot(-1) & 3\cdot(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 18 & 12 \\ 0 & -3 & -9 \end{bmatrix}.$$

b) 對 $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ 則 $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$，我們求得

$3B = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 6 \\ -15 & 3 & 21 \end{bmatrix}$, 且

$$\begin{aligned} 3(A+B) &= 3\left(\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & 7 \end{bmatrix}\right) \\ &= 3\begin{bmatrix} -1 & 6 & 6 \\ -5 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 18 & 18 \\ -15 & 0 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 18 & 12 \\ 0 & -3 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 0 & 6 \\ -15 & 3 & 21 \end{bmatrix} \\ &= 3A+3B. \end{aligned}$$

c) (b) 部份的結果，更可以廣泛地推論到下列的結論：對任意兩個 $m\times n$ 矩陣 E 與矩陣 F，且對任意純量 $r\in\mathbf{R}$，$r(E+F)=rE+rF$。這個法則稱為**矩陣純量乘法的分配律** (Distributive Law of Scalar Multiplication over Matrix Addition)。

例題 A2.5

a) 令 $A=(a_{ij})_{3\times 2}$ 為 3×2 矩陣，且令 $Z=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$。則

$$A+Z=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}+0&a_{12}+0\\a_{21}+0&a_{22}+0\\a_{31}+0&a_{32}+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{bmatrix}=A.$$

我們稱 Z 為 3×2 矩陣的**加法單位** (additive identity) 矩陣 (**或零矩陣** (zero element))

b) 當 $A=\begin{bmatrix}1&1\\2&-3\\-4&5\end{bmatrix}$ 且 $B=\begin{bmatrix}-1&-1\\-2&3\\4&-5\end{bmatrix}$，則求得

$$A+B=\begin{bmatrix}1+(-1)&1+(-1)\\2+(-2)&(-3)+3\\(-4)+4&5+(-5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

因此，我們稱矩陣 $B=(-1)A$ 為矩陣 A 的**加法反矩陣** (additive inverse)，且記作 $B=-A$。

到目前為止，我們已經對矩陣提出一些加法性質。但是，矩陣乘法的運算，在矩陣的學習中更加有吸引力與有用的。我們試圖定義此矩陣乘法的運算，像是矩陣加法的分量方式運算。換言之，矩陣乘法取決於列與行的乘積，然後再求和。例如：

$$[a_1\quad a_2\quad a_3]\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i.$$

所以，在這一特殊例子中，我們有

$$[-1\quad 4\quad 3]\begin{bmatrix}2\\1\\7\end{bmatrix}=(-1)\cdot 2+4\cdot 1+3\cdot 7=-2+4+21=23.$$

一般而言，若 $a=(a_i)_{1\le i\le m}$ 為一個 $1\times n$ 列向量且 $b=(b_i)_{1\le i\le n}$ 為 $n\times 1$ 行向量，則 $ab=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$。這個結果為一實數，稱 ab 為向量 a 與向量 b

的**純量乘積** (scalar product)，這個概念讓我們推得到下列的定義。

定義 A2.5

給定矩陣 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 且矩陣 $B=(b_{jk})_{n\times p}$，則矩陣**乘積** (product) AB 為矩陣 $C=(c_{ik})_{m\times p}$，此時

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{in}b_{nk}=\sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{tk},\ \text{對所有}\ 1\le i\le m,\ 1\le k\le p.$$

所以，$m\times p$ 階矩陣 C 的第 i 列第 k 行的 c_{ik} 項，是為矩陣 A 的第 i 列與矩陣 B 的第 j 行之乘積。

定義 A2.5 論證出下列的結果

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1p}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} & \cdots & b_{2p}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{np}\end{bmatrix}$$

$$=C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1p}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} & \cdots & c_{2p}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ik} & \cdots & c_{ip}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mk} & \cdots & c_{mp}\end{bmatrix}$$

例題 A2.6

a) 考慮下列矩陣 $A=(a_{ij})_{2\times 3}=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&0&4\end{bmatrix}$ 且 $B=(b_{jk})_{3\times 3}=\begin{bmatrix}1&2&7\\1&3&3\\0&1&1\end{bmatrix}$。

則 $AB=C=(c_{ik})_{2\times 3}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\end{bmatrix}$, 其中

$$c_{11}=1\cdot 1+2\cdot 1+1\cdot 0=3 \qquad \begin{bmatrix}1&2&1\\3&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&7\\1&3&3\\0&1&1\end{bmatrix},$$

$$c_{12}=1\cdot 2+2\cdot 3+1\cdot 1=9 \qquad \begin{bmatrix}1&2&1\\3&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&7\\1&3&3\\0&1&1\end{bmatrix},$$

$$c_{13}=1\cdot 7+2\cdot 3+1\cdot 1=14 \qquad \begin{bmatrix}1&2&1\\3&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&7\\1&3&3\\0&1&1\end{bmatrix},$$

$$c_{21}=3\cdot 1+0\cdot 1+4\cdot 0=3 \qquad \begin{bmatrix}1&2&1\\3&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&7\\1&3&3\\0&1&1\end{bmatrix},$$

$$c_{22} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 10 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$c_{23} = 3 \cdot 7 + 0 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 25 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

因此

$$AB = C = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 14 \\ 3 & 10 & 25 \end{bmatrix}.$$

b) 由 (a) 中的矩陣 A 與矩陣 B，設法求出矩陣乘積 $BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$。為求出矩陣 BA 的第一列第一行的項，我們寫出下列乘積之形式：

$$[1 \quad 2 \quad 7] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 7 \cdot \text{“?”}.$$

不幸地，矩陣 A 的第一行無足夠的項，讓我們表示出純量乘積或矩陣乘積 BA。

現在，我們推得乘積 AB，不同於乘積 BA。我們再一次考慮乘積 BA，我們瞭解到困難的關鍵，為矩陣 A 的第一行元素個數不等於矩陣 B 的第一列元素個數。矩陣 B 的第一列元素個數為 3，為矩陣 B 的行數。矩陣 A 的第一行元素個數為 2，為矩陣 A 的列數。這些結論，引導我們推得到下面的結論。

若 C 為 $m \times n$ 矩陣，且 D 為 $p \times q$ 矩陣，則乘積 CD，在 $n = p$ 時，才能計算之——即，當矩陣 C (第一個矩陣) 的行數等於矩陣 D (第二個矩陣) 的列數時，其乘積才能計算。且當 $n = p$ 時，則矩陣乘積 CD 必為 m 列和 q 行。

讓我們計算下列各矩陣的乘積。

例題 A2.7

a) 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 且 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 則 $AB = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ，但是

$BA = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$

因此，雖然矩陣乘積 AB 與 BA 皆可計算出，但是我們沒有推得 $AB = BA$。事實上，這些乘積的階乘也不盡然相同。

b) 對於 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 且 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，我們可計算得到 $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 且 $BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$。

所以，這裡 AB 與 BA 雖然具有相同的階乘，但是 $AB \neq BA$。

c) 最後，考慮下列各矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{且 } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}。$$

這裡我們發現

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -1 \\ -7 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{且}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} -7 & -1 \\ -7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -10 \\ -13 & -6 \end{bmatrix},$$

然而

$$BC = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -4 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{且}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -4 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -10 \\ -13 & -6 \end{bmatrix}.$$

所以，$(AB)C = A(BC)$。

一般而言，若 $m, n, p, q \in \mathbf{Z}^+$ 且 $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{jk})_{n\times p}$, 且 $C = (c_{kl})_{p\times q}$, 則

$$(AB)C = A(BC),$$

所以矩陣乘積具有結合性 (當它可以被執行時)。

由例題 A2.7 的 (a)，(b) 兩部份之結果，我們學得到一個重要的事實。

1) 一般而言，矩陣的乘法運算是不可交換的。
2) 可能找到兩個非零矩陣 $C = (c_{ij})_{m\times n}$ (其中的某一項 $1 \le i \le m$，$1 \le j \le n$，$c_{ij} \neq 0$)，且 $D = (d_{jk})_{n\times p}$ (其中，對某一項 $1 \le j \le n$，$1 \le k \le p$，$d_{jk} \neq 0$)，使得 $CD = Z = (0)_{m\times p}$。

簡而言之，矩陣乘法與實數乘法的特性是不盡相同的。
現在我們比較矩陣乘法與實數乘法之間的差異性。

例題 A2.8

a) 當我們考慮方陣——特別，2×2 矩陣——我們學得

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

因此，矩陣 $I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 稱為所有 2×2 矩陣的**乘法單位矩陣** (multiplicative identity)。一般而言，對固定正整數 $n>1$，則矩陣

$$I_n=(\delta_{ij})_{n\times n},\qquad 其中\ \delta_{ij}=\begin{cases} 1, & 若\ i=j \\ 0, & 若\ i\neq j \end{cases}$$

