第 15 章　向量函數的微分與積分

本章學習目標

- 瞭解向量函數極限的意義
- 瞭解如何求向量函數的微分與積分
- 瞭解如何求曲線的曲率與扭率
- 瞭解線積分的意義
- 瞭解線積分與路徑無關的充分條件
- 瞭解格林定理的意義
- 瞭解如何求向量函數的散度與旋度
- 瞭解面積分的意義
- 瞭解散度定理的意義
- 瞭解史托克定理的意義

15-1 向量函數

以前，我們所涉及之函數的值域是由純量組成，這樣的函數稱爲**純量值函數**，或簡稱爲**純量函數**；現在，我們需要*考慮值域是由二維空間 $\mathbb{R}^2$ 或三維空間 $\mathbb{R}^3$ 中的向量組成的函數，這種函數稱爲***向量值函數**，*或簡稱爲***向量函數**。在三維空間 $\mathbb{R}^3$ 中，單變數 t 的向量函數 $\mathbf{F}(t)$ 可表成

$$\mathbf{F}(t)=<f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t)>=f_1(t)\mathbf{i}+f_2(t)\mathbf{j}+f_3(t)\mathbf{k}$$

的形式，此處 $f_1(t)$，$f_2(t)$ 與 $f_3(t)$ 皆爲 t 的實值函數，這些實值函數爲 $\mathbf{F}$ 的**分量函數**或**分量**。同樣，在三維空間 $\mathbb{R}^3$ 中，三變數 x，y 及 z 的向量函數 $\mathbf{F}(x,\ y,\ z)$ 可表成

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x,\ y,\ z)&=<f_1(x,\ y,\ z),\ f_2(x,\ y,\ z),\ f_3(x,\ y,\ z)>\\&=f_1(x,\ y,\ z)\mathbf{i}+f_2(x,\ y,\ z)\mathbf{j}+f_3(x,\ y,\ z)\mathbf{k}\end{aligned}$$

純量函數的極限觀念可適用於向量函數。

定義 15.1

$\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{F}(t)=\mathbf{L}$ 的意義如下：

對每一正數 ε，皆可找到一正數 δ，使得若 $0<|t-t_0|<\delta$ 時，則 $|\mathbf{F}(t)-\mathbf{L}|<\varepsilon$。

定義 15.2

若 $\mathbf{F}(t)=f_1(t)\mathbf{i}+f_2(t)\mathbf{j}+f_3(t)\mathbf{k}$，則定義

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0}\mathbf{F}(t)&=\lim_{t\to t_0}[f_1(t)\mathbf{i}+f_2(t)\mathbf{j}+f_3(t)\mathbf{k}]\\&=[\lim_{t\to t_0}f_1(t)]\mathbf{i}+[\lim_{t\to t_0}f_2(t)]\mathbf{j}+[\lim_{t\to t_0}f_3(t)]\mathbf{k}\end{aligned}$$

其中假設 $\lim\limits_{t\to t_0}f_i(t)$ 存在，$i=1$，2，3。

【例題 1】 利用定義15.2

若 $\mathbf{F}(t)=(2+t^2)\mathbf{i}+(te^{-t})\mathbf{j}+\dfrac{\sin t}{t}\mathbf{k}$，求 $\lim\limits_{t\to 0}\mathbf{F}(t)$。

【解】　$\lim\limits_{t\to 0}\mathbf{F}(t)=[\lim\limits_{t\to 0}(2+t^2)]\mathbf{i}+(\lim\limits_{t\to 0}te^{-t})\mathbf{j}+\left(\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}\right)\mathbf{k}=2\mathbf{i}+\mathbf{k}$.

定義 15.3

若 $\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{F}(t)=\mathbf{F}(t_0)$，則稱 $\mathbf{F}(t)$ 在 t_0 為連續.

$\mathbf{F}(t)=f_1(t)\mathbf{i}+f_2(t)\mathbf{j}+f_3(t)\mathbf{k}$ 在 t_0 為連續，若且唯若 $f_1(t)$、$f_2(t)$ 與 $f_3(t)$ 在 t_0 皆為連續. 若 $\mathbf{F}(t)$ 在某區間各點皆連續，則稱它在該區間為連續.

【例題 2】　利用各分量函數的連續性

(1) 函數 $\mathbf{F}(t)=\cos t\mathbf{i}+\sin t\mathbf{j}+t\mathbf{k}$ 為處處連續，因為 $\cos t$、$\sin t$ 與 t 皆為處處連續.

(2) 函數 $\mathbf{G}(t)=\cos t\mathbf{i}+\sin t\mathbf{j}+[\![t]\!]\mathbf{k}$ 在 t 為整數時不連續.

定義 15.4

若極限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{F}(t+\Delta t)-\mathbf{F}(t)}{\Delta t}$$

存在，則稱此極限為 $\mathbf{F}(t)$ 的**導向量**，記為 $\mathbf{F}'(t)$，或記為 $\dfrac{d}{dt}\mathbf{F}(t)$，而 $\mathbf{F}(t)$ 稱為**可微分**.

定理 15.1

若 $\mathbf{F}(t)=\langle f_1(t), f_2(t), f_3(t)\rangle=f_1(t)\mathbf{i}+f_2(t)\mathbf{j}+f_3(t)\mathbf{k}$，此處 f_1，f_2 與 f_3 皆為可微分函數，即

$$\mathbf{F}'(t)=\langle f'_1(t), f'_2(t), f'_3(t)\rangle=f'_1(t)\mathbf{i}+f'_2(t)\mathbf{j}+f'_3(t)\mathbf{k}$$

證　利用定義 15.4，知

$$\mathbf{F}'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{F}(t+\Delta t)-\mathbf{F}(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[<f_1(t+\Delta t),\ f_2(t+\Delta t),\ f_3(t+\Delta t)>-<f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t)>]$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left\langle\frac{f_1(t+\Delta t)-f_1(t)}{\Delta t},\ \frac{f_2(t+\Delta t)-f_2(t)}{\Delta t},\ \frac{f_3(t+\Delta t)-f_3(t)}{\Delta t}\right\rangle$$

$$=\left\langle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f_1(t+\Delta t)-f_1(t)}{\Delta t},\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f_2(t+\Delta t)-f_2(t)}{\Delta t},\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f_3(t+\Delta t)-f_3(t)}{\Delta t}\right\rangle$$

$$=<f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t)>$$

$$=f_1(t)\mathbf{i}+f_2(t)\mathbf{j}+f_3(t)\mathbf{k}.$$

其次，我們列出有關向量函數之微分的法則，這些法則與純量函數的情形一樣：

(1) $(\mathbf{F}\pm\mathbf{G})'=\mathbf{F}'\pm\mathbf{G}'$

(2) $(k\mathbf{F})'=k\mathbf{F}'$ （k 爲常數)

(3) $(f\,\mathbf{F})'=f'\mathbf{F}\pm f\,\mathbf{F}'$

(4) $(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})'=\mathbf{F}'\cdot\mathbf{G}+\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}'$

(5) $(\mathbf{F}\times\mathbf{G})'=\mathbf{F}'\times\mathbf{G}+\mathbf{F}\times\mathbf{G}'$

此處 f，$\mathbf{F}$ 與 $\mathbf{G}$ 均爲純量 t 的函數.

(6) $\mathbf{A}'=\mathbf{0}$，若 $\mathbf{A}$ 爲常向量.

(7) 若 $\mathbf{F}$ 爲 t 的可微分函數，t 爲 u 的可微分函數，則 $\dfrac{d\mathbf{F}}{du}=\dfrac{d\mathbf{F}}{dt}\dfrac{dt}{du}$.

【例題 3】 利用定理 15.1

求向量函數 $\mathbf{F}(t)=\ln(4-t^2)\mathbf{i}+\sqrt{1+t}\,\mathbf{j}-4e^{3t}\mathbf{k}$ 的定義域與 $\mathbf{F}'(t)$.

【解】 因爲 $4-t^2>0$ 且 $1+t\geqslant 0$，故 $\mathbf{F}(t)$ 的定義域爲 $\{t|\ -1\leqslant t<2\}$.

$$\mathbf{F}'(t)=\frac{d}{dt}(\ln(4-t^2))\mathbf{i}+\frac{d}{dt}(\sqrt{1+t})\mathbf{j}-\frac{d}{dt}(4e^{3t})\mathbf{k}$$

$$=\frac{-2t}{4-t^2}\mathbf{i}+\frac{1}{2\sqrt{1+t}}\mathbf{j}-12e^{3t}\mathbf{k}.$$

【例題 4】　利用定理 15.1

若 $\mathbf{F}(t)=\sin t\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j}+t\mathbf{k}$，求 $\dfrac{d\mathbf{F}}{dt}$、$\dfrac{d^2\mathbf{F}}{dt^2}$、$\left|\dfrac{d\mathbf{F}}{dt}\right|$ 與 $\left|\dfrac{d^2\mathbf{F}}{dt^2}\right|$.

【解】

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt}=\frac{d}{dt}(\sin t)\mathbf{i}+\frac{d}{dt}(\cos t)\mathbf{j}+\frac{d}{dt}(t)\mathbf{k}=\cos t\mathbf{i}-\sin t\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

$$\frac{d^2\mathbf{F}}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{F}}{dt}\right)=\frac{d}{dt}(\cos t)\mathbf{i}-\frac{d}{dt}(\sin t)\mathbf{j}+\frac{d}{dt}(1)\mathbf{k}$$

$$=-\sin t\mathbf{i}-\cos t\mathbf{j}$$

$$\left|\frac{d\mathbf{F}}{dt}\right|=\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t+1}=\sqrt{2}$$

$$\left|\frac{d^2\mathbf{F}}{dt^2}\right|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}=1.$$

【例題 5】　利用法則 (4)

若 $|\mathbf{F}(t)|=c$ (定値)，且 $|\mathbf{F}'(t)|\neq 0$，則 $\mathbf{F}\perp\mathbf{F}'$.

【解】 由 $(\mathbf{F}\cdot\mathbf{F})'=\mathbf{F}'\cdot\mathbf{F}+\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}'=2\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}'=0$，可知

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}'=0$$

因 $\mathbf{F}'\neq\mathbf{0}$，故 $\mathbf{F}\perp\mathbf{F}'$.

若 $\mathbf{F}(t)=f_1(t)\mathbf{i}+f_2(t)\mathbf{j}+f_3(t)\mathbf{k}$，則定義：

$$\int\mathbf{F}(t)\,dt=\int[f_1(t)\mathbf{i}+f_2(t)\mathbf{j}+f_3(t)\mathbf{k}]\,dt$$

$$=\left[\int f_1(t)\,dt\right]\mathbf{i}+\left[\int f_2(t)\,dt\right]\mathbf{j}+\left[\int f_3(t)\,dt\right]\mathbf{k} \tag{15-1}$$

$$\int_a^b\mathbf{F}(t)\,dt=\int_a^b[f_1(t)\mathbf{i}+f_2(t)\mathbf{j}+f_3(t)\mathbf{k}]\,dt$$

$$=\left[\int_a^b f_1(t)\,dt\right]\mathbf{i}+\left[\int_a^b f_2(t)\,dt\right]\mathbf{j}+\left[\int_a^b f_3(t)\,dt\right]\mathbf{k} \tag{15-2}$$

【例題 6】 利用 (15-1) 及 (15-2) 式

設 $\mathbf{F}(t)=2t\mathbf{i}+3t^2\mathbf{j}+4t^3\mathbf{k}$，求

(1) $\displaystyle\int \mathbf{F}(t)\,dt$　　　(2) $\displaystyle\int_0^2 \mathbf{F}(t)\,dt.$

【解】

(1) $$\int \mathbf{F}(t)\,dt=\int (2t\mathbf{i}+3t^2\mathbf{j}+4t^3\mathbf{k})\,dt$$

$$=\left(\int 2t\,dt\right)\mathbf{i}+\left(\int 3t^2\,dt\right)\mathbf{j}+\left(\int 4t^3\,dt\right)\mathbf{k}$$

$$=(t^2\,\mathbf{i}+t^3\,\mathbf{j}+t^4\,\mathbf{k})+C_1\mathbf{i}+C_2\mathbf{j}+C_3\mathbf{k}=t^2\,\mathbf{i}+t^3\,\mathbf{j}+t^4\,\mathbf{k}+\mathbf{C}$$

此處 $\mathbf{C}=C_1\mathbf{i}+C_2\mathbf{j}+C_3\mathbf{k}$ 為任意向量積分常數.

(2) $$\int_0^2 \mathbf{F}(t)\,dt=\int_0^2 (2t\,\mathbf{i}+3t^2\,\mathbf{j}+4t^3\,\mathbf{k})\,dt$$

$$=\left(\int_0^2 2t\,dt\right)\mathbf{i}+\left(\int_0^2 3t^2\,dt\right)\mathbf{j}+\left(\int_0^2 4t^3\,dt\right)\mathbf{k}$$

$$=4\mathbf{i}+8\mathbf{j}+16\mathbf{k}.$$

向量函數的積分具有下列的性質：

(1) $\displaystyle\int c\mathbf{F}(t)\,dt=c\int \mathbf{F}(t)\,dt$，$c$ 為常數

(2) $\displaystyle\int [\mathbf{F}(t)\pm\mathbf{G}(t)]\,dt=\int \mathbf{F}(t)\,dt\pm\int \mathbf{G}(t)\,dt$

(3) $\displaystyle\frac{d}{dt}\left[\int \mathbf{F}(t)\,dt\right]=\mathbf{F}(t)$

(4) $\displaystyle\int \mathbf{F}'(t)\,dt=\mathbf{F}(t)+\mathbf{C}$

(5) $\int_a^b \mathbf{F}'(t)\,dt=\mathbf{F}(t)\Big|_a^b=\mathbf{F}(b)-\mathbf{F}(a).$

習題 15.1

1. 確定下列向量函數的定義域.

(1) $\mathbf{F}(t)=t^2\mathbf{i}+\sqrt{t-1}\,\mathbf{j}+\sqrt{5-t}\,\mathbf{k}$

(2) $\mathbf{F}(t)=\left\langle \ln t,\ \dfrac{t}{t-1},\ e^{-t}\right\rangle$

2. 求下列各極限.

(1) $\lim\limits_{t\to 2}\ (t\mathbf{i}+3\mathbf{j}+t^2\mathbf{k})$

(2) $\lim\limits_{t\to \pi}\ <\cos 3t,\ e^{-t},\ \sqrt{t}>$

(3) $\lim\limits_{t\to \infty}\left(e^{-t}\mathbf{i}+\dfrac{t-2}{t+1}\mathbf{j}+\tan^{-1} t\mathbf{k}\right)$

(4) $\lim\limits_{t\to 1}\left\langle \dfrac{2}{t^2},\ \dfrac{\ln t}{t^2-1},\ \sin 3t\right\rangle$

3. 令 $\mathbf{F}(t)=\sin t\ \mathbf{i}+\cos t\ \mathbf{j}+\mathbf{k}$.

(1) 求 $\mathbf{F}'(t)$.

(2) 試證：$\mathbf{F}'(t)$ 恆平行於 xy-平面.

(3) 哪些 t 值使 $\mathbf{F}'(t)$ 平行於 xz-平面？

(4) $\mathbf{F}(t)$ 的大小是否一定？

(5) $\mathbf{F}'(t)$ 的大小是否一定？

(6) 計算 $\mathbf{F}''(t)$.

4. 求下列各題的 $\mathbf{F}'(t)$.

(1) $\mathbf{F}(t)=2t\mathbf{i}+t^3\,\mathbf{j}$

(2) $\mathbf{F}(t)=\sin t\mathbf{i}+e^{-t}\,\mathbf{j}+t\mathbf{k}$

(3) $\mathbf{F}(t)=(t^3\,\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})\times(e^t\,\mathbf{i}+\mathbf{j}+t^2\,\mathbf{k})$

(4) $\mathbf{F}(t)=(\sin t+t^2)(\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k})$

(5) $\mathbf{F}(t)=3\mathbf{i}-\mathbf{k}$

5. 求下列各題的 $f'(t)$.

(1) $f(t)=(3t\ \mathbf{i}+5t^2\ \mathbf{j})\cdot(t\ \mathbf{i}-\sin t\ \mathbf{j})$

(2) $f(t)=|2t\ \mathbf{i}+2t\ \mathbf{j}-\mathbf{k}|$

(3) $f(t)=[(\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k})\times(3t^4\ \mathbf{i}+t\ \mathbf{j})]\cdot\mathbf{k}$

6. 試證：$\dfrac{d}{dt}\left(\mathbf{R}\times\dfrac{d\mathbf{R}}{dt}\right)=\mathbf{R}\times\dfrac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}.$

7. 設 $\mathbf{F}=\mathbf{F}(t)$，$\mathbf{G}=\mathbf{G}(t)$ 與 $\mathbf{H}=\mathbf{H}(t)$ 皆爲可微分向量函數，試證：

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{F}\cdot(\mathbf{G}\times\mathbf{H})]=\frac{d\mathbf{F}}{dt}\cdot(\mathbf{G}\times\mathbf{H})+\mathbf{F}\cdot\left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\times\mathbf{H}\right)+\mathbf{F}\cdot\left(\mathbf{G}\times\frac{d\mathbf{H}}{dt}\right).$$

8. 設 f_1，f_2，f_3，g_1，g_2，g_3，h_1，h_2 與 h_3 皆爲 t 的可微分函數，利用上題證明：

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 & f'_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g'_1 & g'_2 & g'_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h'_1 & h'_2 & h'_3 \end{vmatrix}$$

9. 已知 $\mathbf{F}'(t)=\cos t\,\mathbf{i}+\sin t\,\mathbf{j}$，且 $\mathbf{F}(0)=\mathbf{i}-\mathbf{j}$，求 $\mathbf{F}(t)$.