稱為所有 $n\times n$ 矩陣的**乘法單位矩陣** (multiplicative identity)。

b) 回顧實數乘法，我們知道對所有 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq0$，則存在一個 $y\in\mathbf{R}$，使得 $xy=yx=1$。此時，實數 y 稱為 x 的**乘法反元素** (multiplicative inverse) 且通常記作為 x^{-1}。

我們想要知道，對方陣而言，是否具有相同的性質——就 2×2 階方陣來討論之。

若 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，此時 a，b，c，d 皆為固定的實數，則我們是否可以找到矩陣 $B=\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$，使得 $AB=BA=I_2$？(這裡的 w，x，y，z 為未知的實數，故由給定的 a，b，c，d 來決定 w，x，y，z 之值。)
由乘積 AB，我們可求得

$$AB=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} aw+by & ax+bz \\ cw+dy & cx+dz \end{bmatrix}.$$

因為 AB 等於 I_2 ——即，對

$$\begin{bmatrix} aw+by & ax+bz \\ cw+dy & cx+dz \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

——由矩陣相等的定義，得到

(1) $aw+by=1$	(3) $ax+bz=0$
(2) $cw+dy=0$	(4) $cx+dz=1.$

若式 (1) 乘上 d 且式 (2) 乘上 b，我們可推得

$$(1)' \quad adw + bdy = d \qquad\qquad (2)' \quad bcw + bdy = 0.$$

式 (2)′ 減去式 (1)′，我們得到 $adw - bcw = (ad - bc)w = d$，所以若 $ad - bc \neq 0$，則 $w = d/(ad - bc)$。利用相同的計算，可推得若 $ad - bc \neq 0$，則 $x = -b/(ad - bc)$，$y = -c/(ad - bc)$，$z = a/(ad - bc)$。

[註：(1) 實數 $ad - bc$ 稱為矩陣 A 的行列式。(2) 雖然，我們由方程式 $AB = I_2$，決定了 w，x，y 和 z 的值，我們亦可證得，若我們討論的方程式為 $BA = I_2$，則亦有相同的解。]

c) 使用 (b) 部份的結果，令

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

則 $ad - bc = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 1\ (\neq 0)$，此指出 $w = 1/1 = 1$，$x = -2/1 = -2$，$y = -0/1 = 0$，$z = 1/1 = 1$，且

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

在這些環境下，我們寫 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

d) 考慮矩陣 $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，此時行列式 $A_1 = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 5\ (\neq 0)$。

這裡我們發現 $A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{bmatrix} = 1/5\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$

e) 由 (b)，(c) 與 (d) 部份，推得若 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，則

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$，當 $\det(A) = A$ 的行列式 $= ad - bc \neq 0$。

f) 對矩陣 $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$，我們推得 A_2 的行列式為 $\det(A) = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 0$，所以在這例題中，得不到其乘法反矩陣——亦即，$A_2^{-1}$ 不存在。

目前，我們已發展了一些矩陣的基本概念，且讀者可能尚不曉得如何使用這些數學架構。因此，我們再次回到實數及在初等代數裡所遇到的一些概念。

當方程式 $2x = 3$，由下列的方程式求出其解：

$$2x = 3 \tag{1}$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)(2x) = \left(\tfrac{1}{2}\right)(3) \tag{2}$$

$$\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)2\right]x = 3/2 \tag{3}$$

$$1 \cdot x = 3/2 \tag{4}$$

$$x = 3/2 \tag{5}$$

且在解此方程式時，實數 $1/2=(2^{-1})$，被引進在方程式 (2)，就是我們所需的“得未知數，x，它自己”當我們由步驟 (3) 及 (4) 繼續到步驟 (5) 時。所以，一般而言，若我們以固定實數 a，b 開始，且 $a\neq 0$，則方程式 $ax=b$ 的解為 $x=a^{-1}b$。

現在讓我們來考慮線性方程組：

$$\begin{aligned} 3x+y&=3 \\ x+2y&=7, \end{aligned} \tag{*}$$

可以表示為矩陣的形式

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

[這線性方程組的表示法建立於矩陣的乘法定義上。對此方程式 (*) 的左半部表示為矩陣 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的列與行矩陣 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 的純量乘積。若我們令

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad \text{且} \qquad B=\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix},$$

則我們尋求方程式 $AX=B$ 的解。考慮稍早的方程式 $ax=b$，可得其解為 $x=a^{-1}b$，而此時的解是否亦為 $X=A^{-1}B$？

因為行列式 $\det(A)=3\cdot 2-1\cdot 1=5\neq 0$，由例題 A2.8 的 (e) 部份，我們可推得，

$$A^{-1}=(1/5)\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{bmatrix}.$$

則我們可求出

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{1$'$}$$

$$\begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{2$'$}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1/5 \\ 18/5 \end{bmatrix} \tag{3$'$}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 \\ 18/5 \end{bmatrix} \tag{4}'$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 \\ 18/5 \end{bmatrix}. \tag{5}'$$

由定義 A2.2，它推得其解 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -1/5 \\ 18/5 \end{bmatrix}$，且 $x=-1/5$，$y=18/5$。

一般而言，若 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，且 $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$，此時 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}，b_1，$b_2 \in \mathbf{R}$，且 $\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，則下列線性方程組的解

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2, \end{aligned}$$

被給定為

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/\det(A))(a_{22}b_1 - a_{12}b_2) \\ (1/\det(A))(-a_{21}b_1 + a_{11}b_2) \end{bmatrix}.$$

更而，雖然我們無去證得下面的結果，但下面的敘述為真，對 $n \in \mathbf{Z}^+$，$n \geq 2$。

若 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 為一實數矩陣 (其有一乘法反矩陣) 且 $B=(b_i)_{1\leq i\leq n}$，$X=(x_i)_{1\leq i\leq n}$ 均為 $n\times 1$ 的行矩陣 (像稍早 $n=2$ 所定義的)，則線性方程組

$$AX=B$$

有解為

$$X=A^{-1}B.$$

現在，我們雖然尚未討論大於 2×2 的矩陣之反矩陣，我們結束這個附錄於討論較大行列式的進一步結果。

我們已經知道，對於矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，其行列式 $\det(A)=ad-bc$。行列式 $\det(A)$ 通常被記為 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$。為了討論較大的行列式，我們需要下列的概念。

定義 A2.6 令 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，此時 $n\geq 3$。對所有 $1\leq i\leq n$ 且 $1\leq j\leq n$，結合 a_{ij} 的

子式為，去除 A 的第 i 列與第 j 行後的 $(n-1)\times(n-1)$ 矩陣之行列式。

例題 A2.9

a) 對 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$，我們求得

1) 其結合 0 的子式為矩陣 A 去除第一列與第二行後的矩陣之行列式：

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ 引導我們得到 $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$；且

2) 對 $a_{23}=6$，其子式為 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$。

b) 給 4×4 矩陣

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 7 & 8 & -1 \\ 4 & -3 & -2 & 5 \\ -6 & 9 & 4 & 0 \end{bmatrix},$$

其結合 3 的子式是 3×3 的行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -3 & -2 & 5 \\ 9 & 4 & 0 \end{vmatrix},$$

其由矩陣 B 去除第二列與第一行後求得 (且將矩陣中括弧改為垂直線以表行列式)。

給一矩陣 $A=(a_{ij})_{3\times3}$，對所有 $1\le i\le 3$ 且 $1\le j\le 3$，我們令 M_{ij} 表 a_{ij} 的子式，則

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}+a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}+a_{13}(-1)^{1+3}M_{13}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

且稱我們利用**子式展開式** (expansion by minors) 計算 $\det(A)$。

在這方法中，我們把問題降到 2×2 階的行列式後，再計算出其答案，下面讓我們計算一個特殊的例題。

例題 A2.10

a) $$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 3 & 8 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + (-7)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= 2(8\cdot 0 - 2\cdot 6) - 4(3\cdot 0 - 2\cdot 5) - 7(3\cdot 6 - 8\cdot 5)$$
$$= 2(-12) - 4(-10) - 7(-22) = 170.$$