10. 已知 $\mathbf{F}'(t)=2\mathbf{i}+\dfrac{t}{t^2+1}\mathbf{j}+t\mathbf{k}$，且 $\mathbf{F}(1)=0$，求 $\mathbf{F}(t)$.

11. 已知 $\mathbf{F}''(t)=12t^2\mathbf{i}-2\mathbf{j}$，$\mathbf{F}'(0)=\mathbf{0}$，且 $\mathbf{F}(0)=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}$，求 $\mathbf{F}(t)$.

∑ 15-2 曲　線

在解析幾何中，我們常將三維空間 $\mathbb{R}^3$ 中的曲線表成參數式：

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$$

因此，我們不難用向量來表示空間曲線，即

$$\mathbf{R}=\mathbf{R}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k} \tag{15-3}$$

當 t 變化時，向量 $\mathbf{R}(t)$ 的終點所描出之軌跡爲此一曲線，$\mathbf{R}(t)$ 稱爲位置向量.

我們將 (x, y, z) 想像成三維空間中運動質點的位置特別地有用，其中 t 代表時間. 在持續期間 Δt 當中，該質點的位置向量自 $\mathbf{R}(t)$ 改變到 $\mathbf{R}(t+\Delta t)$，它在這段期間所經過的位移爲 (如圖 15-1 所示)

$$\Delta\mathbf{R}=\mathbf{R}(t+\Delta t)-\mathbf{R}(t)=\Delta x\mathbf{i}+\Delta y\mathbf{j}+\Delta z\mathbf{k}$$

以 Δt 除上式，可得**平均速度**爲

$$\frac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\mathbf{i}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\mathbf{j}+\frac{\Delta z}{\Delta t}\mathbf{k}$$

若 $\mathbf{R}$ 爲可微分，則當 Δt 趨近 0 時，平均速度 $\dfrac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta t}$ 趨近一極限，其爲 **(瞬時) 速度 $\mathbf{v}$**：

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}(t)=\frac{d\mathbf{R}}{dt}=\frac{dx}{dt}\mathbf{i}+\frac{dy}{dt}\mathbf{j}+\frac{dz}{dt}\mathbf{k} \tag{15-4}$$

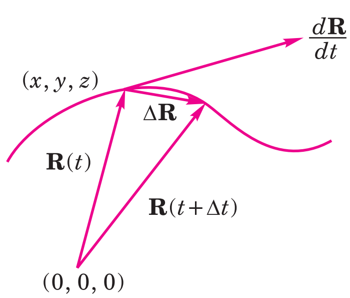


圖 15-1

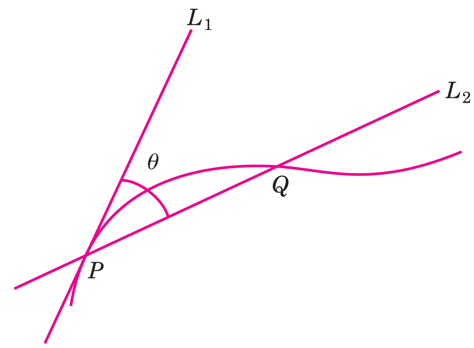


圖 15-2

$\mathbf{v}$ 的大小稱為速率，記為 v，即 $|\mathbf{v}|=v$.

圖 15-1 指出速度向量 $\dfrac{d\mathbf{R}}{dt}$ 切於曲線. 參考圖 15-2，當 Q 沿著曲線趨近 P 時，直線 L_1 與由 P 及 Q 所決定割線 L_2 之間的夾角 θ 趨近於零，因而 L_1 切曲線於 P 處；即當 Q 趨近 P 時，L_2 的方向趨近 L_1 的方向. 將此觀念應用到圖 15-1 的情況，當 Δt 趨近於零時，割線必須有一個極限方向，即 $\dfrac{d\mathbf{R}}{dt}$ 的方向，除非 $\dfrac{d\mathbf{R}}{dt}=\mathbf{0}$. 所以，若 $\mathbf{R}'(t_0)\neq\mathbf{0}$，則曲線 $\mathbf{R}(t)$ 在點 $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ 有一條切線，其方向與 $\dfrac{d\mathbf{R}}{dt}$ 的方向一致. 簡言之，$\dfrac{d\mathbf{R}}{dt}$ 切於曲線.

習慣上，我們以 $\mathbf{T}$ 表示切於曲線的單位切向量，即

$$\mathbf{T}=\frac{\dfrac{d\mathbf{R}}{dt}}{\left|\dfrac{d\mathbf{R}}{dt}\right|}=\frac{\dfrac{dx}{dt}\mathbf{i}+\dfrac{dy}{dt}\mathbf{j}+\dfrac{dz}{dt}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2}} \tag{15-5}$$

【例題 1】　利用 (15-5) 式

求切曲線 $x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$ 於點 (2，4，8) 的單位切向量.

【解】

$$\mathbf{T}=\frac{\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+3t^2\mathbf{k}}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}$$

當 $t=2$ 時，$(x, y, z)=(2, 4, 8)$，所以，

$$\mathbf{T}=\frac{\mathbf{i}+4\mathbf{j}+12\mathbf{k}}{\sqrt{161}}.$$

我們曾在前面指出，若平面上的平滑曲線的參數式爲

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, \quad a\leqslant t\leqslant b$$

則曲線的長度爲

$$L=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

此結果可推廣到三維空間中的平滑曲線．若三維空間中的平滑曲線的參數式爲

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t), \quad a\leqslant t\leqslant b \\ z=z(t) \end{cases}$$

則曲線的長度爲

$$L=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b \left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right| dt \tag{15-6}$$

此處 $\mathbf{R}=\mathbf{R}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$.

【例題 2】 利用 (15-6) 式

求**圓螺旋線**

$$x=\cos t$$
$$y=\sin t$$
$$z=t$$

自 $t=0$ 至 $t=\pi$ 之部分的長度.

【解】 長度爲

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1}\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{2}\,dt=\sqrt{2}\pi.$$

習題 15.2

1. 求切曲線 $x=1$，$y=t$，$z=t^2$ 於點 $(1，1，1)$ 的單位切向量.

2. 求切曲線 $x=4\cos t$，$y=4\sin t$，$z=t$ 於點 $\left(0，4，\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的單位切向量.

3. 求切曲線 $x=e^t$，$y=e^{-t}$，$z=t$ 於點 $(1，1，0)$ 的單位切向量.

4. 求切曲線 $\mathbf{R}(t)=3\cos t\mathbf{i}+4\sin t\mathbf{j}+t\mathbf{k}$ 於點 $\left(0，4，\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的單位切向量.

5. 求切曲線 $x=e^t\cos t$，$y=e^t\sin t$，$z=e^t$ 於點 $(1，0，1)$ 的單位切向量.

6. 求曲線 $\mathbf{R}(t)=\sqrt{2}t\mathbf{i}+e^t\mathbf{j}+e^{-t}\mathbf{k}$ 上自點 $(0，1，1)$ 至點 $\left(\sqrt{2}，e，\dfrac{1}{e}\right)$ 部分的長度.

7. 求曲線 $\mathbf{R}(t)=t^2\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+\ln t\mathbf{k}$ 上自點 $(1，2，0)$ 至點 $(e^2，2e，1)$ 部分的長度.

8. 求曲線 $\mathbf{R}(t)=3\cos t\mathbf{i}+3\sin t\mathbf{j}+t\mathbf{k}$ 上自點 $(3，0，0)$ 至點 $(3，0，2\pi)$ 部分的長度.

9. 求曲線 $\mathbf{R}(t)=\cos^3 t\mathbf{i}+\sin^3 t\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ 上自點 $(1，0，2)$ 至點 $(0，1，2)$ 部分的長度.

∑ 15-3 曲　率

我們從前一節的 (15-6) 式可知，自平滑曲線上某初始位置 $\mathbf{R}(t_0)$ 沿著曲線量至可變位置 $\mathbf{R}(t)$ 的弧長爲

$$s=s(t)=\int_{t_0}^{t}\left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|dt \qquad (t\geqslant t_0)$$

利用微積分基本定理，可得

$$\frac{ds}{dt}=\left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right| \qquad (=|\mathbf{v}|)$$

上式變成
$$\frac{ds}{dt}=\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]^{1/2}$$

因 $\dfrac{ds}{dt}\neq 0$，故依連鎖法則可得

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds}=\frac{d\mathbf{R}}{dt}\bigg/\frac{ds}{dt}=\frac{d\mathbf{R}}{dt}\bigg/\left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|$$

因 $\dfrac{d\mathbf{R}}{dt}$ 切於曲線，故 $\dfrac{d\mathbf{R}}{ds}$ 亦切於曲線。又，$\dfrac{d\mathbf{R}}{ds}$ 是單位切向量，所以，依 (15-3) 式，$\mathbf{T}=\dfrac{d\mathbf{R}}{ds}$.

$\mathbf{T}$ 既為曲線上一點的單位切向量，則向量 $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}$ 表示每單位弧長所改變的 $\mathbf{T}$. 雖然 $\mathbf{T}$ 的大小恆為 1，但 $\mathbf{T}$ 的方向隨處不同，在彎曲程度較大的地方，切線方向的改變較多 (每單位弧長)，彎曲程度較小的地方，方向的改變較少，因此，**$\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}$ 可用來測量曲線彎曲的程度，它的大小 $\left|\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}\right|$ 可用來測量曲線在該點的曲率.**

定義 15.5

平滑曲線的**曲率** $\kappa=\kappa(s)$ 定義為

$$\kappa=\left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|.$$

曲率的倒數稱為**曲率半徑**，記為

$$\rho=\frac{1}{\kappa}$$

註：直線的曲率為零.

就計算目的而言，定義 15.5 的曲率公式不是很有用，除非曲線是用弧長參數表出. 我們現在將導出適合於任何參數 t 的公式.

依連鎖法則，$\dfrac{d\mathbf{T}}{dt}=\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}\dfrac{ds}{dt}$，於是，$\kappa=\left|\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}\right|=\left|\dfrac{d\mathbf{T}}{dt}\Big/\dfrac{ds}{dt}\right|$. 但是，$\dfrac{ds}{dt}=|\mathbf{R}'(t)|$，故

$$\kappa(t)=\frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{R}'(t)|} \tag{15-7}$$

【例題 1】　利用 (15-7) 式

試證：在半徑爲 a 之圓上每一點的曲率爲 $1/a$.

【解】　令此圓的圓心在原點，則其參數式爲

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases},\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

而

$$\mathbf{R}(t)=a\cos t\mathbf{i}+a\sin t\mathbf{j}$$

於是，$\mathbf{R}'(t)=-a\sin t\mathbf{i}+a\cos t\mathbf{j}$

$$\mathbf{T}(t)=\frac{d\mathbf{R}}{dt}\Big/\left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|=-\sin t\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j}$$

$$\mathbf{T}'(t)=-\cos t\mathbf{i}-\sin t\mathbf{j}$$

$$\kappa(t)=\frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{R}'(t)|}=\frac{1}{a}.$$

雖然公式 (15-7) 可用來計算曲率，但是下面定理所給的公式通常比較方便.

定理 15.2

若一平滑曲線的位置向量函數爲 $\mathbf{R}(t)$，則

$$\kappa(t)=\frac{|\mathbf{R}'(t)\times\mathbf{R}''(t)|}{|\mathbf{R}'(t)|^3}.$$

證　因 $\mathbf{T}(t)=\dfrac{\mathbf{R}'(t)}{|\mathbf{R}'(t)|}$ 且 $|\mathbf{R}'(t)|=\dfrac{ds}{dt}$，可得

$$\mathbf{R}'(t)=|\mathbf{R}'(t)|\ \mathbf{T}(t)=\frac{ds}{dt}\ \mathbf{T}(t)$$

$$\mathbf{R}''(t)=\frac{d^2s}{dt^2}\,\mathbf{T}(t)+\frac{ds}{dt}\,\mathbf{T}'(t)$$

故
$$\mathbf{R}'(t)\times\mathbf{R}''(t)=\frac{ds}{dt}\,\mathbf{T}(t)\times\left(\frac{d^2s}{dt^2}\,\mathbf{T}(t)+\frac{ds}{dt}\,\mathbf{T}'(t)\right)$$
$$=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2(\mathbf{T}(t)\times\mathbf{T}'(t))$$

但 $\mathbf{T}(t)$ 與 $\mathbf{T}'(t)$ 垂直，所以，

$$|\mathbf{R}'(t)\times\mathbf{R}''(t)|=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2|\mathbf{T}(t)\times\mathbf{T}'(t)|=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2|\mathbf{T}(t)|\,|\mathbf{T}'(t)|=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2|\mathbf{T}'(t)|$$

$$|\mathbf{T}'(t)|=\frac{|\mathbf{R}'(t)\times\mathbf{R}''(t)|}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}=\frac{|\mathbf{R}'(t)\times\mathbf{R}''(t)|}{|\mathbf{R}'(t)|^2}$$

$$\kappa(t)=\frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{R}'(t)|}=\frac{|\mathbf{R}'(t)\times\mathbf{R}''(t)|}{|\mathbf{R}'(t)|^3}.$$

【例題 2】 利用定理 15.2

求圓螺旋線

$$\begin{aligned}x&=a\cos t\\ y&=a\sin t\qquad (a>0)\\ z&=ct\end{aligned}$$

的曲率.

【解】 位置向量函數爲

$\mathbf{R}(t)=a\cos t\mathbf{i}+a\sin t\mathbf{j}+ct\mathbf{k}$，於是，

$$\mathbf{R}'(t)=-a\sin t\mathbf{i}+a\cos t\mathbf{j}+c\mathbf{k}$$
$$\mathbf{R}''(t)=-a\cos t\mathbf{i}-a\sin t\mathbf{j}$$

$$\mathbf{R}'(t)\times\mathbf{R}''(t)=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ -a\sin t&a\cos t&c\\ -a\cos t&-a\sin t&0\end{vmatrix}=ac\sin t\mathbf{i}-ac\cos t\mathbf{j}+a^2\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{R}'(t)|=\sqrt{a^2+c^2}$$

$$|\mathbf{R}'(t)\times\mathbf{R}''(t)|=\sqrt{a^2c^2+a^4}=a\sqrt{a^2+c^2}$$

故

$$\kappa(t)=\frac{|\mathbf{R}'(t)\times\mathbf{R}''(t)|}{|\mathbf{R}'(t)|^3}=\frac{a\sqrt{a^2+c^2}}{(\sqrt{a^2+c^2})^3}=\frac{a}{a^2+c^2}.$$

【例題 3】　利用定理 15.2

求橢圓 $\mathbf{R}(t)=2\cos t\mathbf{i}+3\sin t\mathbf{j}$ 在點 (2，0) 的曲率。

【解】

$$\mathbf{R}'(t)=-2\sin t\mathbf{i}+3\cos t\mathbf{j}$$

$$\mathbf{R}''(t)=-2\cos t\mathbf{i}-3\sin t\mathbf{j}$$

$$\mathbf{R}'(t)\times\mathbf{R}''(t)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -2\sin t & 3\cos t & 0\\ -2\cos t & -3\sin t & 0\end{vmatrix}=(6\sin^2 t+6\cos^2 t)\mathbf{k}=6\mathbf{k}$$

$$\mathbf{R}'(t)=\sqrt{4\sin^2 t+9\cos^2 t}$$

$$|\mathbf{R}'(t)\times\mathbf{R}''(t)|=6$$

故

$$\kappa(t)=\frac{|\mathbf{R}'(t)\times\mathbf{R}''(t)|}{|\mathbf{R}'(t)|^3}=\frac{6}{(4\sin^2 t+9\cos^2 t)^{3/2}}$$

點 (2，0) 符合 $t=0$，以 $t=0$ 代入上式，可得

$$\kappa(0)=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}.$$

就平面曲線 $y=f(x)$ 的情形，我們取 x 爲參數，並寫成 $\mathbf{R}(x)=x\mathbf{i}+f(x)\mathbf{j}$，則 $\mathbf{R}'(x)=\mathbf{i}+f'(x)\mathbf{j}$，$\mathbf{R}''(x)=f''(x)\mathbf{j}$，可得 $\mathbf{R}'(x)\times\mathbf{R}''(x)=f''(x)\mathbf{k}$。又 $|\mathbf{R}'(x)|=\sqrt{1+[f'(x)]^2}$，依定理 15.1 可得

$$\kappa(x)=\frac{|f''(x)|}{[1+(f'(x))^2]^{3/2}} \tag{15-8}$$

【例題 4】　利用 (15-8) 式

求在拋物線 $y=2x^2$ 上點 (0，0) 的曲率。

【解】　$y=2x^2\Rightarrow y'=4x\Rightarrow y''=4$

$$\kappa(x)=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}}=\frac{4}{(1+4x^2)^{3/2}}$$

在點 (0，0) 的曲率為 $\kappa(0)=4$.

假設在平面上之平滑曲線 C 在點 P 有非零曲率 κ，並考慮切曲線 C 於 P 的一圓，其圓心位於 C 的凹側，則此圓被稱為在 P 的**曲率圓**或**密接圓**，其半徑 $\rho=1/\kappa$ 稱為在 P 的**曲率半徑**，而稱其圓心為 P 的曲率中心，如圖 15-3 所示. 曲率圓在 P 附近是最近似曲線 C 的圓.

在曲線上點 P 的曲率圓與該曲線有下列相同之處：

1. 通過相同點 P.
2. 在點 P 有相同切線.
3. 在點 P 有相同曲率.

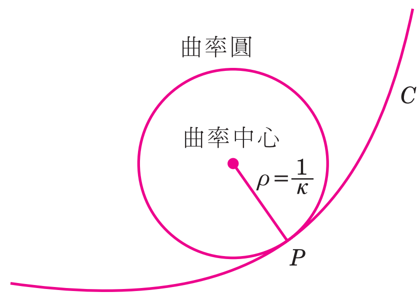


圖 15-3

【例題 5】 利用例題 4

求在拋物線 $y=2x^2$ 上點 (0，0) 的密接圓.

【解】 在點 (0，0) 的曲率為 $\kappa(0)=4$，因此，在點 (0，0) 之密接圓的半徑為 $\frac{1}{4}$，其圓心在 $\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$. 所以，密接圓的方程式為

$$x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}.$$

因 $\mathbf{T}$ 為單位切向量，其導向量垂直於 $\mathbf{T}$，故 $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ 的方向為法線方向. 定義

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds}=\kappa\mathbf{N} \tag{15-9}$$

$\mathbf{N}$ 為單位向量，稱為**單位主法向量**，它指向曲線的凹側，如圖 15-4 所示.

利用 $\mathbf{T}$ 與 $\mathbf{N}$，我們可在曲線上一點 P (圖 15-5) 定一個直角坐標系，取

$$\mathbf{B}=\mathbf{T}\times\mathbf{N}\ \ (\text{當然 } |\mathbf{B}|=1)$$

$\mathbf{B}$ 稱為**單位副法向量**.

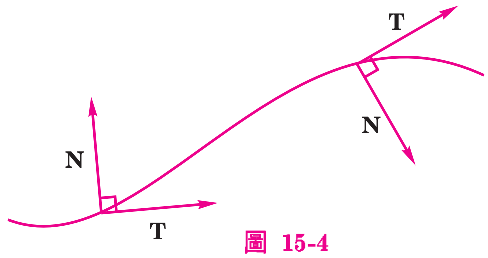


圖 15-4

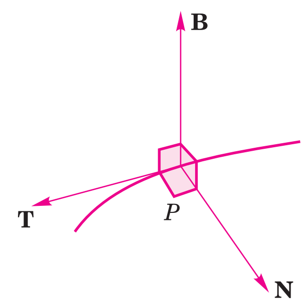


圖 15-5

因 $\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}=1$，故 $\mathbf{B}\cdot\dfrac{d\mathbf{B}}{ds}=0$，即

(1) $\mathbf{B}\perp\dfrac{d\mathbf{B}}{ds}$

又 $\mathbf{T}\cdot\mathbf{B}=0$，可得 $\mathbf{T}\cdot\dfrac{d\mathbf{B}}{ds}+\mathbf{B}\cdot\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}=0$

$$\mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{ds}=-\mathbf{B}\cdot\kappa\mathbf{N}=0\text{，即}$$

(2) $\mathbf{T}\perp\dfrac{d\mathbf{B}}{ds}$

由 (1) 及 (2) 知，$\dfrac{d\mathbf{B}}{ds}$ 與 $\mathbf{N}$ 平行，故取適當的純量函數 $\tau(s)$ 使

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds}=-\tau(s)\mathbf{N} \tag{15-10}$$

此 $\tau(s)$ 稱爲曲線在 P 點的**扭率**.

由 $\mathbf{N}=\mathbf{B}\times\mathbf{T}$ 對 s 微分可得

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds}=-\kappa\mathbf{T}+\tau\mathbf{B} \tag{15-11}$$

上述式 (15-9)、(15-10) 及 (15-11) 稱爲**弗列涅特-史列特公式**.

T、N 與 B 共同構成了一種直角坐標系，但當曲線上的點變動時，此坐標系亦在空間移動，所以並不是一種靜止而是方向可變的坐標系.

【例題 6】　利用必要的公式

已知空間曲線爲 $x=t$，$y=t^2$，$z=\dfrac{2}{3}t^3$，求單位切向量，單位主法向量，單位副法向量，曲率及扭率.

【解】 位置向量 $\mathbf{R}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+\frac{2}{3}t^3\mathbf{k}$

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt}=\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+2t^2\mathbf{k}$$

$$\frac{ds}{dt}=\left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|=\sqrt{1+4t^2+4t^4}=1+2t^2$$

故
$$\mathbf{T}=\frac{d\mathbf{R}}{ds}=\frac{d\mathbf{R}/dt}{ds/dt}=\frac{\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+2t^2\mathbf{k}}{1+2t^2}$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt}=\frac{-4t\mathbf{i}+(2-4t^2)\mathbf{j}+4t\mathbf{k}}{(1+2t^2)^2}$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds}=\frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt}=\frac{-4t\mathbf{i}+(2-4t^2)\mathbf{j}+4t\mathbf{k}}{(1+2t^2)^3}$$

因 $\frac{d\mathbf{T}}{ds}=\kappa\mathbf{N}$，故

$$\kappa=\left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|=\frac{2}{(1+2t^2)^2}$$

$$\mathbf{N}=\frac{1}{\kappa}\frac{d\mathbf{T}}{ds}=\frac{-2t\mathbf{i}+(1-2t^2)\mathbf{j}+2t\mathbf{k}}{1+2t^2}$$，得

$$\mathbf{B}=\mathbf{T}\times\mathbf{N}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{1}{1+2t^2} & \frac{2t}{1+2t^2} & \frac{2t^2}{1+2t^2}\\ \frac{-2t}{1+2t^2} & \frac{1-2t^2}{1+2t^2} & \frac{2t}{1+2t^2}\end{vmatrix}=\frac{2t^2\mathbf{i}-2t\mathbf{j}+\mathbf{k}}{1+2t^2}$$

因 $\frac{d\mathbf{B}}{dt}=\frac{4t\mathbf{i}+(4t^2-2)\mathbf{j}-4t\mathbf{k}}{(1+2t^2)^2}$，且

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds}=\frac{d\mathbf{B}/dt}{ds/dt}=\frac{4t\mathbf{i}+(4t^2-2)\mathbf{j}-4t\mathbf{k}}{(1+2t^2)^3}$$

又 $\frac{d\mathbf{B}}{ds}=-\tau\mathbf{N}$，故 $\tau=\frac{2}{(1+2t^2)^2}$.

習題 15.3

1. 試證曲線 $x=x(s)$，$y=y(s)$，$z=z(s)$ 的曲率半徑為

$$\rho=\frac{1}{\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]^{1/2}}.$$

2. 凡各點在同一平面上的曲線稱為**平面曲線**．試證平面曲線的扭率處處為零．
3. 求曲線 $\mathbf{R}(t)=\sin t\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j}+\sin t\mathbf{k}$ 的曲率．
4. 求曲線 $\mathbf{R}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$ 在點 $(0, 0, 0)$ 的曲率．
5. 求曲線 $\mathbf{R}(t)=\sqrt{2}\,t\mathbf{i}+e^t\mathbf{j}+e^{-t}\mathbf{k}$ 在點 $(0, 1, 1)$ 的曲率．
6. 求拋物線 $y=x^2$ 在點 $(1, 1)$ 的曲率．
7. 求曲線 $y=\sin x$ 在點 $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ 的曲率．
8. 求曲線 $y=\frac{1}{x}$ 在點 $(1, 1)$ 的曲率．
9. 求橢圓 $9x^2+4y^2=36$ 在點 $(2, 0)$ 與 $(0, 3)$ 的密接圓．
10. 求螺旋線 $\mathbf{R}(t)=t\mathbf{i}+\sin t\mathbf{j}+\cos t\mathbf{k}$ 的曲率及扭率．
11. 求圓螺旋線 $\mathbf{R}(t)=a\cos t\mathbf{i}+a\sin t\mathbf{j}+ct\mathbf{k}$ 的單位切向量、單位主法向量、單位副法向量、曲率及扭率．
12. 試求曲線 $\mathbf{R}(t)=\cos t\mathbf{j}+3\sin t\mathbf{k}$ 上點 $P\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ 處的單位切向量、單位主法向量、單位副法向量、曲率及扭率．

∑ 15-4　沿著曲線的運動

我們在本書稍早曾研究質點沿著直線的運動．在本節，我們將研究質點沿著曲線的運動．

若質點沿一曲線前進，且在時間 t 的位置向量為 $\mathbf{R}(t)$，則該質點的速度 $\mathbf{v}(t)$，加速度 $\mathbf{a}(t)$ 與速率 $|\mathbf{v}(t)|$ 分別為

$$\mathbf{v}(t)=\frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

$$\mathbf{a}(t)=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$$

$$|\mathbf{v}(t)|=\left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|.$$

【例題 1】 質點作圓周運動

某質點繞一圓運動，而在時間 t 的 x-坐標與 y-坐標分別爲 $x=2\cos t$，$y=2\sin t$。當 $t=\pi/4$ 時，求該質點的速度、加速度與速率。

【解】

$$\mathbf{R}(t)=2\cos t\mathbf{i}+2\sin t\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}(t)=\frac{d\mathbf{R}}{dt}=-2\sin t\mathbf{i}+2\cos t\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}(t)=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-2\cos t\mathbf{i}-2\sin t\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{v}(t)|=\sqrt{4}=2$$

於是，

$$\mathbf{v}\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2\sin\frac{\pi}{4}\mathbf{i}+2\cos\frac{\pi}{4}\mathbf{j}=-\sqrt{2}\mathbf{i}+\sqrt{2}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2\cos\frac{\pi}{4}\mathbf{i}-2\sin\frac{\pi}{4}\mathbf{j}=-\sqrt{2}\mathbf{i}-\sqrt{2}\mathbf{j}$$

$$\left|\mathbf{v}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|=2.$$

假設一平滑曲線 C 的位置向量爲 $\mathbf{R}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$ ($\mathbf{R}(t)$ 爲二次可微分)，今有某質點沿著 C 運動，則其速度 $\mathbf{v}$ 及加速度 $\mathbf{a}$ 分別爲

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}(t)=\frac{d\mathbf{R}}{dt}=\frac{dx}{dt}\mathbf{i}+\frac{dy}{dt}\mathbf{j}+\frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}(t)=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}$$

因 $|\mathbf{v}(t)|=\dfrac{ds}{dt}$，故寫成 $\mathbf{v}(t)=\dfrac{ds}{dt}\mathbf{T}$。因而，

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\mathbf{T}\right)=\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}+\frac{ds}{dt}\;\frac{d\mathbf{T}}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}+\frac{ds}{dt}\;\frac{d\mathbf{T}}{ds}\;\frac{ds}{dt}$$

$$=\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}+\kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N}=a_T\mathbf{T}+a_N\mathbf{N} \qquad (15\text{-}12)$$

(見圖 15-6) 此處 $a_T=\dfrac{d^2s}{dt^2}$, $a_N=\kappa\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2$ 分別稱爲加速度 **a** 的**切線分量**及**法線分量.**

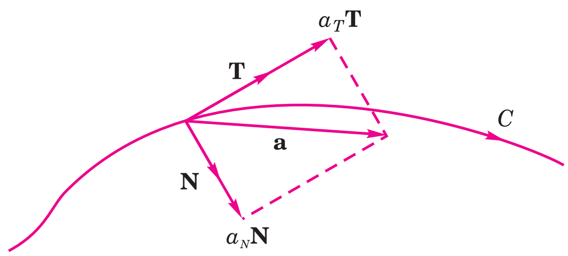


圖 15-6

依畢氏定理，可知

$$a^2=a_T^2+a_N^2 \qquad (15\text{-}13)$$

欲計算 a，只需求 $\dfrac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$，然後計算 $\left|\dfrac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}\right|$. 欲計算 a_T，只需求 $\dfrac{d\mathbf{R}}{dt}$，再計算 $\left|\dfrac{d\mathbf{R}}{dt}\right|\left(=\dfrac{ds}{dt}\right)$，然後對 t 微分. 在算出 a 及 a_T 之後，利用 (15-13) 式就很容易求得 a_N.

【例題 2】　質點作圓周運動

某質點以角速率 ω 繞 xy-平面上的圓 $x^2+y^2=r^2$ 作運動，位置爲

$$x=r\cos\omega t,\ y=r\sin\omega t,\ z=0$$

求該質點的加速度的切線分量與法線分量.

【解】　$\mathbf{R}(t)=r\cos\omega t\mathbf{i}+r\sin\omega t\mathbf{j}$

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt}=-r\omega\sin\omega t\mathbf{i}+r\omega\cos\omega t\mathbf{j}$$

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}=-r\omega^2\cos\omega t\mathbf{i}-r\omega^2\sin\omega t\mathbf{j}$$

$$\frac{ds}{dt}=\left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|=\sqrt{r^2\omega^2\sin^2\omega t+r^2\omega^2\cos^2\omega t}=\omega r$$

$$a=\left|\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}\right|=\omega^2 r$$

因 $\dfrac{ds}{dt}$ 爲常數，故 $a_T=\dfrac{d^2s}{dt^2}=0$，$a_N=a=\omega^2 r$.

【例題 3】 利用必要的公式

某質點在時間 t 的坐標爲

$$x=\sin t-t\cos t$$
$$y=t\sin t+\cos t$$
$$z=t^2$$

求其速率、加速度的切線分量與法線分量、曲率.

【解】 $\mathbf{R}(t)=(\sin t-t\cos t)\mathbf{i}+(t\sin t+\cos t)\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}$

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt}=t\sin t\mathbf{i}+t\cos t\mathbf{j}+2t\mathbf{k}$$

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}=(\sin t+t\cos t)\mathbf{i}+(\cos t-t\sin t)\mathbf{j}+2\mathbf{k}$$

速率爲 $$\frac{ds}{dt}=\left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|=\sqrt{t^2\sin^2 t+t^2\cos^2 t+4t^2}=\sqrt{5}\,t$$

$$a_T=\frac{d^2s}{dt^2}=\sqrt{5}$$

$$a_N=\sqrt{a^2-a_T^2}=\sqrt{(\sin t+t\cos t)^2+(\cos t-t\sin t)^2+4-5}=t$$

因 $a_N=\kappa\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2$，故 $\kappa=\dfrac{a_N}{(ds/dt)^2}=\dfrac{t}{5t^2}=\dfrac{1}{5t}$.

習題 15.4

1. 某質點在平面上運動的位置向量為 $\mathbf{R}(t)=e^t\mathbf{i}+e^{-t}\mathbf{j}$，求其在 $t=0$ 的速度、加速度與速率.
2. 求質點沿著曲線 $\mathbf{R}(t)=2\cos t\mathbf{i}+2\sin t\mathbf{j}+t\mathbf{k}$ 運動在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 時的速度、加速度與速率.
3. 已知某質點沿著曲線 $\mathbf{R}(t)=2t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+\ln t\mathbf{k}$ 運動，求它在 $t=2$ 的速度、加速度與速率.
4. 已知質點在時間 t 的坐標為

$$x=e^t\cos t$$
$$y=e^t\sin t$$
$$z=e^t$$

求其速率、加速度的切線分量及法線分量、單位切向量、曲率.

5. 已知質點在時間 t 的坐標為

$$x=5\sin 4t$$
$$y=5\cos 4t$$
$$z=10t$$

求其速率、加速度的切線分量及法線分量、單位切向量、曲率.

∑ 15-5　線積分

在前面幾章中，我們已介紹過三種直角坐標的積分：在區間的單積分，在平面區域的二重積分與在三維空間區域的三重積分．在本節中，我們將討論沿著平面曲線或三維空間曲線的積分，這種積分稱為**線積分**．線積分的觀念係將定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 的觀念加以推廣.

令平面曲線 C 的參數方程式為

$$x=x(t),\ y=y(t),\ a\leqslant t\leqslant b$$

並假設 C 為平滑曲線 (即，$x'(t)$ 與 $y'(t)$ 在 $[a,\ b]$ 皆為連續且不同時為零)．現在，

我們對參數區間 $[a，b]$ 選取分點如下：

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$$

而將 $[a，b]$ 分成 n 個子區間，這 n 個子區間構成 $[a，b]$ 之一分割 P。最大子區間的長度定義成分割 P 的範數並記爲 $\|P\|$。令 $x_i=x(t_i)$，$y_i=y(t_i)$，則在 C 上的對應點 $P_i(x_i，y_i)$ 將 C 分成 n 個小弧段，長度爲 Δs_1，Δs_2，$\cdots$，Δs_n，如圖 15-7 所示。我們在第 i 個小弧段上任取一點 $P_i^*(x_i^*，y_i^*)$(此對應於 $[t_{i-1}，t_i]$ 中的 t_i^*)。若函數 $f(x，y)$ 在包含 C 的區域爲連續，則作成一和

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*，y_i^*)\,\Delta s_i$$

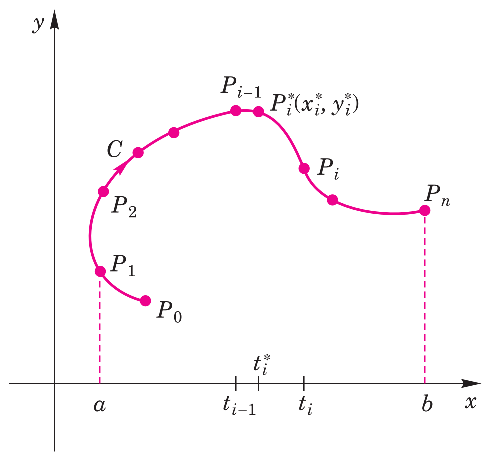


圖 15-7

定義 15.6

設平滑平面曲線 C 的參數方程式爲

$$\begin{matrix} x=x(t) \\ y=y(t) \end{matrix}，\quad a\leqslant t\leqslant b$$

若函數 $f(x，y)$ 在包含 C 的區域爲連續，則 **f 沿著 C (對弧長) 的線積分**定義爲

$$\int_C f(x，y)ds=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*，y_i^*)\,\Delta s_i$$

倘若上面極限存在．曲線 C 稱為**積分路徑**．

在 10-3 節，我們得知 C 的長度為

$$L=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

因此，在 C 上，從 $t=a$ 所對應的點到 $t=t$ 所對應的點之間的弧長為

$$s(t)=\int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

(此處 $s(t)$ 為弧長函數) 可得

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

所以，

$$\int_C f(x,\ y)\,ds=\int_a^b f(x(t),\ y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt \qquad (15\text{-}14)$$

當 C 為從點 $(a,\ 0)$ 到點 $(b,\ 0)$ 的線段時，以 x 作為參數，可將 C 的參數方程式表成如下：$x=x$，$y=0$，$a\leqslant x\leqslant b$，則 (15-14) 式變成

$$\int_C f(x,\ y)\,ds=\int_a^b f(x,\ 0)\,dx$$

因此，線積分化成普通的單積分．

【例題 1】　利用 (15-14) 式

計算 $\int_C x^2y\,ds$，其中 C 的參數方程式為 $x=\cos t$，$y=\sin t$，$0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$．

【解】 曲線 C 如圖 15-8 所示。

$$\int_C x^2y\,ds$$

$$=\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin t \sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt$$

$$=-\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,d\cos t$$

$$=-\frac{1}{3}\cos^3 t\Big|_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{1}{3}.$$

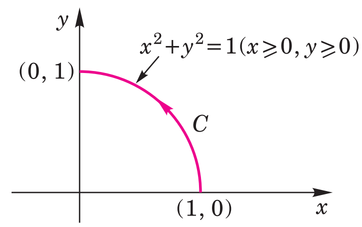


圖 15-8

若在定義 15.6 中分別用 Δx_i 及 Δy_i 代換 Δs_i，則

$$\int_C f(x,y)\,dx=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta x_i$$

$$\int_C f(x,y)\,dy=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta y_i$$

符號 $\int_C f(x,y)\,dx$ 爲 f 沿著 C 對 x 的線積分，$\int_C f(x,y)\,dy$ 爲 f 沿著 C 對 y 的線積分。

若 $x=x(t)$，$y=y(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$，則 $dx=x'(t)\,dt$，$dy=y'(t)\,dt$，可得

$$\int_C f(x,y)\,dx=\int_a^b f(x(t), y(t))\,x'(t)\,dt \tag{15-15}$$

$$\int_C f(x,y)\,dy=\int_a^b f(x(t), y(t))\,y'(t)\,dt \tag{15-16}$$

線積分時常出現 $\int_C P(x,y)\,dx+\int_C Q(x,y)\,dy$ 的形式，我們習慣上將它縮寫成 $\int_C P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$，即，

$$\int_C P(x,\ y)\ dx+Q(x,\ y)\ dy=\int_C P(x,\ y)\ dx+\int_C Q(x,\ y)\ dy \qquad (15\text{-}17)$$

式子 $P(x,\ y)\ dx+Q(x,\ y)\ dy$ 稱爲**微分式**.