[註：在這一子式展開式中，利用此行列式第一列的每一元素 a_{1j}，$1 \le j \le 3$，及每一個如此的元素皆乘上兩項，我們求出一個和。

1) $(-1)^{1+j}$，其中的指數 $1+j$ 為元素 a_{1j} 所在位置的列數與行數之總和，
2) 它的結合子式 M_{1j}。]

b) 讀者可能會詫異，為何行列式的第一列是如此的特別。因為假設我們利用行列式第三行展開 (a) 部份的行列式。這一個展開式的答案為

$$\sum_{i=1}^{3} a_{i3}(-1)^{i+3}M_{i3} = (-7)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$$
$$= (-7)(3\cdot 6 - 8\cdot 5) - 2(2\cdot 6 - 4\cdot 5) + 0(2\cdot 8 - 4\cdot 3)$$
$$= (-7)(-22) - 2(-8) = 170.$$

c) (a) 和 (b) 中所發生的不僅是巧合。一般而言，對任何一個 3×3 矩陣 A，A 的行列式可以延著任何一 (固定) 列或任何一 (固定) 行展開而計算出。且這個方法，可以擴展到更高階的方陣——即，對 $n \in \mathbf{Z}^+$，$n \ge 4$，$n\times n$ 階行列式，可以延著它們任何一列或任何一行展開，變成為 n 項被加數的加法展開式，且每一項被加數皆含有 $(n-1)\times(n-1)$ 行列式。

若 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 其中 $n \ge 3$，則

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij} \text{ [沿 (固定) 第 } i \text{ 列之展開式]}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij} \text{ [沿 (固定) 第 } j \text{ 行之展開式]}$$

d) 由 (c) 部份，我們瞭解到若矩陣 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，對任何 $n \ge 3$，則若矩陣 A 有一列或一行的每一個元素皆為 0，則 A 的行列式 A 為 0 。

參考資料

在這附錄中，所呈現的概念 (及其對應的習題) 已經足夠去解決下文中的矩陣與行列式之問題。若讀者想要學得更多這方面的數學知識，可以參考下面任何一本著作。

1. Anton, Howard, and Rorres, Chris. *Elementary Linear Algebra with Applications*. New York: Wiley, 1987.
2. Lay, David C. *Linear Algebra and Its Applications,* 3rd ed. Boston Mass.: Addison-Wesley, 2003.
3. Strang, Gilbert. *Linear Algebra and Its Applications*, 3rd ed. San Diego, Calif.: Harcourt Brace Jovanovich, 1988.

習題 A.2

1. 令 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ 且 $C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & -3 \end{bmatrix}$。求下列各題。

   a) $A+B$　　b) $(A+B)+C$
   c) $B+C$　　d) $A+(B+C)$
   e) $2A$　　f) $2A+3B$
   g) $2C+3C$　　h) $5C\ (=(2+3)C)$
   i) $2B-4C\ (=2B+(-4)C)$
   j) $A+2B-3C$
   k) $2(3B)$　　l) $(2.3)B$

2. 求 a，b，c，d 的解，若
$$3\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+4\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. 計算下列各矩陣乘積。

   a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

   d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 6 \\ 7 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

   e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

   f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

4. 令 $A=\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$，且 $C=\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -2 & -7 & 6 \end{bmatrix}$。證明 (a) $AB+AC=A(B+C)$；且 (b) $BA+CA=(B+C)A$。

   [一般而言，若 A 為 $m\times n$ 矩陣，B，C 皆為 $n\times p$ 矩陣，則 $AB+AC=A(B+C)$。對於 $n\times p$ 矩陣 B 與 C 及 $p\times q$ 矩陣 A，亦可推得 $BA+CA=(B+C)A$。這兩個結果稱為**矩陣乘法對矩陣**

加法的分配律。]

5. 若下列各矩陣的反矩陣存在，則求各矩陣的反矩陣？

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$　　b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$　　d) $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

6. 解下列各矩陣方程的 2×2 矩陣 A。

a) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} A - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

7. 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 且 $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$，求下列各項。

a) A^{-1}　　b) B^{-1}　　c) AB

d) $(AB)^{-1}$　　e) $B^{-1}A^{-1}$

8. 計算下列各 2×2 行列式。

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$　　b) $\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 15 & 4 \end{vmatrix}$　　d) $\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{vmatrix}$

9. 利用矩陣解下列各線性方程組。

a) $3x-2y=5$　　b) $5x+3y=35$
　$4x-3y=6$　　　$3x-2y=2$

10. 令 a，b，c，$d \in \mathbf{R}$ 且 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 7$。計算下列各項的值。

a) $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ c & d \end{vmatrix}$　　b) $\begin{vmatrix} 3a & b \\ 3c & d \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{vmatrix}$　　d) $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{vmatrix}$

11. 令 A 為 2×2 矩陣且 $\det(A)=31$。求 $\det(2A)$ 與 $\det(5A)$ 之值。

12. 依照給定的列與行，展開下列各個行列式。

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$，第二列與第三行

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix}$，第一列與第二行

13. 延著任何一列或任何一行，展開下列各個行列式。

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 6 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$　　b) $\begin{vmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

14. a) 計算下列各 3×3 行列式。

i) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$　　ii) $\begin{vmatrix} a & d & a \\ b & e & b \\ c & f & c \end{vmatrix}$

iii) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$　　iv) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix}$

b) 敘述一個由 (a) 之答案所建議的一般結果。

15. a) 計算下列各 3×3 行列式。

ⅰ) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$　　ⅱ) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 10 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

ⅲ) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -5 \\ 10 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

b) 令 a，b，c，d，e，f，g，h，$i \in \mathbf{R}$，若

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 17$，計算

i) $\begin{vmatrix} 3a & b & c \\ 3d & e & f \\ 3g & h & i \end{vmatrix}$ ii) $\begin{vmatrix} 3a & b & 2c \\ 9d & 3e & 6f \\ 3g & h & 2i \end{vmatrix}$

iii) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3d & 3e & 3f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix}$

16. 令矩陣 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 且矩陣 $B=(b_{ij})_{m\times n}$。當矩陣乘積 AB 被寫成如定義 A2.5 之形式時，則有多少個 (元素) 乘法被執行？有多少個 (元素積) 加法被執行？

附 錄 3

可數及不可數集

在 3.1 節例題 3.2 中，我們已經非正式地提到有限集合與無限集合。在最後的附錄中，我們用更嚴格的方式討論這些問題，且把重點放在討論 $|A|$ (集合 A 的基數) 的意義上，當 A 是一個無限集合時。為了更精確的發展這些概念，讓我們再回憶 5.6 節被介紹的概念。

定義 A3.1

對任意非空集合 A，B，若函數 f 同時為一對一與映成，則函數 $f: A \to B$ 稱是**一對一對應** (one-to-one correspondence)。

例題 A3.1

令 $A = \mathbf{Z}^+$ 與 $B = 2\mathbf{Z}^+ = \{2k | k \in \mathbf{Z}^+\} = \{2, 4, 6, \cdots\}$。函數 $f: A \to B$，定義為 $f(x) = 2x$，是一個一對一對應。

1) 對 a_1，$a_2 \in A$，我們推得 $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow 2a_1 = 2a_2 \Rightarrow a_1 = a_2$，所以函數 f 為一對一函數。
2) 若 $b \in B$，則 $b = 2a$，對某個 (唯一) $a \in A$，且 $f(a) = 2a = b$，所以函數 f 為映成。

例題 A3.1 的結果引導我們去考慮下列的定義。

定義 A3.2

若集合 A，B 均為非空的集合，我們稱集合 A 與集合 B 有相同**大小** (size) 或**基數** (cardinality)，記作 $A \sim B$，若存在一個一對一對應 $f: A \to B$。

從例題 A3.1，我們瞭解到集合 $\mathbf{Z}^+$ 與集合 $2\mathbf{Z}^+$ 具有相同的大小，雖然

集合 $2\mathbf{Z}^+$ 的元數似乎比集合 $\mathbf{Z}^+$ 的元數少——畢竟，我們知道 $2\mathbf{Z}^+ \subset \mathbf{Z}^+$。

若我們定義函數 $g: B \to A$ (對 $B = 2\mathbf{Z}^+$ 且 $A = \mathbf{Z}^+$) 為 $g(2k) = k$，則

1) $g(2k_1) = g(2k_2) \Rightarrow k_1 = k_2 \Rightarrow 2k_1 = 2k$，確立了函數 g 為一對一。
2) 對所有 $k \in A$，我們有 $2k \in B$ 且 $g(2k) = k$，所以函數 g 為一個映成函數。