【例題 2】　利用 (15-15) 及 (15-16) 式

計算 $\int_C 2xy\ dx+(x^2+y^2)\ dy$，其中 C 的參數方程式爲 $x=\cos t$，$y=\sin t$，$0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$.

【解】　曲線 C 如圖 15-9 所示.

$$\int_C 2xy\ dx=\int_0^{\pi/2}(2\cos t\sin t)(-\sin t)\ dt$$

$$=-2\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos t\ dt$$

$$=-\frac{2}{3}\sin^3 t\Big|_0^{\pi/2}=-\frac{2}{3}$$

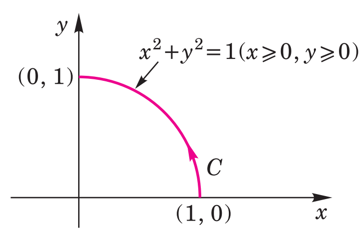


圖 15-9

$$\int_C (x^2+y^2)\ dy=\int_0^{\pi/2}(\cos^2 t+\sin^2 t)\cos t\ dt$$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos t\ dt=\sin t\Big|_0^{\pi/2}=1$$

於是

$$\int_C 2xy\ dx+(x^2+y^2)\ dy=\int_C 2xy\ dx+\int_C (x^2+y^2)\ dy$$

$$=-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3}.$$

【例題 3】　利用 (15-15) 及 (15-16) 式

計算 $\int_C 2xy\ dx+(x^2+y^2)\ dy$，其中曲線 C 的參數方程式爲 $x=t$，$y=\sqrt{1-t^2}$，$0\leqslant t\leqslant 1$.

【解】 曲線 C 如圖 15-10 所示.

$$\int_C 2xy\ dx=\int_0^1 2t\sqrt{1-t^2}\ dt$$

$$=-\frac{2}{3}(1-t^2)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$$

$$\int_C (x^2+y^2)\ dy=\int_0^1 y'(t)\ dt$$

$$=y(t)\Big|_0^1=\sqrt{1-t^2}\Big|_0^1=-1$$

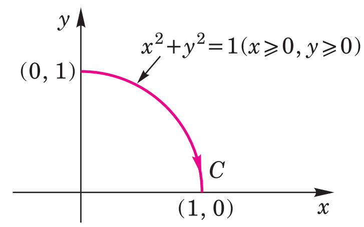


圖 15-10

所以，$$\int_C 2xy\ dx+(x^2+y^2)\ dy=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}.$$

若曲線 C 是沿著某方向，則沿著反方向的同樣曲線通常記爲符號 $-C$. 於是，

$$\int_{-C} f(x,\ y)\ dx=-\int_C f(x,\ y)\ dx$$

$$\int_{-C} f(x,\ y)\ dy=-\int_C f(x,\ y)\ dy$$

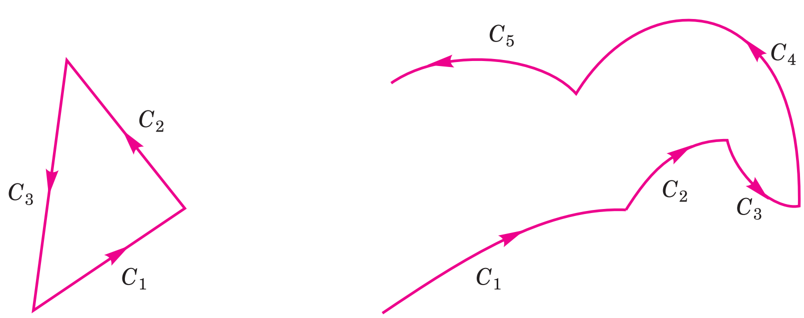


圖 15-11

$$\int_{-C} P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=-\int_{C} P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy$$

在線積分的定義裡，我們需要曲線 C 爲平滑．然而，該定義可推廣到端點連著端點的有限多條平滑曲線 C_1，C_2，…，C_n 所形成的曲線，這種曲線稱爲**分段平滑** (圖 15-11)．我們定義沿著分段平滑曲線 C 的線積分爲在各分段之積分的和：

$$\int_C=\int_{C_1}+\int_{C_2}+\cdots+\int_{C_n}$$

【例題 4】　利用 (15-15) 及 (15-16) 式

計算 $\int_C x^2y\,dx+x\,dy$，其中路徑 C 爲自原點向右沿著水平線段至點 (1，0)，再向上沿著垂直線段至點 (1，2)，然後沿著直線段回到原點．

【解】　路徑 C 如圖 15-12 所示．

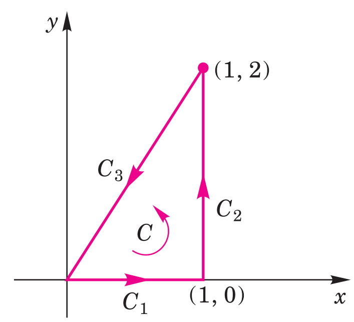


圖 15-12

C_1：$x=t$，$y=0$，$0\leqslant t\leqslant 1$
C_2：$x=1$，$y=t$，$0\leqslant t\leqslant 2$
C_3：$x=1-t$，$y=2-2t$，$0\leqslant t\leqslant 1$

$$\int_{C_1} x^2y\,dx+x\,dy=\int_0^1 0\,dt=0$$

$$\int_{C_2} x^2y\,dx+x\,dy=\int_0^2 dt=2$$

$$\int_{C_3} x^2y\,dx+x\,dy=\int_0^1 (1-t)^2(2-2t)(-dt)+\int_0^1 (1-t)(-2dt)$$

$$=2\int_0^1 (t-1)^3\,dt+2\int_0^1 (t-1)\,dt$$

$$=\frac{1}{2}(t-1)^4\Big|_0^1+(t-1)^2\Big|_0^1=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$$

所以，
$$\int_C x^2y\,dx+x\,dy=0+2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}.$$

【例題 5】 分段積分

求 $\int_C [xy\,dx+y(x-y)\,dy]$ 的值，其中 C 為自原點經 $P(0,3)$ 至 $Q(3,3)$ 的折線.

【解】 C 可分為兩段 C_1 及 C_2，如圖 15-13 所示.

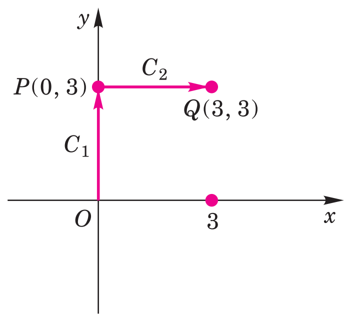


圖 15-13

$$\int_C [xy\,dx+y(x-y)\,dy]$$

$$=\int_{C_1} [xy\,dx+y(x-y)\,dy]+\int_{C_2} [xy\,dx+y(x-y)\,dy]$$

在 C_1 上，$x=0$，故 $dx=0$，而 y 的值自 0 增至 3，

$$\int_{C_1} [xy\,dx+y(x-y)\,dy]=\int_0^3 (-y^2)\,dy=-9$$

在 C_2 上，$y=3$，故 $dy=0$，而 x 的值自 0 增至 3，

$$\int_{C_2} [xy\,dx+y(x-y)\,dy]=\int_0^3 3x\,dx=\frac{27}{2}$$

故原式$=-9+\frac{27}{2}=\frac{9}{2}$.

線積分的觀念可推廣到三維空間. 假設三維空間中的平滑曲線 C 的參數方程式為

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t), \quad a \leqslant t \leqslant b \\ z &= z(t) \end{aligned}$$

若函數 $f(x, y, z)$ 在包含 C 的區域為連續, 則我們定義 **f 沿著 C (對弧長) 的線積分**為

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta s_i$$

我們可用下列公式計算線積分.

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt \tag{15-18}$$

$$\int_C f(x, y, z)\, dx = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, x'(t)\, dt \tag{15-19}$$

$$\int_C f(x, y, z)\, dy = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, y'(t)\, dt \tag{15-20}$$

$$\int_C f(x, y, z)\, dz = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, z'(t)\, dt \tag{15-21}$$

$$\int_C P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz$$

$$= \int_C P(x, y, z)\, dx + \int_C Q(x, y, z)\, dy + \int_C R(x, y, z)\, dz \tag{15-22}$$

【例題 6】　利用 (15-18) 式

計算 $\int_C x \cos z\, ds$, 其中 C 的參數方程式為 $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

【解】

$$\int_C x \cos z\, ds = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}\, dt$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\,dt$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}=\sqrt{2}\pi.$$

【例題 7】 利用參數方程式

計算 $\int_C y\,dx+z\,dy+x\,dz$，其中 C 爲自點 $(2, 0, 0)$ 至點 $(3, 4, 5)$ 的線段.

【解】 $\mathbf{R}=\langle x, y, z\rangle=\langle 2, 0, 0\rangle+t\langle 3-2, 4-0, 5-0\rangle$
$=\langle 2+t, 4t, 5t\rangle$，$0\leqslant t\leqslant 1$

C 的參數方程式爲

$$\begin{aligned} x&=2+t \\ y&=4t, \qquad 0\leqslant t\leqslant 1 \\ z&=5t \end{aligned}$$

於是，

$$\int_C y\,dx+z\,dy+x\,dz=\int_0^1 4t\,dt+20t\,dt+5(2+t)\,dt$$

$$=\int_0^1(29t+10)\,dt=\frac{29}{2}t^2+10t\Big|_0^1=\frac{49}{2}.$$

定義 15.7

設平滑曲線 C 的位置向量爲 $\mathbf{R}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$，若向量函數 $\mathbf{F}(x, y, z)=f_1(x, y, z)\mathbf{i}+f_2(x, y, z)\mathbf{j}+f_3(x, y, z)\mathbf{k}$ 在包含 C 的區域爲連續，則 **$\mathbf{F}$ 沿著 C 的線積分**定義爲

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\int_C f_1(x, y, z)\,dx+f_2(x, y, z)\,dy+f_3(x, y, z)\,dz.$$

【例題 8】　利用定義 15.7

求向量函數 $\mathbf{F}=(y+z)\mathbf{i}+(z+x)\mathbf{j}+(x+y)\mathbf{k}$ 沿著曲線 $C：\mathbf{R}=at\mathbf{i}+bt\mathbf{j}+ct\mathbf{k}$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的線積分.

【解】　因 $x=at$，$y=bt$，$z=ct$，故

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}&=\int_C [(y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz]\\&=\int_0^1 [a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)]t\,dt\\&=ab+bc+ca.\end{aligned}$$

【例題 9】　利用定義 15.7

設 $\mathbf{F}=y\mathbf{i}+z\mathbf{j}+x\mathbf{k}$，求沿著下列各路徑的線積分.

(1) $C：\mathbf{R}=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$

(2) 依次連接 (0，0，0)、(1，0，0)、(1，0，1) 及 (1，1，1) 等四點所成的折線 C

(3) 自點 (0，0，0) 經直線至點 (1，1，1) 的路徑

【解】

(1) $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\int_0^1 (t^2+2t^4+3t^3)\,dt=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=\frac{89}{60}.$

(2) 如圖 15-14 所示，C_1，C_2，C_3 各表折線 C 的三線段.

$C_1：\mathbf{R}=t\mathbf{i}$　　$(0\leqslant t\leqslant 1)$

$C_2：\mathbf{R}=\mathbf{i}+t\mathbf{k}$　　$(0\leqslant t\leqslant 1)$

$C_3：\mathbf{R}=\mathbf{i}+t\mathbf{j}+\mathbf{k}$　　$(0\leqslant t\leqslant 1)$

故

$$\begin{aligned}&\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}\\&=\int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}+\int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}+\int_{C_3}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}\\&=\int_0^1 0\,dt+\int_0^1 dt+\int_0^1 dt\end{aligned}$$

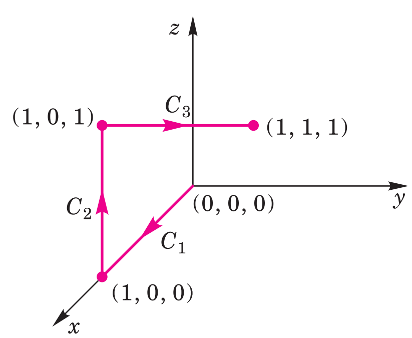


圖 15-14

$=1+1=2.$

(3) 自點 (0，0，0) 經直線至點 (1，1，1) 的路徑爲 $C：\mathbf{R}=t\mathbf{i}+t\mathbf{j}+t\mathbf{k}\ (0\leqslant t\leqslant 1)$.

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\int_0^1 (t+t+t)\,dt=\frac{3}{2}.$$

以力 $\mathbf{F}$ 將一物體沿著曲線 C 移動，所作的功爲

$$W=\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$$

【例題 10】 利用定義 15.7

若某物體在力 $\mathbf{F}(x, y)=x^3y\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}$ 的限制下由點 $(-2, 4)$ 沿著拋物線 $y=x^2$ 移到點 $(1, 1)$，求所作的功.

【解】 路徑 $C：\mathbf{R}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}\ (-2\leqslant t\leqslant 1)$

因 $x=t$，$y=t^2$，故所作的功爲

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\int_C [x^3y\,dx+(x-y)\,dy]=\int_{-2}^1 (t^5+2t^2-2t^3)\,dt$$

$$=\left(\frac{1}{6}t^6+\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{2}t^4\right)\Bigg|_{-2}^{1}=3$$

線積分之値除了得到純量外，亦可得到向量，如 $\int_C f\,d\mathbf{R}$ 與 $\int_C \mathbf{F}\,dl$，其中

$\int_C f\,d\mathbf{R}$ 的意義爲

$$\int_C f\,d\mathbf{R}=\int_C f(dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}+dz\mathbf{k})=\left(\int_C f\,dx\right)\mathbf{i}+\left(\int_C f\,dy\right)\mathbf{j}+\left(\int_C f\,dz\right)\mathbf{k}$$

而 $\int_C \mathbf{F}\,dl$ 的意義爲

$$\int_C \mathbf{F}\,dl=\int_C (f_1\mathbf{i}+f_2\mathbf{j}+f_3\mathbf{k})\,dl$$

$$=\left(\int_C f_1\,dl\right)\mathbf{i}+\left(\int_C f_2\,dl\right)\mathbf{j}+\left(\int_C f_3\,dl\right)\mathbf{k}.$$

習題 15.5

1. 令曲線 C 的參數方程式為：$x=t$，$y=t^2$，$0\leqslant t\leqslant 1$，計算

(1) $\int_C (2x+y)\,dx$　　(2) $\int_C (x^2-y)\,dy$　　(3) $\int_C (2x+y)\,dx+(x^2-y)\,dy$.

2. 計算 $\int_C y\,dx-x^2\,dy$，其中曲線 C 為：$x=t$，$y=\frac{1}{2}t^2$，$0\leqslant t\leqslant 2$.

3. 計算 $\int_C (x+2y)\,dx+(x-y)\,dy$，其中曲線 C 為：$x=2\cos t$，$y=4\sin t$，$0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{4}$.

4. 試沿著下列路徑，計算 $\int_C [(x^2-y)\,dx+(x+y^2)\,dy]$.

(1) 自點 (0，1) 經直線至點 (1，2)

(2) 先自點 (0，1) 經直線至點 (1，1)，然後經直線至點 (1，2)

(3) C：$x=t$，$y=t^2+1$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$

5. 設 $\mathbf{F}(x, y)=x^2\mathbf{i}+xy\mathbf{j}$，且 C 為半圓 $\mathbf{R}(t)=2\cos t\mathbf{i}+2\sin t\mathbf{j}$ $(0\leqslant t\leqslant \pi)$，計算 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$.