因此，函數 g 為一個一對一對應且 $B \sim A$。

所以至少在 $A = \mathbf{Z}^+$ 及 $B = 2\mathbf{Z}^+$ 的情形中，我們發現了 $A \sim B$ 且 $B \sim A$ (雖然 $B \subset A$)。對於函數 g，實際可視為在例題 A3.1 中之函數 f 的反函數 f^{-1}。且我們由定理 5.8 學得，一個函數是可逆的若且唯若此函數必為一對一且映成。因此，當存在兩集合 A，B 且 $A \sim B$，則由定理 5.8 可推得 $B \sim A$，所以我們可以說集合 A 與集合 B **有相同的基數**，且記作 $|A| = |B|$。(註：它不須由 $A = B$ 推得。)

讓我們考慮另一個例題。

例題 A3.2 對 $B = 2\mathbf{Z}^+ = \{2k | k \in \mathbf{Z}^+\}$ 且 $C = 3\mathbf{Z}^+ = \{2k | k \in \mathbf{Z}^+\}$，函數 $h: B \to C$，定義為 $h(2k) = 3k$，則函數 h 是集合 B 與集合 C 之間的一個一對一對應。因此我們推得 $B \sim C$ (且 $C \sim B$ 且 $|B| = |C|$)。進一步而言，若使用例題 A3.1 中的函數 $f: A \to B$，此時 $A = \mathbf{Z}^+$，和定理 5.5 的結論，我們得知 $h \circ f: A \to C$ 亦為一個一對一對應。所以 $A \sim C$ (且 $C \sim A$) 且 $|A| = |C|$。

我們已經學會這個概念，我們可以由下列的結果做出總結。

定理 A3.1 對所有非空集合 A，B，C，

a) $A \sim A$；
b) 若 $A \sim B$，則 $B \sim A$；且
c) 若 $A \sim B$ 且 $B \sim C$，則 $A \sim C$。

證明：

a) 給任意一非空集合 A，因為恆等函數 $1_A: A \to A$ 為一對一對應函數，所以推得 $A \sim A$。
b) 若 $A \sim B$，則存在一個一對一對應 $f: A \to B$。且可推得 $f^{-1}: B \to A$ 亦是一個一對一對應，且我們有 $B \sim A$。
c) 因為 $A \sim B$ 且 $B \sim C$，所以存在兩個一對一對應 $f: A \to B$ 且 $g: B \to C$。因為 $g \circ f: A \to C$ 亦為一個一對一對應，所以亦可推得 $A \sim C$。

我們將使用目前所發展的概念來定義所謂的有限集合及無限集合。

定義 A3.3

任何一個集合 A，若 $A=\emptyset$ 或若 $A\sim\{1, 2, 3, \cdots, n\}$，對某一個 $n\in\mathbf{Z}^+$，則稱集合 A 為有限集合。當 $A=\emptyset$，我們稱集合 A 沒有任何元素，且 $|A|=0$。在下一個例題，我們稱 A 有 n 個元素，且 $|A|=n$。若集合 A 不是有限集合，則稱它為**無限** (in finite) 集合。

由這個定義，我們瞭解到若 A 為一個非空有限集合，則存在一個一對一對應 $g:\{1, 2, 3, \cdots, n\}\to A$，對某一個 $n\in\mathbf{Z}^+$。這個函數 g 提供了一列 A 的元素為 $g(1)$，$g(2)$，$\cdots$，$g(n)$ ——此列表，我們可以描述為，第一個元素，第 2 個元素，$\cdots$，此以類推到第 n 個元素。

同樣地，若集合 A 為一無限集合，則我們無法找到一個 n，$n\in\mathbf{Z}^+$，其中我們可找到一個一對一對應 $f:A\to\{1, 2, 3, \cdots, n\}$。但是若集合 A 與 B 皆為無限集合，我們是否可以自動地推斷出 $|A|=|B|$ ——即，存在一個介於 A 與 B 的一對一對應函數？這是我們將回答的問題，在負的方面，當我們繼續討論時。現在，我們介紹下面的概念。

定義 A3.4

若 (1) 集合 A 為有限集合或 (2) $A\sim\mathbf{Z}^+$，則稱集合 A 為**可數集** (countable) (**可計算的** (denumberable))。

因為 $\mathbf{Z}^+\sim\mathbf{Z}^+$，且我們已見到 $2\mathbf{Z}^+\sim\mathbf{Z}^+$ 且 $3\mathbf{Z}^+\sim\mathbf{Z}^+$，故可推得集合 $\mathbf{Z}^+$，$2\mathbf{Z}^+$，與 $3\mathbf{Z}^+$ 均為可數集。事實上，對所有 $k\in\mathbf{Z}$，$k\neq 0$，函數 $f:\mathbf{Z}^+\to k\mathbf{Z}^+$，定義為 $f(x)=k(x)$，為一個一對一對應，所以，$k\mathbf{Z}^+$ 為可數集 (且 $|k\mathbf{Z}^+|=|\mathbf{Z}^+|$)。因此，所有負整數所形成的集合——即 $(-1)\mathbf{Z}^+$，——為一可數集。

更而，當集合 A 為無限集合且 $A\sim\mathbf{Z}^+$，則我們亦有 $\mathbf{Z}^+\sim A$，所以存在一個一對一對應 $f:\mathbf{Z}^+\to A$，提供了集合 A 中元素的一列表——稱為 $f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$\cdots$——且在這表示式中，我們可以把集合 A 的元素一個個地數下去 (但無法數完)。

最後，從上面的敘述知道，當 $A\sim\mathbf{Z}^+$ 時，則 $\mathbf{Z}^+\sim A$。因此，我們可藉由找到一個一對一對應 $f:A\to\mathbf{Z}^+$ 或一個一對一對應 $g:\mathbf{Z}^+\to A$，去證得集合 A 為一可數無限集。(即，同時為可數且無限的。)

例題 A3.3

因為 $\mathbf{Z}^+$，$(-1)\mathbf{Z}^+$，與 $\{0\}$ 皆為可數集，則 $\mathbf{Z}=\mathbf{Z}^+\cup(-1)\mathbf{Z}^+\cup\{0\}$ 是否為可數集？

考慮函數 $f: \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{Z}$，它定義為

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & \text{對 } x \text{ 為偶數} \\ -(x-1)/2, & \text{對 } y \text{ 為奇數} \end{cases}$$

在這我們發現了，舉例來說，

$$f(4) = 4/2 = 2 \text{ 且 } f(3) = -(3-1)/2 = -2/2 = -1.$$

我們要求 f 為一個一對一對應，其中 $f(2\mathbf{Z}^+) = \mathbf{Z}^+$ 且 $f(\mathbf{Z}^+ - 2\mathbf{Z}^+) = (-1)\mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$。假設 a，$b \in \mathbf{Z}^+$ 且 $f(a) = f(b)$。

1) 若 a，b 皆為偶數，則 $f(a) = f(b) \Rightarrow a/2 = b/2 \Rightarrow a = b$。
2) 若 a，b 皆為奇數，則 $f(a) = f(b) \Rightarrow -(a-1)/2 = -(b-1)/2 \Rightarrow a-1 = b-1 \Rightarrow a = b$。
3) 若 a 為偶數且 b 為奇數，則 $f(a) = f(b) \Rightarrow a/2 = -(b-1)/2 \Rightarrow a = -b+1 \Rightarrow a-1 = -b$，且 $a-1 \geq 1$ 且 $-b < 0$。所以這個狀況是不可能發生的。另一個狀況 a 為奇數且 b 為偶數亦不可能發生。

因此，函數 f 至少是一對一。

進一步來說，對所有 $y \in \mathbf{Z}$，

1) 若 $y = 0$，則 $f(1) = 0$；
2) 若 $y > 0$，則 $2y \in \mathbf{Z}^+$ 且 $f(2y) = 2y/2 = y$；且
3) 若 $y < 0$，則 $-2y+1 \in \mathbf{Z}^+$ 且 $f(-2y+1) = -[(-2y+1)-1]/2 = -(-2y)/2 = y$。

所以函數 f 亦是一映成函數，因此函數 $f: \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{Z}$ 為一個一對一對應。所以 $\mathbf{Z}$ 為可數集。

雖然我們所舉的所有可數無限集的例子皆為 $\mathbf{Z}$ 的子集合，但亦有其它的可數無限集。

例題 A3.4

令 $A = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \cdots\} = \{1/n | n \in \mathbf{Z}^+\}$。函數 $f: \mathbf{Z}^+ \to A$ 定義為 $f(n) = 1/n$ 建立 $\mathbf{Z}^+$ 與集合 A 之間的一個一對一對應。所以 $|\mathbf{Z}^+| = |A|$ 且集合 A 為可數集。

為了進一步發展可數集的概念，我們現在介紹下面的定義。

定義 A3.5

對 $n \in \mathbf{Z}^+$，若把 ***n* 項的有限序列** (finite sequence of n terms) 視為一個定義域為 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 的函數 f，此一序列經常被寫成為一個**有序**

(ordered) 集合 $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$，其中 $x_i = f(i)$，對所有 $1 \le i \le n$。

一個**無限序列** (infinite sequence) 可視為一個定義域為 $\mathbf{Z}^+$ 的函數 g。此序列的形式可被寫成為一個**有序** (ordered) 集合 $\{x_i\}_{i \in \mathbf{Z}^+}$ 或 $\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$，其中 $x_i = g(i)$，對所有 $i \in \mathbf{Z}^+$。

例題 A3.5

a) 集合 $\{1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16\}$ 可被認為一有限序列——由函數 $f: A \to \mathbf{Q}^+$ 給之，其中 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 且 $f(n) = 2^{-n+1}$。

b) 在例題 A3.4 中的集合 A 亦可被寫成 $\{1/n\}_{n \in \mathbf{Z}^+}$——一個由函數 $g: \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{Q}$ 給之的無限序列，$g(n) = 1/n$，對每一個 $n \in \mathbf{Z}^+$。

c) 一序列的項不需要不相同。例如，令 $f: \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{Z}$，此時 $x_n = f(n) = (-1)^{n+1}$，對所有正整數 n，則 $\{x_n\}_{n \in \mathbf{Z}^+} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \cdots\} = \{1, -1, 1, -1, 1, \cdots\}$，但函數 f 的值只為 $\{1, -1\}$ 兩元素。

下列的結論是結合定義 A3.4 與 A3.5 的概念。

定理 A3.2

若集合 A 為一非空的可數集，則集合 A 可被寫成為一個不同元素的序列。

證明：考慮下列兩種情況：

1) 若集合 A 為有限集合，則 $A \sim \{1, 2, 3, \cdots, n\}$(且 $\{1 ,2, 3, \cdots, n\} \sim A$)，對某一個 $n \in \mathbf{Z}^+$。所以存在一個一對一對應 $f:\{1, 2, 3, \cdots, n\} \to A$。

   定義為 $a_i = f(i)$，對所有 $1 \le i \le n$。則，因為函數 f 為一對一且映成，故 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$ 為集合 A 的 n 個不同元素以形成之序列。

2) 若集合 A 為無限集合，則存在一個一對一對應函數 $g: \mathbf{Z}^+ \to A$。

   定義為 $a_i = g(i)$，對所有 $i \in \mathbf{Z}^+$。因為函數 g 為一對一，所以序列 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ 有無限多項，且因為函數 g 為映成，所以 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\} = A$。

由前面的討論，我們知道 $\mathbf{Z}^+$ 為可數集，且它的子集合 $2\mathbf{Z}^+$，$3\mathbf{Z}^+$ 亦皆為可數集。這一結論使我們聯想到一個可數集的子集合可能為可數集。為了討論此一可能性，我們介紹下面二個概念。

定義 A3.6

1) 若對所有 $i \in \mathbf{Z}^+$，$a_i \in \mathbf{Z}^+$ 且 $a_i < a_i + 1$，則無窮序列 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\} = \{a_i\}_{i \in \mathbf{Z}^+}$ 為 $\mathbf{Z}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$ 的一個**子序列** (subsequence)。

2) 令 $\{x_n\}_{n \in \mathbf{Z}^+}$ 且 $\{y_n\}_{n \in \mathbf{Z}^+}$ 為兩無窮序列。若存在一個 $\mathbf{Z}^+$ 的子序列 $\{a_k\}_{k \in \mathbf{Z}^+}$，其中對每一個 $k \in \mathbf{Z}^+$，我們有 $y_k = x_{a_k}$，則 $\{y_n\}_{n \in \mathbf{Z}^+}$ 為

$\{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ 的一個子序列。

例題 A3.6

a) $\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$ 為 $\mathbf{Z}^+$ 的一個子序列，$\{1, 2, 4, 7, 11, 16, \cdots\}$ 亦為 $\mathbf{Z}^+$ 的一個子序列。第一個子序列可以被寫成函數 $f: \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{Z}^+$，此時 $a_n = f(n) = 2n-1$。第二個子序列，可由

1) $c_1 = h(1) = 1$；
2) $c_{n+1} = h(n+1) = h(n) + n = c_n + n$，且 $n \geq 1$。
遞迴產生。

b) 令 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ 且 $\{y_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ 為序列，此時對每一 $n \in \mathbf{Z}^+$，$x_n = f(n) = (-1)^n + (1/n)$ 且 $y_n = g(n) = 1 + (1/(2n))$。所以 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+} = \{0, 3/2, -2/3, 5/4, -4/5, 7/6, -6/7, 9/8, \cdots\}$ ——且 $\{y_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+} = \{3/2, 5/4, 7/6, 9/8, \cdots\}$ ——且對所有 $n \in \mathbf{Z}^+$，$y_n = x_{2n}$。對子序列 $\{a_k\}_{k\in\mathbf{Z}^+}$ ($\mathbf{Z}^+$ 的子序列)，此時，對每一個 $k \in \mathbf{Z}^+$，$a_k = 2k$，我們發現，對每一個 $n \in \mathbf{Z}^+$，$y_n = x_{2n} = x_{an}$ —— 且這證明了 $\{y_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ 為 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ 的一個子序列。

c) 對 $n \in \mathbf{Z}^+$，令 $x_n = 1/n$ 且令 $y_n = 1/(3n)$。則 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+} = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, \cdots\}$ 且 $\{y_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+} = \{1/3, 1/6, 1/9, \cdots\}$。現在考慮子序列 $\{a_k\}_{k\in\mathbf{Z}^+}$ ($\mathbf{Z}^+$ 的子序列)，其中對每一 $k \in \mathbf{Z}^+$，$a_k = 3k$。則對所有 $n \in \mathbf{Z}^+$，$y_n = 1/(3n) = x_{3n} = x_{a_n}$，所以 $\{y_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ 為 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ 的每一個子序列。

現在，我們轉向討論下面有關可數集與其子集合的結論。

定理 A3.3 若 S 為一個無限可數集且 $A \subseteq S$，則集合 A 為可數集。

證明：若集合 A 為有限，由定義 A3.4 知，集合 A 為可數集，所以假設集合 A 為無限集，因為集合 S 為可數集。我們可以利用定理 A3.2 的結論，將集合 S 寫成為每一項均不相等的無窮序列——所以我們寫成 $S = \{s_1, s_2, s_3, \cdots\}$。現在我們定義一個 $\mathbf{Z}^+$ 的子序列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$，如下：

$a_1 = \min\{n | n \in \mathbf{Z}^+，且\ s_n \in A\}$
$a_2 = \min\{n | n \in \mathbf{Z}^+，n > a_1\ 且\ s_n \in A\}$
$a_3 = \min\{n | n \in \mathbf{Z}^+，n > a_2\ 且\ s_n \in A\}$

一般而言，a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_t 皆已經被選定了，我們定義 $a_{t+1} = \min\{n | n \in \mathbf{Z}^+，n > a_t\ 且\ s_n \in A\}$。考慮函數 $F: \mathbf{Z}^+ \to A$，給定為 $F(n) = s_{a_n}$。若 m，$n \in \mathbf{Z}^+$，我們推得 $m = n \Rightarrow a_m = a_n \Rightarrow s_{a_m} = s_{a_n} \Rightarrow F(m) = F(n)$，所以

F 必為一個函數。為了證出集合 A 為一可數集，所以我們需要證出函數 F 為一對一對應。

假設 m，$n \in \mathbf{Z}^+$，且 $F(m)=F(n)$。則因為序列 $S=\{s_1, s_2, s_3, \cdots\}$ 的元素皆不相同，所以 $F(m)=F(n) \Rightarrow s_{a_m}=s_{a_n} \Rightarrow a_m=a_n$。再者，因為 $\mathbf{Z}^+$ 的子序列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ 之元素亦皆不相同，所以 $a_m=a_n \Rightarrow m=n$。因此，函數 F 為一對一。