6. 若質點在力 $\mathbf{F}(x, y)=xy\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}$ 的作用下，由點 (0，0) 沿著曲線 $x=y^2$ 移到點 (1，1)，求所作的功.

7. 計算 $\int_C yz\,dx-xz\,dy+xy\,dz$，其中曲線 C 為：$x=e^t$，$y=e^{3t}$，$z=e^{-t}$，$0\leqslant t\leqslant 1$.

8. 若 $\mathbf{F}=(3x^2+6y)\mathbf{i}-14yz\mathbf{j}+20xz^2\mathbf{k}$，求沿著下列路徑的線積分.

(1) C：$\mathbf{R}=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$

(2) 依次連接 (0，0，0)、(1，0，0)、(1，1，0) 及 (1，1，1) 等四點所成的折線

(3) 自點 (0，0，0) 經直線至點 (1，1，1)

9. 若 $\mathbf{F}=3xy\mathbf{i}-y^2\mathbf{j}$，計算 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$，其中 C：$y=2x^2$ 爲平面上自點 (0，0) 至點 (1，2) 的曲線.

10. 設有一力 $\mathbf{F}=(2x-y+z)\mathbf{i}+(x+y-z^2)\mathbf{j}+(3x-2y+4z)\mathbf{k}$，且在 xy-平面上，C 爲以原點作圓心而半徑爲 3 的圓，求此力沿著 C 移動一物體繞一圈所作的功.

15-6 與路徑無關的線積分

一般，線積分 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ 的值與曲線 C 有關. 然而，我們將在本節中說明，當被積分函數滿足適當條件時，線積分的值僅與曲線 C 的兩端點位置有關，而與連接該兩端點的曲線形狀無關. 在這種情形當中，線積分的計算大大地簡化.

首先，我們在此舉出一個例子.

【例題 1】 利用參數

已知 $\mathbf{F}(x, y)=y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$，試沿著下列曲線計算積分.

(1) 直線 $y=x$ 自點 (0，0) 至點 (1，1) 的部分

(2) 拋物線 $y=x^2$ 自點 (0，0) 至點 (1，1) 的部分

(3) 立方曲線 $y=x^3$ 自點 (0，0) 至點 (1，1) 的部分

【解】

(1) 以 $x=t$ 作爲參數，則曲線 C 爲 $\mathbf{R}(t)=t\mathbf{i}+t\mathbf{j}$ $(0\leq t\leq 1)$.

因 $\mathbf{F}(x, y)=y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$，故 $\mathbf{F}(x(t), y(t))=t\mathbf{i}+t\mathbf{j}$. 於是，

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\int_0^1 (t\mathbf{i}+t\mathbf{j})\cdot(\mathbf{i}+\mathbf{j})\,dt=\int_0^1 2t\,dt=1.$$

(2) 以 $x=t$ 作爲參數，則曲線 C 爲 $\mathbf{R}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}$ $(0\leq t\leq 1)$，

而 $\mathbf{F}(x(t), y(t))=t^2\mathbf{i}+t\mathbf{j}$. 於是，

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\int_0^1 (t^2\mathbf{i}+t\mathbf{j})\cdot(\mathbf{i}+2t\mathbf{j})\,dt=\int_0^1 3t^2\,dt=1.$$

(3) 以 $x=t$ 作為參數，則曲線 C 為 $\mathbf{R}(t)=t\mathbf{i}+t^3\mathbf{j}$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$，
而 $\mathbf{F}(x(t),\ y(t))=t^3\mathbf{i}+t\mathbf{j}$. 於是，

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\int_0^1 (t^3\mathbf{i}+t\mathbf{j})\cdot(\mathbf{i}+3t^2\mathbf{j})\,dt=\int_0^1 4t^3\,dt=1.$$

在本例中，我們對線積分得到相同的值，即使我們沿著連接點 (0，0) 到點 (1，1) 的三條不同路徑；其實，這並非偶然。下面定理告訴我們就是這種情形，因 $\mathbf{F}(x,\ y)=y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$ 為某函數 ϕ 的梯度 (明確地說，$\mathbf{F}(x,\ y)=\nabla\phi(x,\ y)$，此處 $\phi(x,\ y)=xy$).

定理 15.3　線積分基本定理

設 $\mathbf{F}(x,\ y)=P(x,\ y)\mathbf{i}+Q(x,\ y)\mathbf{j}$，$P$ 與 Q 在包含兩點 $(x_0,\ y_0)$ 與 $(x_1,\ y_1)$ 的某區域皆為連續。若 $\mathbf{F}(x,\ y)=\nabla\phi(x,\ y)$ 對該區域中每一點皆成立，則對於始點在 $(x_0,\ y_0)$ 且終點在 $(x_1,\ y_1)$ 而完全位於該區域內的任意分段平滑曲線 C 而言，

$$\int_C \mathbf{F}(x,\ y)\cdot d\mathbf{R}=\phi(x_1,\ y_1)-\phi(x_0,\ y_0)$$

證　我們僅對平滑曲線 C 給予證明.

若 C 的參數方程式為 $x=x(t)$，$y=y(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$，則曲線 C 的始點與終點分別為

$$(x_0,\ y_0)=(x(a),\ y(a))$$
$$(x_1,\ y_1)=(x(b),\ y(b))$$

因 $\mathbf{F}(x,\ y)=\nabla\phi(x,\ y)$，可知

$$\mathbf{F}(x,\ y)=\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}$$

故 $$\int_C \mathbf{F}(x,\ y)\cdot d\mathbf{R}=\int_C \frac{\partial\phi}{\partial x}\,dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}\,dy=\int_a^b\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)dt$$

$$=\int_a^b \frac{d}{dt}\,[\phi(x(t),\ y(t))]\,dt=\phi(x(t),\ y(t))\Big|_a^b$$

$$=\phi(x(b),\ y(b))-\phi(x(a),\ y(a))=\phi(x_1,\ y_1)-\phi(x_0,\ y_0).$$

因定理 15.3 中的式子的等號右邊僅含 ϕ 在兩端點 (x_0, y_0) 與 (x_1, y_1) 的值，故左邊的積分對於連接這兩點的每一條分段平滑曲線 C 有相同的值，我們稱該積分與路徑 C 無關．若向量函數 $\mathbf{F}=\nabla\phi$，則稱 $\mathbf{F}$ 爲**保守**，ϕ 爲 $\mathbf{F}$ 的**位勢函數**，而 $\mathbf{F}$ 所產生的向量場稱爲**保守場**．定理 15.3 告訴我們，若 $\mathbf{F}$ 在某區域爲保守，C 爲在該區域中的路徑，則線積分 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ 與路徑無關，且積分值可由位勢函數在該路徑兩端點的值決定．

【例題 2】 利用線積分基本定理

函數 $\mathbf{F}(x, y)=y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$ 爲 $\phi(x, y)=xy$ 的梯度，於是，沿著自點 $(0, 0)$ 至點 $(1, 1)$ 的任意分段平滑曲線 C，

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\phi(1, 1)-\phi(0, 0)=1-0=1$$

此結果與例題 1 所得結果一致．

定理 15.4

設 $\mathbf{F}(x, y)=P(x, y)\mathbf{i}+Q(x, y)\mathbf{j}$，其中 P 與 Q 在某開區域皆有連續的一階偏導函數，若 $\mathbf{F}(x, y)=\nabla\phi(x, y)$，則

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

在該區域中每一點皆成立．

證 因 $\mathbf{F}(x, y)=\nabla\phi(x, y)$，可知

$$P(x, y)=\frac{\partial\phi}{\partial x},\quad Q(x, y)=\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

故
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}$$

又 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 與 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 皆爲連續，可得 $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}$，

所以，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$．

定理 15.4 的逆敘述未必成立；若欲成立，則必須有夠強的條件．若區域 R 中每一條閉曲線可始終不離開 R，而連續地縮至 R 中之任一點，則區域 R 稱為**單連通**；否則，稱為**多連通**．直觀上，單連通區域沒有任何"洞"，而多連通區域有"洞"．我們可想像這一條閉曲線，好像一條橡皮圈，可移動並漸漸地縮小至一點．

例如，在平面上，圓、矩形等的內部均為單連通區域，而圓環則為多連通區域．在三維空間中，球或立方體的內部，兩同心球間的部分等均為單連通；但一環面的內部，及移去一直徑的球內部等則為多連通．

定理 15.5

設 $\mathbf{F}(x, y)=P(x, y)\mathbf{i}+Q(x, y)\mathbf{j}$，其中 P 與 Q 在某單連通開區域皆有連續的一階偏導函數，若對該區域中每一點，

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

則存在一函數 $\phi(x, y)$ 使得 $\mathbf{F}(x, y)=\nabla\phi(x, y)$.

【例題 3】　利用定理 15.5

試證 $\mathbf{F}(x, y)=2xy^3\mathbf{i}+(1+3x^2y^2)\mathbf{j}$ 為某函數 ϕ 的梯度．

【解】 因 $P(x, y)=2xy^3$ 且 $Q(x, y)=1+3x^2y^2$，可得

$$\frac{\partial P}{\partial y}=6xy^2=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

故 $\mathbf{F}$ 為某函數 ϕ 的梯度．

【例題 4】　利用偏積分

某質點在力 $\mathbf{F}(x, y)=e^y\mathbf{i}+xe^y\mathbf{j}$ 的作用下，沿著半圓 C：$\mathbf{R}(t)=\cos t\mathbf{i}+\sin t\mathbf{j}$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$ 移動，如圖 15-15 所示，求所作的功．

【解】 因 $P(x, y)=e^y$ 且 $Q(x, y)=xe^y$，可得

$$\frac{\partial P}{\partial y}=e^y=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

故

$$\mathbf{F}(x, y)=\nabla\phi(x, y).$$

由 $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}=e^{y}$，

可得 $\phi(x,\ y)=xe^{y}+h(y)$，於是

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}=xe^{y}+h'(y)$$

由 $xe^{y}+h'(y)=xe^{y}$，可得 $h'(y)=0$，
故 $h(y)=k$.
因此，$\phi(x,\ y)=xe^{y}+k$
依定理 15.3 可得所作的功爲

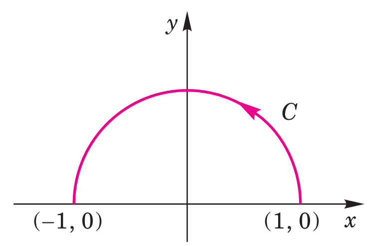


圖 15-15

$$W=\int_{C} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\phi(-1,\ 0)-\phi(1,\ 0)=-1-1=-2.$$

若曲線 C 是由始點 $(x_0,\ y_0)$ 前進到終點 $(x_1,\ y_1)$，且線積分 $\int_{C} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ 與連接這兩點的路徑無關，則寫成

$$\int_{C} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\int_{(x_0,\ y_0)}^{(x_1,\ y_1)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$$

或

$$\int_{C} P(x,\ y)\ dx+Q(x,\ y)\ dy=\int_{(x_0,\ y_0)}^{(x_1,\ y_1)} P(x,\ y)\ dx+Q(x,\ y)\ dy.$$

習題 15.6

在 1～5 題中，證明線積分與路徑無關。

1. $\displaystyle\int_{(1,\ 4)}^{(3,\ 1)} 2xy^{3}\ dx+(2+3x^{2}y^{2})\ dy$

2. $\displaystyle\int_{(-1,\ 2)}^{(2,\ 3)} y^{2}\ dx+2xy\ dy$

3. $\displaystyle\int_{(1,\ 2)}^{(4,\ 0)} 3y\ dx+(3x+y)\ dy$

4. $\displaystyle\int_{(0,\ 0)}^{(3,\ 2)} 2xe^{y}\ dx+x^{2}e^{y}\ dy$

5. $\displaystyle\int_{(-1,\ 2)}^{(0,\ 1)} (3x-y+2)\ dx-(x+4y+3)\ dy.$

6. 求力 $\mathbf{F}(x, y)=ye^{xy}\mathbf{i}+xe^{xy}\mathbf{j}$ 作用於由 $P(-1, 1)$ 移到 $Q(2, 0)$ 之質點所作的功.

7. 令 $\mathbf{F}(x, y)=(e^{y}+ye^{x})\mathbf{i}+(xe^{y}+e^{x})\mathbf{j}$. 若質點

(1) 由 $(2, 0)$ 沿著 x-軸移到 $(-2, 0)$

(2) 由 $(2, 0)$ 沿著圓 $x^2+y^2=4$ 的上半部移到 $(-2, 0)$

(3) 由 $(a, 0)$ 沿著橢圓 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的上半部移到 $(-a, 0)$

(4) 繞圓 $x^2+y^2=4$ 一圈

求力 $\mathbf{F}$ 作用於質點所作的功.

∑ 15-7　格林定理

在本節中，我們討論一個引人注目且漂亮的定理，它是用沿著某平面區域邊界的線積分表出在該區域的二重積分.

定理 15.6　格林定理

令 R 爲單連通平面區域，其邊界爲依逆時鐘方向通過的簡單封閉分段平滑曲線 C. 若 $P(x, y)$ 與 $Q(x, y)$ 在包含 R 的某開區域皆有連續的一階偏導函數，則

$$\int_C P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=\iint_R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$

證　爲了簡單起見，我們僅對第 I 型區域證明定理. 證明的重點在於證明

$$\int_C P(x, y)\,dx=-\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\,dA \cdots\cdots\cdots ①$$

與

$$\int_C Q(x, y)\,dy=\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA \cdots\cdots\cdots ②$$

欲證 ① 式，視 R 爲第 I 型區域，如圖 15-16 所示，則

$$R=\{(x, y)|\ a\leqslant x\leqslant b,\ g_1(x)\leqslant y\leqslant g_2(x)\}$$

此處 g_1 與 g_2 皆爲連續函數.

在 C_1 上，取 x 爲參數，則 C_1 的參數方程式爲：$x=x$，$y=g_1(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$，於是，

$$\int_{C_1} P(x,\ y)\ dx=\int_a^b P(x,\ g_1(x))\ dx$$

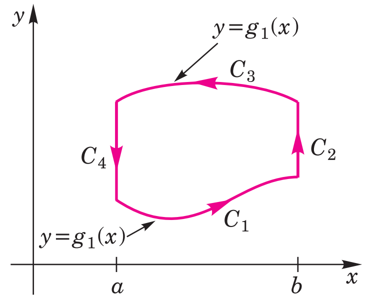


圖 15-16

C_3 爲由右到左，但 $-C_3$ 爲由左到右，因而在 $-C_3$ 上，取 x 爲參數，$-C_3$ 的參數方程式爲：$x=x$，$y=g_2(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$。所以，

$$\int_{C_3} P(x,\ y)\ dx=-\int_{-C_3} P(x,\ y)\ dx=-\int_a^b P(x,\ g_2(x))\ dx$$

在 C_2 或 C_4 上 (任一曲線可能縮爲一點)，x 爲常數，故 $dx=0$，而

$$\int_{C_2} P(x,\ y)\ dx=0=\int_{C_4} P(x,\ y)\ dx$$

因此，

$$\begin{aligned}&\int_C P(x,\ y)\ dx\\&=\int_{C_1} P(x,\ y)\ dx+\int_{C_2} P(x,\ y)\ dx+\int_{C_3} P(x,\ y)\ dx+\int_{C_4} P(x,\ y)\ dx\\&=\int_a^b P(x,\ g_1(x))\ dx-\int_a^b P(x,\ g_2(x))\ dx=-\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\ dA\end{aligned}$$

同理，視 R 爲第 II 型區域，可得 ② 式的證明.

【例題 1】 利用格林定理

計算 $\displaystyle\int_C x^2y\ dx+x\ dy$，其中 C 爲由原點到點 (1，0)，再到點 (1，2)，然後回到

原點等三線段所組成。如圖 15-17 所示。

【解】 因 $P(x, y)=x^2y$ 且 $Q(x, y)=x$，故可得

$$\int_C x^2y\,dx+x\,dy=\iint_R\left[\frac{\partial}{\partial x}(x)-\frac{\partial}{\partial y}(x^2y)\right]dA$$

$$=\int_0^1\int_0^{2x}(1-x^2)\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1(2x-2x^3)\,dx$$

$$=x^2-\frac{1}{2}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{2}.$$

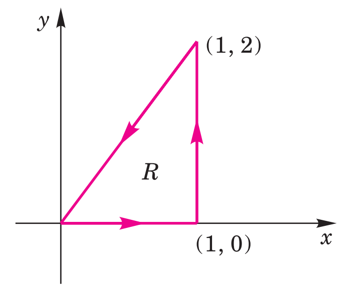


圖 15-17

【例題 2】 利用格林定理

設某質點在力 $\mathbf{F}(x, y)=(e^x-y^3)\mathbf{i}+(\sin y+x^3)\mathbf{j}$ 的作用下，依逆時鐘方向繞著單位圓一圈，求該力所作的功。

【解】 所作的功為

$$W=\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\int_C (e^x-y^3)\,dx+(\sin y+x^3)\,dy$$

$$=\iint_R\left[\frac{\partial}{\partial x}(\sin y+x^3)-\frac{\partial}{\partial y}(e^x-y^3)\right]dA$$

$$=\iint_R(3x^2+3y^2)\,dA=3\iint_R(x^2+y^2)\,dA$$

$$=3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\,dr\,d\theta=\frac{3}{4}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{3\pi}{2}.$$

利用格林定理可產生新的面積公式。在定理 15.6 中，令 $P(x, y)=0$，$Q(x, y)=x$，可得

$$\int_C x\,dy = \iint_R dA = R \text{ 的面積} \tag{15-23}$$

在定理 15.6 中，令 $P(x, y) = -y$，$Q(x, y) = 0$，可得

$$-\int_C y\,dx = \iint_R dA = R \text{ 的面積} \tag{15-24}$$

將 (15-23) 式與 (15-24) 式相加後除以 2，可得

$$R \text{ 的面積} = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx \tag{15-25}$$

【例題 3】 利用 (15-25) 式

求橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 所圍成的面積.

【解】 依逆時鐘方向的橢圓可用參數方程式表成

$$\begin{matrix} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{matrix}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

若將此曲線表成 C，則橢圓所圍成的面積為

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t)(b\cos t)\,dt - (b\sin t)(-a\sin t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(a\cos t)(b\cos t) - (b\sin t)(-a\sin t)]\,dt \\ &= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab \end{aligned}$$

此結果也可以由公式 (15-23) 或 (15-24) 獲得.

雖然我們僅對 R 同時為第 I 型與第 II 型區域的情形去證明，但是我們可將證明推廣到 R 是有限個同時為第 I 型與第 II 型區域的聯集. 例如，若 R 為圖 15-

18 所示的區域，則 $R=R_1 \cup R_2$，其中 R_1 與 R_2 皆為同時是第 I 型與第 II 型區域。R_1 的邊界為 $C_1 \cup C_3$ 而 R_2 的邊界為 $C_2 \cup (-C_3)$，分別對 R_1 與 R_2 利用格林定理，可得

$$\int_{C_1 \cup C_3} P\,dx+Q\,dy=\iint_{R_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$

$$\int_{C_2 \cup (-C_3)} P\,dx+Q\,dy=\iint_{R_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$

將這兩個式子相加，可得

$$\int_{C_1 \cup C_2} P\,dx+Q\,dy=\iint_{R}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$

此處 $R=R_1 \cup R_2$，其邊界為 $C=C_1 \cup C_2$。

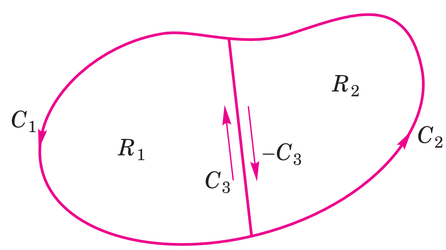


圖 15-18

定理 15.7

設 $\mathbf{F}$ 在區域 R 為連續，則線積分 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ 與 R 中路徑無關的充要條件為：當 C 為 R 中的任一封閉曲線時，$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=0$。

證　沿著封閉曲線 C 的線積分常寫成 $\oint_C$，稱為**環積分**，其中的小圓圈表示 C 為閉曲線。

(1) 設 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ 與 R 中路徑無關，又設 C 為 R 中之任一封閉曲線，而在 C 上取兩個不同的點，如圖 15-19 中的 P 與 Q，將 C 分為兩弧段 C_1 及 C_2，則

$$\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\int_{C_2^*} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=-\int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

其中 C_2^* 表示沿著 C_2 的逆向路徑。
因此，① 式變為

$$\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}+\int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

(2) 設 $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=0$，則有 ② 式，其次有 ① 式，故線積分與路徑無關。

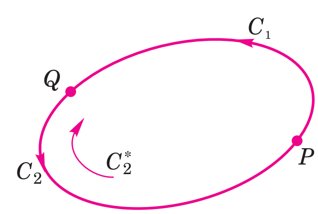


圖 15-19

習題 15.7

在 1～8 題中，利用格林定理計算線積分，其中假設曲線 C 是依逆時鐘方向。

1. $\int_C y^2\,dx+(x^2+y)\,dy$；$C$ 為具有頂點 (0，0)，(1，0)，(1，1) 與 (0，1) 的正方形。

2. $\int_C 3xy\,dx+2xy\,dy$；C 為由 $x=-2$，$x=4$，$y=1$ 與 $y=2$ 所圍成的長方形。

3. $\int_C (x^2-y^2)\,dx+(x+y)\,dy$；$C$ 為圓 $x^2+y^2=9$。

4. $\int_C x\cos y\,dx - y\sin x\,dy$；$C$ 爲具有頂點 $(0,\ 0)$，$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 與 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ 的正方形.

5. $\int_C y\tan^2 x\,dx + \tan x\,dy$；$C$ 爲圓 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$.

6. $\int_C (e^x+y^2)\,dx+(2e^y+x^2)\,dy$；$C$ 爲在 $y=x$ 與 $y=x^2$ 之間所圍成區域的邊界.

7. $\int_C \cos x\sin y\,dx+\sin x\cos y\,dy$；$C$ 爲具有頂點 $(0,\ 0)$，$(3,\ 3)$ 與 $(0,\ 3)$ 的三角形.

8. $\int_C y\,dx - x\,dy$；C 爲心臟線 $r=2(1+\cos\theta)$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

9. 利用：(1) 公式 (15-23)　　(2) 公式 (15-24)
求例題 3 中的橢圓區域面積.

15-8　散度，旋度

在本節中，我們定義被用在向量場的兩個運算，每一個運算像微分；其中一個產生**純量場**，而另一個產生**向量場**.

定義 15.8

設向量函數 $\mathbf{F}(x,\ y,\ z)=f_1(x,\ y,\ z)\mathbf{i}+f_2(x,\ y,\ z)\mathbf{j}+f_3(x,\ y,\ z)\mathbf{k}$ 爲可微分，則函數

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}$$

稱爲 $\mathbf{F}$ 的**散度**或 $\mathbf{F}$ 所產生向量場的散度.

div $\mathbf{F}$ 亦可寫成 $\nabla\cdot\mathbf{F}$，即

$$\operatorname{div} \mathbf{F}=\nabla\cdot\mathbf{F}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(f_1\mathbf{i}+f_2\mathbf{j}+f_3\mathbf{k})$$

$$=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z} \tag{15-26}$$

(15-26) 式中的“乘積”項 $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f_1$, $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)f_2$ 及 $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)f_3$ 分別爲偏導函數 $\frac{\partial f_1}{\partial x}$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}$, $\frac{\partial f_3}{\partial z}$. 因 $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\cdot\mathbf{i}=\frac{\partial f_1}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\cdot\mathbf{j}=\frac{\partial f_2}{\partial y}$, $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}\cdot\mathbf{k}=\frac{\partial f_3}{\partial z}$, 故 (15-26) 式可改寫成

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\cdot\mathbf{i}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\cdot\mathbf{j}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}\cdot\mathbf{k}$$

關於散度的一些性質，今摘要如下：

(1) $\nabla\cdot(\mathbf{F}\pm\mathbf{G})=\nabla\cdot\mathbf{F}\pm\nabla\cdot\mathbf{G}$

(2) $\nabla\cdot(k\mathbf{F})=k\nabla\cdot\mathbf{F}$ (k 爲常數)

(3) $\nabla\cdot(g\mathbf{F})=(\nabla g)\cdot\mathbf{F}+g(\nabla\cdot\mathbf{F})$.

我們僅證明 (3)：

$$\nabla\cdot(g\mathbf{F})=\frac{\partial}{\partial x}(gf_1)+\frac{\partial}{\partial y}(gf_2)+\frac{\partial}{\partial z}(gf_3)$$

$$=\left(f_1\frac{\partial g}{\partial x}+f_2\frac{\partial g}{\partial y}+f_3\frac{\partial g}{\partial z}\right)+g\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)$$

$$=(\nabla g)\cdot\mathbf{F}+g(\nabla\cdot\mathbf{F}).$$

【例題 1】 利用定義 15.8

若 $\mathbf{F}=xe^y\mathbf{i}+e^{xy}\mathbf{j}+\sin yz\mathbf{k}$，求 $\operatorname{div}\mathbf{F}$.

【解】 $\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{\partial}{\partial x}(xe^y)+\frac{\partial}{\partial y}(e^{xy})+\frac{\partial}{\partial z}(\sin yz)=e^y+xe^{xy}+y\cos yz.$

下面一個例題係由流體力學中選出，可初步說明向量場散度的物理意義.

【例題 2】　散度的意義

試說明散度在流體中的意義.

【解】　考慮流體在任一點的流速爲 $\mathbf{v}=v_1(x, y, z)\mathbf{i}+v_2(x, y, z)\mathbf{j}+v_3(x, y, z)\mathbf{k}$. 假設 $P(x, y, z)$ 爲流體所流過空間中的一點，若以 P 點爲中心，在其附近取一個與各坐標軸平行之邊 Δx，Δy，Δz 所成的長方體，如圖 15-20 所示，其中面 $ABCD$ 的中心爲 $M\left(x-\dfrac{\Delta x}{2}, y, z\right)$，面 $EFGH$ 的中心爲 $N\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}, y, z\right)$. 現在，我們來探討一下長方體在單位時間內流出流入的流量 (體積). 流體沿 x-軸方向通過面 $ABCD$ 而進入長方體內的體積，等於流速 $\mathbf{v}$ 在 M 點之 x 分量 $v_1\left(x-\dfrac{\Delta x}{2}, y, z\right)$ 與 $\Delta y\,\Delta z$ 的乘積. 無限小的 v_1 在 (x, y, z) 之泰勒展開式中，若二階以上的項無限小而忽略不計，則

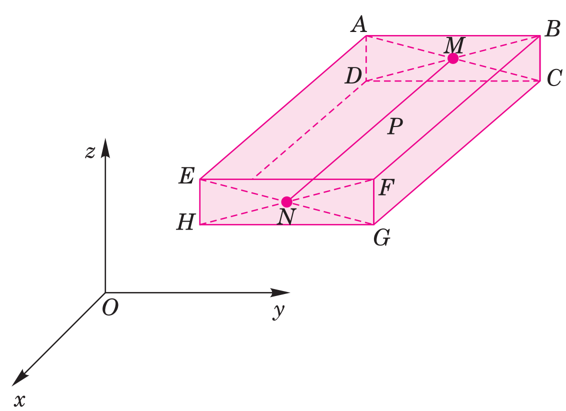


圖 15-20

$$v_1\left(x-\frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\Delta y\,\Delta z=\left[v_1(x, y, z)-\frac{1}{2}\,\frac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x\right]\Delta y\,\Delta z$$

同理，由面 $EFGH$ 流向外的流體體積爲

$$\left[v_1(x, y, z)+\frac{1}{2}\,\frac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x\right]\Delta y\,\Delta z$$

此相對兩面流量之差等於該相對兩面間向外流出的總體積，即 x 方向共流出的量爲 $\dfrac{\partial v_1}{\partial x}\,\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$，再將左右面及上下面合併計算，結果在單位時間內自長方體向外流出的總體積爲

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z=(\text{div }\mathbf{v})\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$$
$$=(\nabla\cdot\mathbf{v})\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$$

因此，div **v** 即表示在 P 點於單位時間內單位體積流出的體積，這就是所謂 **v** 的散度.

在第十三章中，我們定義了由**純量場** f 至**向量場** ∇f 的**算子** ∇，現在再說明向量 ∇f 的**散度**，即

$$\nabla\cdot(\nabla f)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$
$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f$$

寫成 $\text{div (grad } f)=\nabla^2 f$. $\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}=\nabla\cdot\nabla$ 稱爲 **Laplace 算子.**

定義 15.9

設向量函數 $\mathbf{F}(x, y, z)=f_1(x, y, z)\,\mathbf{i}+f_2(x, y, z)\,\mathbf{j}+f_3(x, y, z)\,\mathbf{k}$ 爲可微分，則函數

$$\text{curl }\mathbf{F}=\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

稱爲 **F** 的**旋度**或 **F** 所產生向量場的旋度.

curl **F** 亦可寫成 $\nabla\times\mathbf{F}$，即，

$$\text{curl }\mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ f_1 & f_2 & f_3\end{vmatrix} \tag{15-27}$$

有關旋度的性質，列述如下：

(1) $\nabla\times(\mathbf{F}\pm\mathbf{G})=\nabla\times\mathbf{F}\pm\nabla\times\mathbf{G}$
(2) $\nabla\times(k\mathbf{F})=k\nabla\times\mathbf{F}$ (k 爲常數)
(3) $\nabla\times(g\mathbf{F})=(\nabla g)\times\mathbf{F}+g(\nabla\times\mathbf{F})$
(4) $\nabla\times\nabla f=\mathbf{0}$
(5) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})=0$
(6) $\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G})=\mathbf{G}\cdot(\nabla\times\mathbf{F})-\mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{G})$.

【例題 3】　利用旋度的定義

若 $\mathbf{F}=x^2y\mathbf{i}-2xz\mathbf{j}+2yz\mathbf{k}$，求 $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})$.

【解】

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})=\nabla\times\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2y & -2xz & 2yz\end{vmatrix}$$

$$=\nabla\times[(2x+2z)\mathbf{i}-(x^2+2z)\mathbf{k}]$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2x+2z & 0 & -x^2-2z.\end{vmatrix}=2(x+1)\mathbf{j}.$$

在許多應用方面，旋度扮演著極重要的角色，我們舉出下面的例子作爲說明.

【例題 4】　速度的旋度

在以等角速度 ω 旋轉的剛體中，求速度的旋度.

【解】　考慮以等角速度 ω 繞空間一固定軸旋轉的剛體運動. 旋轉軸的方向與角速度的方向相同，其旋轉方向循右手系，如圖 15-21 所示. 設 P 爲剛體上的一點，位於與旋轉軸垂直之平面上的圓周上，今取該軸上一點 O 爲

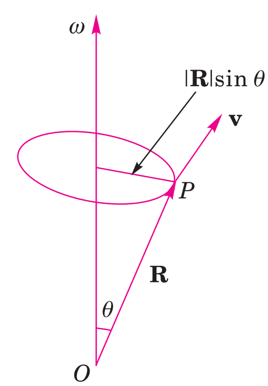


圖 15-21

原點，則 P 點的位置向量為 $\mathbf{R}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，$\mathbf{R}$ 與軸成 θ 角．我們知道在 P 的線速度 $\mathbf{v}$ 垂直於 ω 及 $\mathbf{R}$，其大小為 $|\omega||\mathbf{R}|\sin\theta$，故 $\mathbf{v}=\omega\times\mathbf{R}$．因 $\omega=\omega_1\mathbf{i}+\omega_2\mathbf{j}+\omega_3\mathbf{k}$，$\omega_1$，$\omega_2$ 及 ω_3 皆為定數，故

$$\mathbf{v}=\omega\times\mathbf{R}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\\ x & y & z\end{vmatrix}=(\omega_2 z-\omega_3 y)\mathbf{i}+(\omega_3 x-\omega_1 z)\mathbf{j}+(\omega_1 y-\omega_2 x)\mathbf{k}$$

可得
$$\nabla\times\mathbf{v}=2\omega_1\mathbf{i}+2\omega_2\mathbf{j}+2\omega_3\mathbf{k}=2\omega$$

即，在旋轉剛體中，速度的旋度等於角速度的兩倍，其方向亦同於旋轉軸．

定理 15.8

設 $\mathbf{F}=f_1\mathbf{i}+f_2\mathbf{j}+f_3\mathbf{k}$，且 f_1，f_2，f_3 與其一階偏導函數在包含曲線 C 的區域 R 皆為連續．若線積分 $\int_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ 與 R 中路徑無關，則 $\operatorname{curl}\mathbf{F}=\mathbf{0}$（此時 $\mathbf{F}$ 稱為**無旋度**）．反之，若 $\operatorname{curl}\mathbf{F}=\mathbf{0}$，且 R 為單連通，則 $\int_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ 與 R 中路徑無關．

【例題 5】　利用定理 15.8

設 $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，試證 $\mathbf{F}$ 的線積分與路徑無關．

【解】

$$\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=\mathbf{0}$$

故 $\mathbf{F}$ 的線積分與路徑無關．

【例題 6】　利用定理 15.8

(1) 若有一力 $\mathbf{F}=(2xy+z^3)\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}+3xz^2\mathbf{k}$，試證 $\mathbf{F}$ 為一**保守力場**．

(2) 求一純量函數 ϕ，使得 $\mathbf{F}=\nabla\phi$.

(3) 移動一物體自點 (1，−2，1) 至點 (3，1，4) 所作的功.

【解】

(1)

$$\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xy+z^3 & x^2 & 3xz^2\end{vmatrix}=\mathbf{0}$$

可知 $\mathbf{F}$ 的線積分與路徑無關，故 $\mathbf{F}$ 爲一保守力場.