現在，令 $b \in A$。因為 $A \Rightarrow S=\{s_1, s_2, s_3, \cdots\}$，我們可以寫 $b=s_m$，對某一個 $m \in \mathbf{Z}^+$。若 $m=a_1$，則 $F(1)=s_{a_1}=s_m=b$。若 $m\neq a_1$，則因為 $a_1<a_2<a_3<\cdots$，所以存在一個最小 $r \in \mathbf{Z}^+$ 使得 $a_{r-1}< m \leq a_r$。由子序列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ 的定義，我們知道 $a_r=\min\{t|t \in \mathbf{Z}^+，t>a_{r-1}$ 且 $s_t \in A\}$ ——且因為 $m>a_{r-1}$ 且 $s_m \in A$，我們推得 $a_r \leq m$。現在 $a_r \leq m$ 且 $m \leq a_r \Rightarrow a_r=m$，且所以 $F(r)=s_{a_r}=s_m=b$。因此，函數 F 亦為映成。

由定理 A3.3，我們推論出給定一個無限集合 T 若且唯若集合 T 與 $\mathbf{Z}^+$ 的子集合具有相同的基數。所以若存在一個一對一的函數 $f: T\to\mathbf{Z}^+$ (不須為一對一對應)，則此條件已足夠告訴我們集合 T 為可數集——所以 $T\sim f(T)$ (或 $|T|=|f(T)|$ 且 $f(T)$ 為可數集。

對於無限集合的概念，我們已經知道如何去審察那些是可數集。但是是否全部的無限集合皆為可數集？——且對所有無限集合 A，B，是否皆有 $|A|=|B|$？下面我們討論這一問題？

定理 A3.4　集合 $(0, 1]=\{x|x \in \mathbf{R}$ 且 $0 < x \leq 1\}$ 是一個不可數集。

證明：若 $(0, 1]$ 是可數集，則 (由定理 A3.2) 我們可將 $(0, 1]$ 寫成為每一項均不相同的序列。$(0,1]=\{r_1, r_2, r_3, \cdots\}$。我們把區間 $(0, 1]$ 上的實數寫成小數的形式，且沒有一個小數的擴張是可以終止的。故將 r_1，r_2，r_3，$\cdots$，寫成像如此的小數形式

$$\begin{aligned}
r_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\cdots\\
r_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\cdots\\
r_3 &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\cdots\\
&\ \vdots\\
r_n &= 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}\cdots\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

此時 $a_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, 8, 9\}$，對所有 i，$j \in \mathbf{Z}^+$。

現在考慮實數 $r=0.b_1b_2b_3\cdots$，此時每一個 $k \in \mathbf{Z}^+$，

$$b_k = \begin{cases} 3, & 若\ a_{kk} \neq 3 \\ 7, & 若\ a_{kk} = 3. \end{cases}$$

則 $r \in (0, 1)$，但是對每一個 $k \in \mathbf{Z}^+$，我們推得 $r \neq r_k$，所以 $r \Rightarrow \{r_1, r_2, r_3, r_4, \cdots\}$。此與我們的假設 $(0, 1] = \{r_1, r_2, r_3, r_4, \cdots\}$ 互為矛盾。

(定理 A3.4) 證明裡所引用的技巧是著名的 Cantor **對角建構法** (Cantor's Diagonal Construction) 以紀念 (俄羅斯出生的) 德國數學家 Georg Cantor (1845-1918)，他於 1873 年 12 月提出此概念。

當一個集合不為可數集，則稱它為**不可數集** (uncountable)。所以 $(0, 1]$ 是不可數集。若集合 A 為不可數集，則 (1) $\mathbf{Z}^+$ 和集合 A 沒有相同的基數，所以 $\mathbf{Z}^+ \nsim A$ 且 A 的基數大於 $\mathbf{Z}^+$ 的基數——即 $|A| > |\mathbf{Z}^+|$，雖然集合 A 與 $\mathbf{Z}^+$ 均為無限集合。

下面的系理規定了另一個不可數的集合。

系理 A3.1 集合 $\mathbf{R}$ (所有實數的集合) 是一個不可數的集合。

證明：若 $\mathbf{R}$ 為可數集，則由定理 A3.3 得知，那 $\mathbf{R}$ 的子集合 $(0, 1]$ 為可數集。

在繼續任何新的概念前，讓我們說明更多不可數集的觀念。

1) 首先，我們瞭解到系理 A3.1 是一般的結論中的特殊情況——對所有集合 A 與集合 B，若集合 A 為不可數集且 $A \subseteq B$，則集合 B 為不可數集。
2) 我們無法想像定理 A3.3 推得到結論——“一個不可數集的非空子集還是不可數集”。我們甚至可推得到一個不可數集 B 的無限子集 A 為可數集——例如，令 $A = \mathbf{Z}$ 且 $B = \mathbf{R}$。
3) 由定理 A3.3，我們推論到若在集合上，可以找到一個一對一的函數 $f: A \to \mathbf{Z}^+$，則集合 A 必為可數集。但是我們不能顛倒集合 A 與 $\mathbf{Z}^+$ 的角色。若存在一個一對一函數 $g: \mathbf{Z}^+ \to A$，則集合 A 可能為不可數集。例如，考慮函數 $g: \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$，此時的 $g(x) = x$，對所有 $x \in \mathbf{Z}^+$。
4) 考慮在 Cartesian 平面上之單位圓 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 的點。集合 $S = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}$ 且 $x^2 + (y-1)^2 = 1\}$ 是有多大？——即，集合 S 為可數集或不可數集？

在圖 A3.1，我們有一個以點 $C(0, 1)$ 為中心的單位圓。而實數軸 (x-

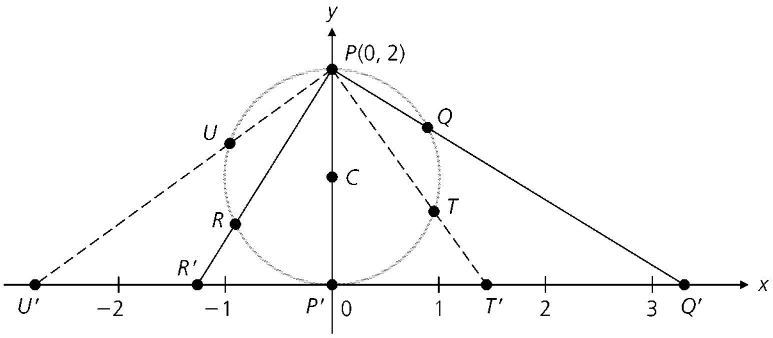

圖 A3.1

軸) 與此圓切於 $x=0$ 的點。且點 P 的座標為 $(0, 2)$。

令 (x, y) 為此單位圓之圓周上的任何一點，但不為點 $P(0, 2)$。例如，點 Q 為如此的點，且 R 為另一點。畫出 P，Q 兩點的連線，此直線與 x-軸交於 Q'。相同的方式，P，R 兩點的連線交於 x- 軸於點 R'。相反地，考慮 x-軸上的點——除了 $x=0$ 的點。T' 與 U' 為如此的點。通過點 P 與點 T' 的直線與圓相交於 T。點 U 為點 P 與 U' 的連線與此圓的交點。最後，點 P 對應於點 P'。利用這個方法，我們在集合 S 與 $\mathbf{R}$ 之間得到了一個一對一對應。所以 $|S|=|\mathbf{R}|$，所以 S 為另一個不可數集。

概括我們現在所知道的 $|\mathbf{Z}|$ 與 $|\mathbf{R}|$ ——即 $|\mathbf{Z}|<|\mathbf{R}|$ ——我們現在想決定 $|\mathbf{Q}|=|\mathbf{Z}|$ 或 $|\mathbf{Q}|=|\mathbf{R}|$ 或，或許 $|\mathbf{Z}|<|\mathbf{Q}|<|\mathbf{R}|$。為了完成答案，我們將再進一步證明一些結果，我們將開始於下面的推論。

定理 A3.5

集合 $\mathbf{Z}^+\times\mathbf{Z}^+$ 為可數集。

證明：定義函數 $f: \mathbf{Z}^+\times\mathbf{Z}^+\to \mathbf{Z}^+$ 為 $f(a, b)=2^a3^b$。若我們能證得函數 f 為一對一，則得證。利用算術的基本定理，對 (m, n)，$(u, v)\in \mathbf{Z}^+\times\mathbf{Z}^+$，$f(m, n)=f(u, v) \Rightarrow 2^m3^n=2^u3^v \Rightarrow m=u$，$n=v$。因此，函數 f 為一對一且 $\mathbf{Z}^+\times\mathbf{Z}^+$ 為可數集。