(2) 方法 1：

由 $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i}+\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}+\dfrac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}=(2xy+z^3)\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}+3xz^2\mathbf{k}$，可得

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=2xy+z^3 \cdots\cdots ①$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=x^2 \cdots\cdots ②$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=3xz^2 \cdots\cdots ③$$

將 ① 式對 x 積分，視 y、z 爲常數，可得

$$\phi(x,\ y,\ z)=x^2y+xz^3+g(y,\ z) \cdots\cdots ④$$

上式對 y 偏微分，因而

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=x^2+\frac{\partial g}{\partial y} \cdots\cdots ⑤$$

比較 ② 及 ⑤ 式，則

$$\frac{\partial g}{\partial y}=0$$

上式對 y 積分，視 z 爲常數，可得

$$g(x,\ y)=h(z)$$

代入 ④ 式，可得

$$\phi(x,\ y,\ z)=x^2y+xz^3+h(z) \cdots\cdots ⑥$$

上式對 z 偏微分，因而

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=3xz^2+h'(z) \cdots\cdots ⑦$$

比較 ③ 及 ⑦ 式，則

$$h'(z)=0，\text{即，} h(z)=c \qquad (c \text{ 爲常數})$$

代入 ⑥ 式，故

$$\phi(x, y, z)=x^2y+xz^3+c$$

方法 2：

因 $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\nabla\phi\cdot d\mathbf{R}=\dfrac{\partial\phi}{\partial x}dx+\dfrac{\partial\phi}{\partial y}dy+\dfrac{\partial\phi}{\partial z}dz=d\phi$，可知

$$\begin{aligned} d\phi &=(2xy+z^3)\,dx+x^2\,dy+3xz^2\,dz \\ &=(2xy\,dx+x^2\,dy)+(z^3\,dx+3xz^2\,dz) \\ &=d(x^2y)+d(xz^3)=d(x^2y+xz^3) \end{aligned}$$

故 $\phi(x, y, z)=x^2y+xz^3+c$ (c 爲常數)。

(3) 方法 1：

$$\text{功}=\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\int_{(1,\ -2,\ 1)}^{(3,\ 1,\ 4)}(2xy+z^3)\,dx+x^2\,dy+3xz^2\,dz$$

$$=\int_{(1,\ -2,\ 1)}^{(3,\ 1,\ 4)}d(x^2y+xz^3)=x^2y+xz^3\Big|_{(1,\ -2,\ 1)}^{(3,\ 1,\ 4)}=202$$

方法 2：

由 (2)，$\phi(x, y, z)=x^2y+xz^3+c$。因此，可得

$$\text{功}=\phi(3, 1, 4)-\phi(1, -2, 1)=202$$

【例題 7】 利用極坐標

若 $\mathbf{F}=\dfrac{-y}{x^2+y^2}\,\mathbf{i}+\dfrac{x}{x^2+y^2}\,\mathbf{j}$，

(1) 計算 $\nabla\times\mathbf{F}$，　(2) 試求 $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$，$C$ 爲任一封閉曲線。

【解】

(1)

$$\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} & 0\end{vmatrix}=\mathbf{0}$$

(在原點 (0，0) 除外的任何區域中)

(2) $\displaystyle\oint_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\oint_c \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}$

令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，則

$$dx=-r\sin\theta\,d\theta+\cos\theta\,dr,$$
$$dy=r\cos\theta\,d\theta+\sin\theta\,dr$$

且
$$\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}=d\theta=d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$$

在圖 15-22(i) 中，封閉曲線 C 圍繞原點，在 P 點時，$\theta=0$；當由 P 點繞一圈又回到 P 點時，$\theta=2\pi$。因此，

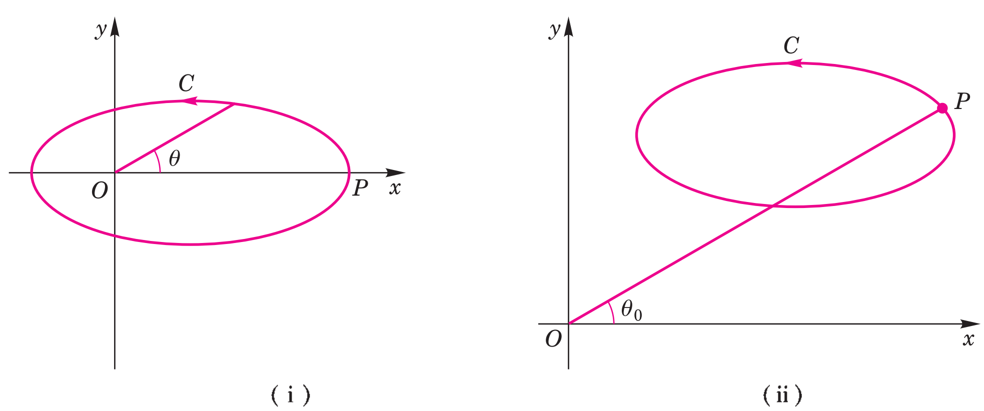


圖 15-22

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\int_0^{2\pi} d\theta=2\pi$$

在圖 15-22(ii) 中，封閉曲線 C 不圍繞原點，在 P 點時，$\theta=\theta_0$；當由 P 點繞一圈又回到 P 點時，$\theta=\theta_0$。因此，

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\int_{\theta_0}^{\theta_0} d\theta=0$$

在任何不包含原點的單連通區域中，$\mathbf{F}$ 的線積分與路徑無關。若區域包含原點，則無法滿足定理 15.7 的條件 (因 f_1 與 f_2 在原點皆不連續)，因此，不能保證線積分與路徑無關。

習題 15.8

1. 試證 $\nabla\cdot(f\nabla g)=f\nabla^2 g+\nabla f\cdot\nabla g$.

2. 若 $f(x,\ y)=\ln(x^2+y^2)$，試證 $\nabla^2 f=0$.

3. 設 $\mathbf{R}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，試證：(1) $\nabla^2\left(\dfrac{1}{|\mathbf{R}|}\right)=0$ (2) $\nabla\cdot\left(\dfrac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3}\right)=0$.

4. 試證 $\nabla^2(fg)=f\nabla^2 g+2\nabla f\cdot\nabla g+g\nabla^2 f$.

5. 若 $\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{0}$，且 $\mathbf{R}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，求 $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{R})$.

6. 試證：(1) $\nabla\times(\nabla f)=\mathbf{0}$，(2) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})=0$.

7. 若 Ω 爲常向量，且 $\mathbf{v}=\Omega\times\mathbf{R}$，試證 $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$.

8. 若 $\mathbf{F}=f_1\mathbf{i}+f_2\mathbf{j}+f_3\mathbf{k}$ 定義在單連通區域，試證存在一純量函數 $\phi=\phi(x,\ y,\ z)$ 使得 $d\phi=f_1\,dx+f_2\,dy+f_3\,dz$ 的充要條件爲 $\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$.

9. (1) 若一力 $\mathbf{F}=(y^2\cos x+z^3)\mathbf{i}+(2y\sin x-4)\mathbf{j}+(3xz^2+2)\mathbf{k}$，試證 $\mathbf{F}$ 爲一保守力場.
(2) 求一純量函數 ϕ，使 $\mathbf{F}=\nabla\phi$.
(3) 此力移動一物體自點 $(0,\ 1,\ -1)$ 至點 $(\pi/2,\ -1,\ 2)$ 所作的功多少？

15-9 面積分

在本節中，我們將討論面積分，它們是在三維空間中曲面上的積分，這類積分出現

在流體、熱流、電學、磁學、質量與重心等問題裡.

令 Ω 為具有有限曲面面積的曲面，定義為 $z=g(x, y)$，它在 xy-平面上的投影是區域 R，且函數 $f(x, y, z)$ 為定義在 Ω 的連續函數. 我們假設 g_x 與 g_y 在 R 皆為連續，此假設保證在 Ω 上的每一點皆有切平面. 首先，將 Ω 分割成具有曲面面積 ΔS_1，ΔS_2，…，ΔS_n 的 n 個小曲面，然後作成和

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\,\Delta S_i$$

此處 (x_i^*, y_i^*, z_i^*) 為第 i 個小曲面上的任一點. 函數 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上的面積分定義為

$$\iint_{\Omega} f(x, y, z)\,dS = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\,\Delta S_i \tag{15-28}$$

而

$$S = \text{曲面 } \Omega \text{ 的面積} = \iint_{\Omega} dS \tag{15-29}$$

定理 15-9

(a) 令曲面 Ω 的方程式為 $z=g(x, y)$，它在 xy-平面上的投影為 R. 若 g_x 與 g_y 在 R 皆為連續，且函數 $f(x, y, z)$ 在 Ω 為連續，則

$$\iint_{\Omega} f(x, y, z)\,dS$$

$$= \iint_{R} f(x, y, g(x, y))\sqrt{1+[g_x(x, y)]^2+[g_y(x, y)]^2}\,dA \tag{15-30}$$

(b) 令曲面 Ω 的方程式為 $y=g(x, z)$，它在 xz-平面上的投影為 R. 若 g_x 與 g_z 在 R 皆為連續，且函數 $f(x, y, z)$ 在 Ω 為連續，則

$$\iint_{\Omega} f(x, y, z)\,dS$$

$$= \iint_{R} f(x, g(x, z), z)\sqrt{1+[g_x(x, z)]^2+[g_z(x, z)]^2}\,dA \tag{15-31}$$

(c) 令曲面 Ω 的方程式為 $x=g(y, z)$，它在 yz-平面上的投影為 R. 若 g_y 與 g_z 在 R 皆為連續，且函數 $f(x, y, z)$ 在 Ω 為連續，則

$$\iint_{\Omega} f(x, y, z)\, dS$$
$$=\iint_{R} f(g(y, z), y, z)\sqrt{1+[g_y(y, z)]^2+[g_z(y, z)]^2}\, dA \qquad (15\text{-}32)$$

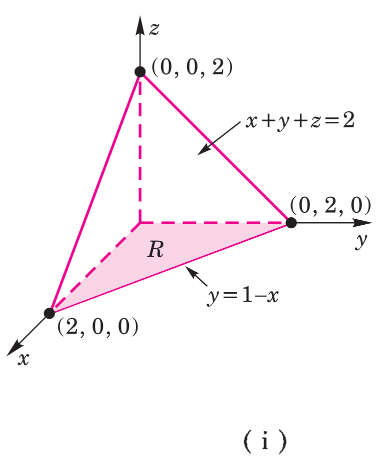
【例題 1】 利用 (15-30) 式

若 Ω 爲平面 $x+y+z=2$ 位於第一卦限中的部分，求面積分

$$\iint_{\Omega} xz\, dS.$$

【解】 因平面方程式可以寫成 $z=g(x, y)=2-x-y$，故 $g_x(x, y)=-1$，$g_y(x, y)=-1$. 區域 R 爲 xy-平面上的三角形區域，如圖 15-23(i) 所示. 於是，

$$\iint_{\Omega} xz\, dS=\iint_{R} x(2-x-y)\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\, dA$$
$$=\sqrt{3}\int_0^2\int_0^{2-x}(2x-x^2-xy)\, dy\, dx$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$



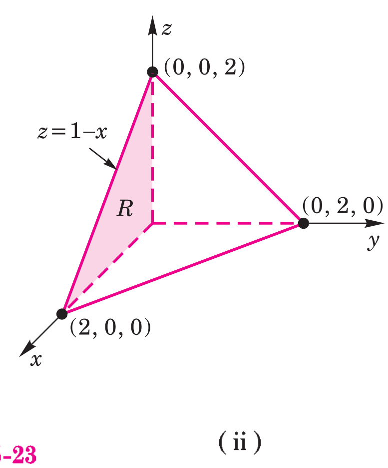


圖 15-23

另解： 因平面方程式可以寫成 $y=g(x,z)=2-x-z$，故 $g_x(x,z)=-1$，$g_z(x,z)=-1$。區域 R 爲 xz-平面上的三角形區域，如圖 15-23(ii) 所示。於是，利用公式 (15-31) 式，可得

$$\iint_{\Omega} xz\,dS=\iint_{R} xz\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,dA$$

$$=\sqrt{3}\int_0^2\int_0^{2-x} xz\,dz\,dx$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

【例題 2】　利用 (15-30) 式

若 Ω 爲圓錐面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在兩平面 $z=1$ 與 $z=2$ 之間的部分，求面積分 $\iint_{\Omega} y^2z^2\,dS$.

【解】 令 $z=g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，則 $g_x(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$g_y(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，故 $\sqrt{1+[g_x(x,y)]^2+[g_y(x,y)]^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

$$\iint_{\Omega} y^2z^2\,dS=\iint_{R} y^2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\sqrt{2}\,dA$$

$$=\sqrt{2}\iint_{R} y^2(x^2+y^2)\,dA$$

此處 $R=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$. 利用極坐標計算上式右邊的二重積分，可得

$$\iint_{\Omega} y^2z^2\,dS=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2 (r\sin\theta)^2(r)^2\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^5\sin^2\theta\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{21\sqrt{2}\pi}{2}.$$

面積分具有下列的性質：

(1) $\iint\limits_{\Omega} kf\,dS=k\iint\limits_{\Omega} f\,dS$ (k 為常數)

(2) $\iint\limits_{\Omega} (f+g)\,dS=\iint\limits_{\Omega} f\,dS+\iint\limits_{\Omega} g\,dS$

(3) $\iint\limits_{\Omega} (f-g)\,dS=\iint\limits_{\Omega} f\,dS-\iint\limits_{\Omega} g\,dS$.

最後，若曲面 Ω 分割成有限多個部分，則各別計算在每一部分的面積分再將所得相加，可得在 Ω 上的面積分. 因此，若 Ω 分割成兩部分 Ω_1 與 Ω_2，則

$$\iint\limits_{\Omega} f\,dS=\iint\limits_{\Omega_1} f\,dS+\iint\limits_{\Omega_2} f\,dS$$

若在曲面上每一點 (邊界點除外) 皆有切平面，則稱該平面為**平滑曲面**. 如果有一曲面本身不是平滑，而是由有限個平滑部分連接所組成者，則稱該曲面為**分段平滑曲面**. 例如，球面是平滑曲面，而立方體表面是分段平滑曲面 (由六個平滑曲面所組成).

在平滑曲面上每一點有兩個方向相反的單位法向量. 這些向量是用不同的名稱來描述，與它們的分量的正負號有關. 例如，若單位法向量有正的 z-分量，則它指向朝上方向而稱為向上單位法向量，若有負的 z-分量，則指向朝下方向而稱為向下單位法向量.

表 15-1 說明用來描述單位法向量 $\mathbf{N}=n_1\mathbf{i}+n_2\mathbf{j}+n_3\mathbf{k}$ 的術語.

表 15-1

分量	術　語
$n_3>0$	向上單位法向量
$n_3<0$	向下單位法向量
$n_2>0$	向右單位法向量
$n_2<0$	向左單位法向量
$n_1>0$	向前單位法向量
$n_1<0$	向後單位法向量

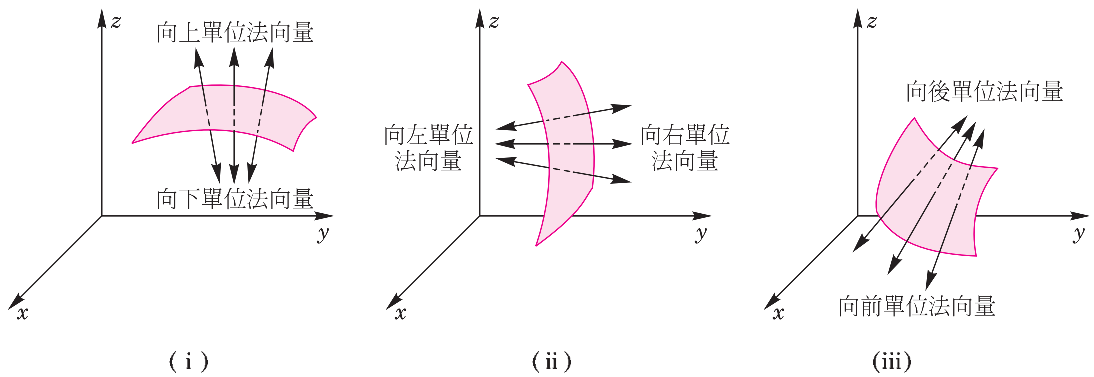


圖 15-24

例如，若 $\mathbf{N}=\frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{i}-\frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{j}+\frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{k}$ 垂直於某曲面，則 $\mathbf{N}$ 爲向上單位法向量 (正的 z-分量)，也是向左單位法向量 (負的 y-分量)，也是向前單位法向量 (正的 x-分量).

欲計算方程式爲 $z=z(x, y)$ 的曲面的單位法向量，我們先改寫此方程式爲 $z-z(x, y)=0$. 令 $F(x, y, z)=z-z(x, y)$，則

$$\nabla F=-\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i}-\frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

垂直於此曲面. 因 $|\nabla F|=\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}$，故

$$\frac{\nabla F}{|\nabla F|}=\frac{-\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i}-\frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}}$$

爲在曲面上點 (x, y, z) 的單位法向量，此爲向上單位法向量. 向下單位法向量爲

$$-\frac{\nabla F}{|\nabla F|}=\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j}-\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}}$$

對於表示爲形如 $y=y(x, z)$ 或 $x=x(y, z)$ 的曲面而言，可用類似的方法計算出單位法向量．今列出所得公式於表 15-2 中．

表 15-2

曲面的方程式	曲面的單位法向量	
$z=z(x, y)$	向上單位法向量爲 $$\frac{-\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}}$$	向下單位法向量爲 $$\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j}-\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}}$$
$y=y(x, z)$	向右單位法向量爲 $$\frac{-\dfrac{\partial y}{\partial x}\mathbf{i}+\mathbf{j}-\dfrac{\partial y}{\partial z}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial z}\right)^2+1}}$$	向左單位法向量爲 $$\frac{\dfrac{\partial y}{\partial x}\mathbf{i}-\mathbf{j}+\dfrac{\partial y}{\partial z}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial z}\right)^2+1}}$$
$x=x(y, z)$	向前單位法向量爲 $$\frac{\mathbf{i}-\dfrac{\partial x}{\partial y}\mathbf{j}-\dfrac{\partial x}{\partial z}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right)^2+1}}$$	向後單位法向量爲 $$\frac{-\mathbf{i}+\dfrac{\partial x}{\partial y}\mathbf{j}+\dfrac{\partial x}{\partial z}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right)^2+1}}$$

當我們沿著平滑曲面 Ω 上任一曲線時，若在此曲線上所有點作出的單位法向量連續地改變 (方向沒有突然改變)，則稱 Ω 爲**可定向**，那些單位法向量構成 Ω 的**定向**，而單位法向量一旦被選定，則稱 Ω 爲 **定向** (或 **雙面**) **曲面**．可定向曲面僅有兩種可能的定向．例如，在圖 15-25(i) 中的曲面可由向上單位法向量來定向，圖 15-25(ii) 中的曲面可由向下單位法向量來定向，但這兩種向量的混合並非定向，如圖 15-25(iii) 的曲面並不是可定向曲面．球面或平滑閉曲面爲可定向，一般，閉曲面是雙面曲面，有所謂的“外面”與“內面”；依照慣例，我們利用從它所包圍空間區域的內部往外射出的單位法向量方向取爲**正定向**，而向內的方向取爲**負定向**．

一個著名的非可定向曲面稱爲 Möbius 帶，它是單面曲面．我們將一長條形的長方形紙帶扭轉一次，然後再將兩端黏在一起即可得到這樣的曲面 (見圖 15-26(i))．假設有一單位向量 $\mathbf{N}$ 垂直此曲面於 P，而 $\mathbf{N}$ 繞著曲面前進時隨時隨地保持著垂直曲面，當 $\mathbf{N}$ 繞完一圈遇到 P 時，它的方向與出發時的方向相反 (見圖 15-26(ii))；因此，這不符合可定向曲面的條件．爲了使您確信這曲面是單面曲面，您可用一支彩色筆

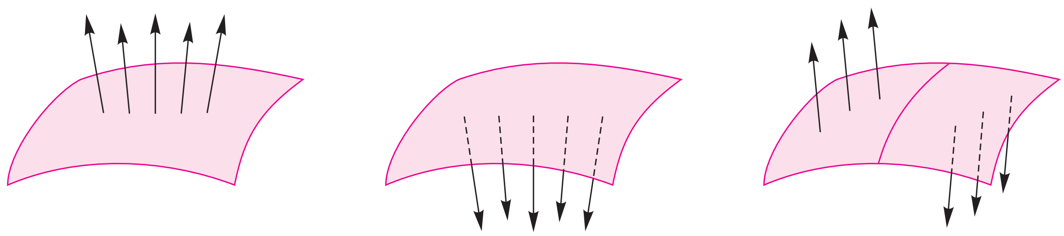


圖 15-25

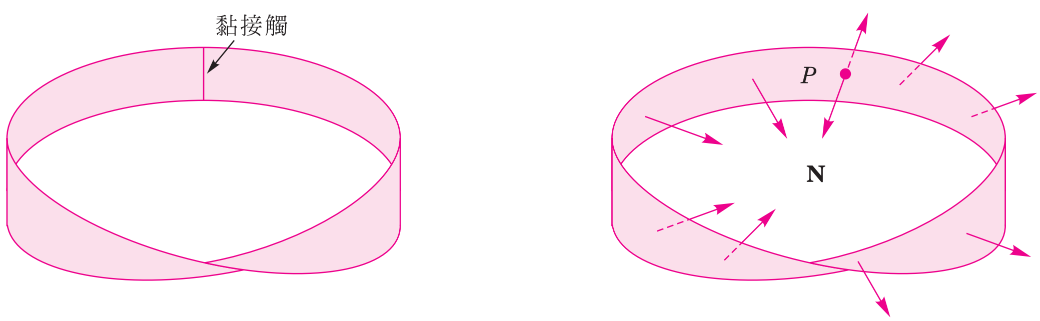


圖 15-26

從某處開始著色，繼續著色，在整個著色過程當中，筆不曾離開紙面，直到開始著色之處為止，您會發現整個紙面皆塗了顏色.