在陳述有理數 $\mathbf{Q}$ 的大小或基數之前，我們首先必須去考慮 $\mathbf{Q}$ 的子集合 $\mathbf{Q}\cap(0, 1]=\{s|s\in\mathbf{Q}$ 且 $0< s\le 1\}$。

定理 A3.6

集合 $\mathbf{Q}\cap(0, 1]$ 為可數集。

證明：首先我們必須同意，對每一個 $S\in\mathbf{Q}\cap(0, 1]$，可被改寫成 p/q 的形式，此時 p，$q\in\mathbf{Z}^+$ 且 p，q 除了 1 之外沒有其它的公因數。現在，定義函數 $f: \mathbf{Q}\cap(0, 1]\to\mathbf{Z}^+\times\mathbf{Z}^+$ 為 $f(p/q)=(p, q)$，且令 $K=\text{range } f$。對於

p/q，$u/v \in \mathbf{Q} \cap (0, 1]$，我們發現 $f(p/q) = f(u/v) \Rightarrow (p, q) = (u, v) \Rightarrow p = u$ 且 $q = v \Rightarrow p/q = u/v$，所以函數 f 為一個一對一函數。因此，$\mathbf{Q} \cap (0, 1] \sim K$，可數集 $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$ 的一個子集合。由定理 A3.3，我們可推得集合 $\mathbf{Q} \cap (0, 1]$ 為可數集。

為了繼續努力於去決定 $|\mathbf{Q}|$，則我們將需要下列兩個定義與定理。

定義 A3.7 令 $\mathscr{F}$ 為任意由宇集 $\mathscr{U}$ 上的集合所形成的集族。而 $\mathscr{F}$ 上所有集合的聯集，記作為 $\bigcup_{A\in\mathscr{F}} A$,，定義為 $\{x|x \in \mathscr{U}$ 且 $x \in A$，對某一個 $A \in \mathscr{F}\}$。

當 $\mathscr{F}$ 為可數的集族——即，$\mathscr{F} = \{A_1, A_2, A_3, \cdots\}$ ——我們可以寫成 $\bigcup_{A\in\mathscr{F}} A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbf{Z}^+} A_n$。

例題 A3.7 下列每一個宇集 $\mathscr{F}$ 皆為 $\mathbf{R}$。

a) 對每一個 $n \in \mathbf{Z}^+$，令 $A_n = [n-1, n)$。則，舉例來說，$A_1 = [0, 1)$，$A_2 = [1, 2)$，且 $A_3 = [2, 3)$。對於 $\mathscr{F} = \{A_1, A_2, A_3, \cdots\} = \{A_i \mid i \in \mathbf{Z}^+\}$，我們發現 $\bigcup_{A\in\mathscr{F}} A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbf{Z}^+} A_n = [0, +\infty)$。

b) 給定任何 $q \in \mathbf{Q}^+$，令 $A_q = (q - 1/2, q + 1/2)$。此時，舉例來說，$A_{1/2} = (0, 1)$，$A_4 = (7/2, 9/2)$，且 $A_{11/3} = (19/6, 25/6)$。若 $\mathscr{F} = \{A_q \mid q \in \mathbf{Q}^+\}$，則 $\bigcup_{A\in\mathscr{F}} A = \bigcup_{q\in\mathbf{Q}^+} A_q = (-1/2, +\infty)$。

定義 A3.8 令 $\mathscr{F}$ 為由宇集 $\mathscr{U}$ 上的集合所形成的集族。若 $\mathscr{F}$ 上對有的集合 A，B 當 $A \neq B$ 則 $A \cap B = \emptyset$，則 $\mathscr{F}$ 稱為一個**互斥集族** (disjoint collection)。

例題 A3.8 當我們再檢查例題 A3.7 中的兩個集族，我們發現只有 (a) 部份是唯一不相交的集族。

結合可數集與集合的互斥集族兩概念，推得下列的結論。

定理 A3.7 令 $\mathscr{F}$ 為一個可數個集合所成的互斥集族，且每一個集合均為可數集，則 $\bigcup_{A\in\mathscr{F}}$ 亦為可數集。

證明：因為 $\mathscr{F}$ 為可數個集合所形成的互斥集族，我們表示為 $\mathscr{F} = \{A_1, A_2, A_3, \cdots\}$，此時，對所有 i，$j \in \mathbf{Z}^+$，$i \neq j$，$A_i \cap A_j = \emptyset$。然而，對每一個 $n \in \mathbf{Z}^+$，A_n 為可數集且可表示為 $\{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \cdots\}$，為每一項均不相等的序列。為了證明 $\bigcup_{A\in\mathscr{F}}$ 為可數集，我們考慮每一個 $x \in \bigcup_{A\in\mathscr{F}} A$。

因為 $\bigcup_{A\in\mathscr{F}} A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，我們可推得存在一個 $n \in \mathbf{Z}^+$，使得 $x \in A_n$，且因為 $\mathscr{F}$ 為互斥集族，所以此時的 n 是唯一的。除此之外，$x \in A_n \Rightarrow$ 存在 $k \in \mathbf{Z}^+$，使得 $x = a_{nk}$ (此時的 k 是固定且唯一的)。現在我們定義一個函數 $f\colon \bigcup_{A\in\mathscr{F}} A \to \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$ 為 $f(x) = f(a_{nk}) = (n, k)$。由定理 A3.5，我們得知，$\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$ 為一可數集，所以函數 f 的值域亦為可數集。因此，我們只須再證明函數 f 為一對一函數。其證明如下：若 $x = a_{nk}$，$y = a_{pq} \in \bigcup_{A\in\mathscr{F}} A$ 且 $f(x) = f(y)$，則 $f(a_{nk}) = f(a_{pq}) \Rightarrow (n, k) = (p, q) \Rightarrow n = p$，$k = q \Rightarrow a_{nk} = a_{pq} \Rightarrow x = y$。

若 $\mathscr{F}$ 為有限集族 (且以 $|\mathscr{F}|$ 代替 ∞) 或若有一個或多個集合 A_i，$i \in \mathbf{Z}^+$ 為有限集合，則定理 A3.7 的證明亦是正確的。

由定理 A3.7 的結論，我們現在可以討論有理數 $\mathbf{Q}$ 的基數。

定理 A3.8

有理數集合 $\mathbf{Q}$ 為可數集。

證明：我們開始於回憶起集合 $A_0 = \mathbf{Q} \cap (0, 1]$ 為一個可數集——由定理 A3.6 得知現在對每一個非零整數 n，令 $A_n = \mathbf{Q} \cap (n, n+1]$ 且定義函數 $f_n\colon A_n \to A_0$ 為 $f_n(q) = q - n$。則 $f_n(q_1) = f_n(q_2) \Rightarrow q_1 - n = q_2 - n \Rightarrow q_1 = q_2$，所以 f_n 為一對一函數。因此，$A_n \sim f_n(A_n) \subseteq A_0$，且由定理 A3.3，我們推得 A_n 為可數集。除此之外，對所有 m，$n \in \mathbf{Z}$，$m \neq n \Rightarrow A_m \cap A_n = \emptyset$。由例題 A3.3，我們知道集合 $\mathbf{Z}$ 為可數集，所以 $\mathscr{F} = \{A_0, A_1, A_{-1}, A_2, A_{-2}, \cdots\}$ 為一可數個互不相交之可數集所形成的集族。因此，由定理 3.7 的結論，可推得 $\bigcup_{A\in\mathscr{F}} A = \bigcup_{n\in\mathbf{Z}} A_n = \mathbf{Q}$ 為可數集。

所以，現在我們知道了 $\mathbf{Z}^+$，$\mathbf{Z}$ 與 $\mathbf{Q}$ 均為無限集合且 $\mathbf{Z}^+ \sim \mathbf{Z}^+ \sim \mathbf{Q}$，而 $\mathbf{R}$ 雖然為無限集合，但是 $\mathbf{R} \nsim \mathbf{Z}^+$。若集合 A 為一無限集合且 $A \sim \mathbf{Z}^+$，則我們稱集合 A 為可數無限集——且我們將此集合 A 的基數記作為 $|A| = \aleph_0$，使用希伯萊文 $\aleph$，加上下標 0，表第一層的無限大。$\mathbf{R}$ 的基數大於 $\aleph_0$ 且被表為 c，表**連續** (continum)。

下一個定理將改進定理 A3.7 的結果。下面引理有助於這個改進。

引理 A3.1

令 $\mathscr{F} = \{A_1, A_2, A_3, \cdots\}$ 為任何可數個集合所形成的集族 (來自一個宇集 $\mathscr{U}$)。令 $\mathscr{G} = \{B_1, B_2, B_3, \cdots\}$ 為一可數個集合所形成之集族，此時 $B_1 = A_1$ 且對 $n \geq 2$ 時，$B_n = A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$。則 $\mathscr{G}$ 是一個可數的互斥集族且 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$。

證明：我們首先證明集族 $\mathscr{G}$ 為互斥。即我們必須證明對所有 i，$j \in \mathbf{Z}^+$，$i \neq j$，則我們有 $B_i \cap B_j = \emptyset$。假設此結果不成立，則令 $i<j$ 且 $B_i \cap B_j \neq \emptyset$。對於 $x \in B_i \cap B_j$，我們發現 $x \in B_j = A_j - \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k \Rightarrow x \notin A_i$，因為 $1 \leq i \leq j \leq j-1$。但是它亦可能發生於 $x \in B_i = A_i \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k \Rightarrow x \in A_i$，因為 $A_i - \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k \subseteq A_i$。(註：當 $i=1$，則 $\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k = \emptyset$。) 這是矛盾的——$x \notin A_i$ 且 $x \in A_i$ ——對所有 i，$j \in \mathbf{Z}^+$，$i \neq j$，則 $B_i \cap B_j = \emptyset$。所以 $\mathscr{G}$ 是一個互斥的可數集族。

對於第二部份——即 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ ——開始於 $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$。則對每一個 $n \in \mathbf{Z}^+$，$x \in A_n$ 且令 m 為如此 n 中的最小值。若 $m=1$，則 $x \in A_1 = B_1 \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$。若 $m>1$，則對所有 $1 \leq j \leq m-1$，$x \notin A_j$，且所以 $x \in A_m - \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k = B_m \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$。在任一個情形，$x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ 且 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$。對於反方向的推論我們推得 $y \in \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \Rightarrow y \in B_n$，對某一個 (唯一) $n \in \mathbf{Z}^+ \Rightarrow y \in A_n$，對同一個 $n \in \mathbf{Z}^+$，因為 $B_1 = A_1$ 且 $B_i = A_i - \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k \subseteq A_i$，對所有 $i \geq 2$。則 $y \in A_n \Rightarrow y \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$，所以 $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$。因此，$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$。

在定理 A3.7 的情況中，若集族 $\mathscr{F}$ 為有限的，則引理 A3.1 的證明是正確的 (將證明式子中的 ∞ 取代為 $|\mathscr{F}|$)。

由引理 A3.1，我們學得到定理 A3.7 的假設條件可以降弱——可數集族 $\mathscr{F}$ 不需為互斥。這個推論可以正式在下面被建立。

定理 A3.9 任何可數個可數集的聯集，亦為可數集。

證明：若 $\mathscr{F} = \{A_1, A_2, A_3, \cdots\}$ 為一可數個可數集所形成的集族，我們建立一個如引理 A3.1 的可數的集族 $\mathscr{G} = \{B_1, B_2, B_3, \cdots\}$。對每一個 $k \in \mathbf{Z}^+$，$B_k \subseteq A_k$，所以由定理 A3.3 每一個 B_k 是可數的。由引理 A3.1 我們得知 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$，且由定理 A3.7 我們知道 $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ 亦為可數的。因此 $\bigcup_{A \in \mathscr{F}} A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 為可數集。

再則，若集族 $\mathscr{F}$ 為有限的，則定理 A3.9 的證明仍然有效 (將證明式子中的 ∞ 取代為 $|\mathscr{F}|$)。

在定理 A3.8，我們言及 $|\mathbf{Z}^+| = \aleph_0$ 且 $|\mathbf{R}| = c$，此時 $\aleph_0 < c$。雖然，無限集合仍然還有許多概念可以去探討，但是我們將在這附錄的最後部份證明這些集合不僅為無限個基數，事實上，它們可能有無限多個無限基數。

定理 A3.10 若集合 A 為任一集合，則 $|A| < |\mathscr{P}(A)|$。

證明：若 $A=\emptyset$，則 $|A|=0$ 且 $|\mathcal{P}(A)|=|\mathcal{P}(\emptyset)|=|\{\emptyset\}|$，所在這個情形下，此結論是正確的。若 $A\neq\emptyset$，令函數 $f: A\to\mathcal{P}(A)$，定義為對每一個 $a\in A$，$f(a)=\{a\}$。則函數 f 為一個一對一函數，且亦可推得 $|A|=|f(A)|\leq|\mathcal{P}(A)|$。為了證明 $|A|\neq|\mathcal{P}(A)|$，我們必須證明沒有一個函數 $g: A\to\mathcal{P}(A)$ 可成為一個映成函數。所以令函數 $g: A\to\mathcal{P}(A)$ 且考慮 $B=\{a|a\in A$ 且 $a\notin g(a)\}$。記得 $g(a)\subseteq A$ 且 $B\subseteq A$。利用 $B\in\mathcal{P}(A)$，若函數 g 為一個映成函數，則必存在一個 $a'\in A$ 使得 $g(a')=B$。現在我們必須證明出 $a'\in g(a')$ 或 $a'\notin g(a')$？確實上，這兩個結果中，一定有一個結果是正確地。

若 $a'\in g'(a)=B$，則由集合 B 的定義，我們可得 $a'\notin g(a')$ ——故因為 $a'\in g(a')$ 且 $a'\notin g(a')$，所以得到一個矛盾的結果。另一方面，當 $a'\notin g(a')$，則 $a'\in B$ ——但 $B=g(a')$。再一次，我們得到一個矛盾的結果。

因此，沒有存在一個 $a'\in A$ 使得 $g(a')=B$，所以函數 g 不可能為一個映成函數，故 $|A|<|\mathcal{P}(A)|$。

由定理 A3.10 的結論中，我們可推得沒有存在最大的無限多個基數。對於集合 A 若為無限集合，則 $|A|<|\mathcal{P}(A)|<|\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))|<\cdots$。然而，存在一個最小的無限多個基數。在較早之前我們曾經言及，即為 $\aleph_0$。

參考資料

因為可數集與不可數集仍有許多概念尚未被言及與討論，有興趣的讀者可以參閱下列的參考文獻。

1. Enderton, Herbert B. *Elements of Set Theory*. New York: Academic Press, 1977.
2. Halmos, Paul R. *Naive Set Theory*. New York: Van Nostrand, 1960.
3. Henle, James M. *An Outline of Set Theory*. New York: Springer-Verlag, 1986.

習題 A.3

1. 判斷下列敘述正確與否？對 (d)—(g) 部份，若敘述為錯誤舉一個反例。
   a) 集合 $\mathbf{Q}^+$ 為可數集。
   b) 集合 $\mathbf{R}^+$ 為可數集。
   c) 集合 $\mathbf{N}$ 與 $2\mathbf{Z}=\{2k|k\in\mathbf{Z}\}$ 之間，存在一個一對一對應函數。
   d) 若集合 A 與集合 B 皆為可數集，則 $A\cup B$ 亦為可數集。
   e) 若集合 A 與集合 B 皆為不可數集，則 $A\cap B$ 為不可數集。
   f) 若集合 A 與集合 B 皆為可數集，則 $A-B$ 亦為可數集。
   g) 若集合 A 與集合 B 皆為不可數集，則 $A-B$ 亦為不可數集。

2. a) 令 $A=\{n^2|n \in \mathbf{Z}^+\}$。找集合 $\mathbf{Z}^+$ 與集合 A 之間的一個一對一對應。
   b) 找集合 $\mathbf{Z}^+$ 與 $\{2, 6, 10, 14, \cdots\}$ 之間的一個一對一對應？
3. 令 A 與 B 為兩集合，且集合 A 為不可數集。若 $A \subseteq B$，證明集合 B 亦為不可數集。
4. 令 $I=\{r \in \mathbf{R}|r$ 為無理數$\}=\mathbf{R}-\mathbf{Q}$，則斷言集合 I 為可數或不可數集？
5. 若集合 S 與集合 T 均為無限的可數集，證明集合 $S \times T$ 亦為可數集。
6. 證明集合 $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+=\{(a, b, c)|a, b, c \in \mathbf{Z}^+\}$ 為可數集。
7. 證明二次式 $ax^2+bx+c=0$，a，b，$c \in \mathbf{Z}$，$a \neq 0$ 的所有實數解所形成的集合為一可數集。
8. 決定開區間 (0, 1) 與開區間 (a) (0, 3)；(b) (2, 7)；且 (c) (a, b)，此時 a，$b \in \mathbf{R}$，$a<b$，之間的一個一對一對應。