我們在前面已談過用單一參數 t 的向量函數 $\mathbf{R}(t)$ 描述三維空間中的曲線. 現在，我們以同樣的方式，用兩參數 u 與 v 的向量函數 $\mathbf{R}(u, v)$ 來描述三維空間中的曲面.

假設向量函數

$$\mathbf{R}(u,\ v)=x(u,\ v)\mathbf{i}+y(u,\ v)\mathbf{j}+z(u,\ v)\mathbf{k} \tag{15-33}$$

在 uv-平面上的某區域 D 為連續，且在 D 的內部為一對一，其中兩變數 u 與 v 皆為參數. 當 (u, v) 在 D 中改變時，在 R^3 中使

$$x=x(u,\ v),\ y=y(u,\ v),\ z=z(u,\ v) \tag{15-34}$$

的所有點的集合稱為**參數曲面**，記為 Ω，(15-34) 式稱為 Ω 的**參數方程式**，而 D 稱為**參數定義域**. 曲面 Ω 上的點是藉由 u 與 v 的選取而獲得，即，當 (u, v) 在整個區域 D 中移動時，$\mathbf{R}(u, v)$ 的尖端所掃過的軌跡即為 Ω，因而 $\mathbf{R}(u, v)$ 是 Ω 的位置向量，如圖 15-27 所示. $\mathbf{R}(u, v)$ 在 D 的內部為一對一保證 Ω 本身不會相交.

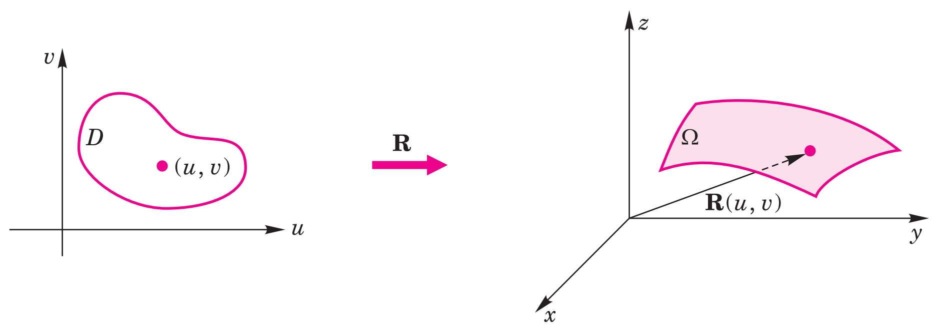


圖 15-27

令列出一些曲面如下：

$x^2+y^2=4 \Leftrightarrow \mathbf{R}(u, v)=2\cos u\mathbf{i}+2\sin u\mathbf{j}+v\mathbf{k}$

$x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0) \Leftrightarrow \mathbf{R}(\phi, \theta)=a\sin\phi\cos\theta\mathbf{i}+a\sin\phi\sin\theta\mathbf{j}+a\cos\phi\ \mathbf{k}$

$(a>0)$，$0\leqslant\phi\leqslant\pi$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

$x^2+y^2=4$，$0\leqslant z\leqslant 1 \Leftrightarrow \mathbf{R}(\theta, z)=2\cos\theta\mathbf{i}+2\sin\theta\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，$0\leqslant z\leqslant 1$

$z=x^2+2y^2 \Leftrightarrow \mathbf{R}(x, y)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+(x^2+2y^2)\mathbf{k}$

若 $\mathbf{R}(u, v)$ 爲參數曲面 Ω 的位置向量，則在 Ω 上有兩種有用的曲線族，一種是 v-曲線 (其中 u 爲常數)，另一種是 u-曲線 (其中 v 爲常數)，這兩種曲線族分別相對應於 uv-平面上的垂直線與水平線. 若 u 保持常數，即，$u=u_0$，則 $\mathbf{R}(u_0, v)$ 變成單一參數 v 的向量函數，其圖形爲 Ω 上的一條曲線 C_1；同理，若 v 保持常數，即，$v=v_0$，則 $\mathbf{R}(u, v_0)$ 的圖形爲 Ω 上的一條曲線 C_2，如圖 15-28 所示. 我們稱這些曲線爲**格子曲線**.

爲了簡單起見，設參數定義域 D 爲 uv-平面上的一個矩形，即，$D=\{(u, v)|a\leqslant u\leqslant b, c\leqslant v\leqslant d\}$，並將 D 分割成許多小矩形. 今考慮 D 中的一個小矩形 D_i，其四個邊在直線 $u=u_0$，$u=u_0+\Delta u$，$v=v_0$ 與 $v=v_0+\Delta v$ 上 (見圖 15-29(i)). 小矩形 D_i 的每一個邊映到 Ω 上的一條曲線段，其中邊 $v=v_0$ 映到 C_1，邊 $u=u_0$ 映到 C_2，因而 D_i 映到 Ω 上的一個小曲面 Ω_i，點 (u_0, v_0) 映到 P_0 (見圖 15-29(ii)).

利用

$$\mathbf{R}_u=\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}$$

與

$$\mathbf{R}_v=\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$

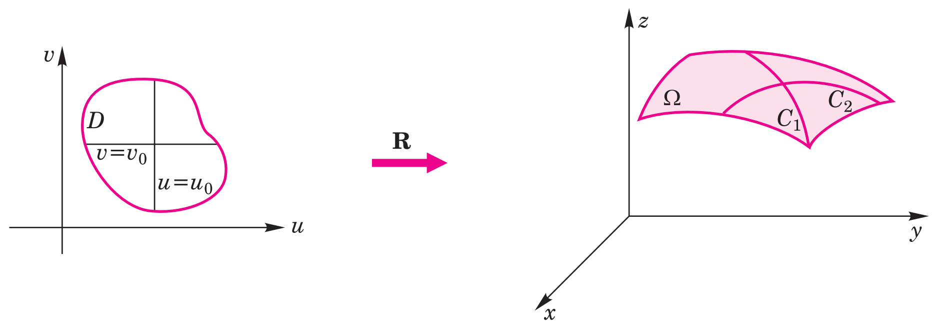


圖 15-28

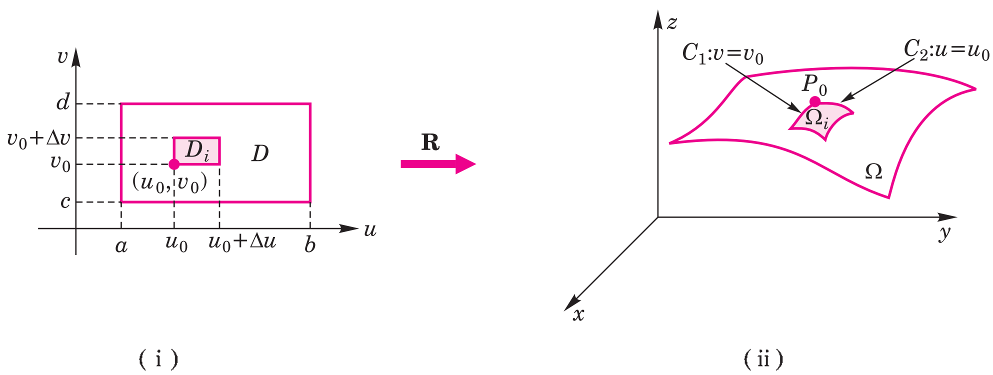


圖 15-29

可知 $\mathbf{R}_u(u_0, v_0)$ 切 C_1 於 P_0，$\mathbf{R}_v(u_0, v_0)$ 切 C_2 於 P_0，因此，$\mathbf{R}_u(u_0, v_0)\times\mathbf{R}_v(u_0, v_0)$ 垂直 Ω 於 P_0。我們利用在 Ω 上 P_0 處的切平面上兩鄰邊是 $\Delta u\mathbf{R}_u(u_0, v_0)$ 與 $\Delta v\mathbf{R}_v(u_0, v_0)$ 的平行四邊形的面積去近似小曲面 Ω_i 的面積 ΔS_i (見圖 15-30)，而此四邊形的面積爲

$$|\Delta u\mathbf{R}_u(u_0, v_0)\times\Delta v\mathbf{R}_v(u_0, v_0)|=|\mathbf{R}_u(u_0, v_0)\times\mathbf{R}_v(u_0, v_0)|\Delta u\Delta v$$

可得
$$\Delta S_i\approx|\mathbf{R}_u(u_0, v_0)\times\mathbf{R}_v(u_0, v_0)|\Delta u\Delta v$$

故 Ω 的面積爲

$$S=\int_c^d\int_a^b|\mathbf{R}_u\times\mathbf{R}_v|\,du\,dv$$

一般，若平滑曲面 Ω 的位置向量爲 $\mathbf{R}(u, v)=x(u, v)\mathbf{i}+y(u, v)\mathbf{j}+z(u, v)\mathbf{k}$，$D$

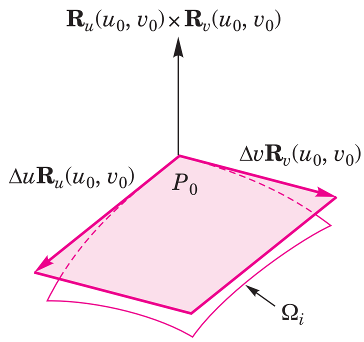


圖 15-30 小曲面 S_i 的放大圖

爲參數定義域，則 Ω 的面積爲

$$S=\iint_D \left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\right| du\, dv \tag{15-35}$$

若我們引進符號

$$d\mathbf{S}=\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\, du\times\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\, dv$$

則 $d\mathbf{S}$ 垂直於 Ω，其大小爲 $dS=|d\mathbf{S}|$. 於是，(15-35) 式可改寫成

$$S=\iint_D |d\mathbf{S}|=\iint_D dS=\iint_D \mathbf{N}\cdot d\mathbf{S} \tag{15-36}$$

此處 $\mathbf{N}$ 爲單位法向量，它與 $d\mathbf{S}$ 同方向.

【例題 3】 利用點法式

已知曲面的位置向量爲 $\mathbf{R}(u, v)=u^2\mathbf{i}+uv\mathbf{j}+v\mathbf{k}$，求在此曲面上對應於 $u=1$，$v=2$ 之點處的切平面方程式.

【解】 對應於 $u=1$，$v=2$ 之點的坐標是 $(1, 2, 2)$，其位置向量爲 $\mathbf{R}_0=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$.

$$\left.\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\right|_{u=1,\ v=2}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}\quad,\quad \left.\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\right|_{u=1,\ v=2}=\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

通過點 $(1, 2, 2)$ 的法向量爲

$$\mathbf{n}=(2\mathbf{i}+2\mathbf{j})\times(\mathbf{j}+\mathbf{k})=2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$$

所以，通過點 (1，2，2) 的切平面方程式爲

$$(\mathbf{R}-\mathbf{R}_0)\cdot\mathbf{n}=2(x-1)-2(y-2)+2(z-2)=0$$

即

$$x-y+z=1.$$

【例題 4】 利用 (15-36) 式

已知曲面的位置向量爲 $\mathbf{R}(u, v)=\cos u\mathbf{i}+\sin u\mathbf{j}+v\mathbf{k}$，$0\leqslant u\leqslant 2\pi$，$0\leqslant v\leqslant 1$，求此曲面的面積.

【解】 $\dfrac{\partial\mathbf{R}}{\partial u}=-\sin u\mathbf{i}+\cos u\mathbf{j}$，$\dfrac{\partial\mathbf{R}}{\partial v}=\mathbf{k}$，$d\mathbf{S}=\left(\dfrac{\partial\mathbf{R}}{\partial u}\times\dfrac{\partial\mathbf{R}}{\partial v}\right)du\,dv$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -\sin u & \cos u & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}du\,dv=(\cos u\mathbf{i}+\sin u\mathbf{j})du\,dv$$

故面積爲 $S=\displaystyle\iint_D|d\mathbf{S}|=\int_0^1\int_0^{2\pi}\sqrt{\cos^2 u+\sin^2 u}\,du\,dv=\int_0^1\int_0^{2\pi}du\,dv=2\pi.$

我們現在考慮 (15-35) 式的特例．假設曲面爲 $z=f(x, y)$，且它在 xy-平面上的投影區域是 R，如圖 15-31 所示．視 x、y 爲參數，則

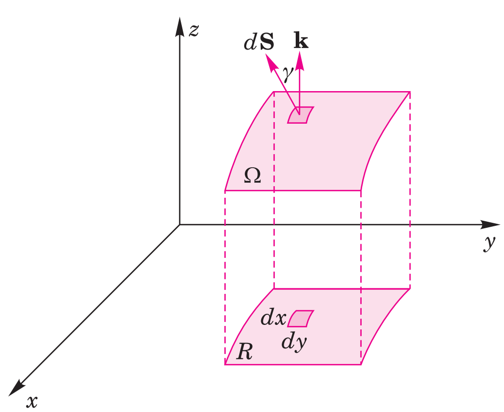


圖 15-31

$$\mathbf{R}(x,\ y)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+f(x,\ y)\mathbf{k}$$

而

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}=\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{k} \qquad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}=\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{k}$$

所以

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}\times\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix}=-\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}-\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

故 $$S=\iint_R \left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}\times\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}\right| dx\,dy=\iint_R \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy \tag{15-37}$$

利用純量積可得

$$|\cos\gamma|=\frac{|d\mathbf{S}\cdot\mathbf{k}|}{|d\mathbf{S}|}=\left[1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{-1/2}$$

故 (15-37) 式變成

$$S=\iint_R \frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|} \tag{15-38}$$

【例題 5】 利用 (15-38) 式

求球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在 $x\geqslant 0$ 之部分的面積.

【解】 此半球面在 yz-平面上的投影區域爲單位圓區域 R. 向前法向量爲

$$\nabla(x^2+y^2+z^2)=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$$

若 γ 爲向前法向量與 $\mathbf{i}$ 的夾角，則

$$\cos\gamma=\frac{(2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k})\cdot\mathbf{i}}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}=\frac{2x}{2}=x$$

故面積爲

$$S=\iint_R \frac{dy\,dz}{\cos\gamma}=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \frac{dy\,dz}{x}=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \frac{dy\,dz}{\sqrt{1-y^2-z^2}}$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr\,d\theta=2\pi.$$

定義 15.10

設位置向量爲 $\mathbf{R}(u, v)=x(u, v)\mathbf{i}+y(u, v)\mathbf{j}+z(u, v)\mathbf{k}$ 的定向曲面 Ω 是以其單位法向量 $\mathbf{N}$ 爲定向，D 爲參數定義域，若連續向量函數 $\mathbf{F}=\mathbf{F}(x, y, z)=f_1(x, y, z)\mathbf{i}+f_2(x, y, z)\mathbf{j}+f_3(x, y, z)\mathbf{k}$ 定義在 Ω 上，$(u, v)\in D$，則 $\mathbf{F}$ 在 Ω 上的**面積分**爲

$$\iint_\Omega \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint_\Omega \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=\iint_D \mathbf{F}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial v}\right)du\,dv$$

其中
$$\mathbf{N}=\frac{\dfrac{\partial\mathbf{R}}{\partial u}\times\dfrac{\partial\mathbf{R}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial\mathbf{R}}{\partial u}\times\dfrac{\partial\mathbf{R}}{\partial v}\right|}$$

此積分也稱爲 $\mathbf{F}$ 通過 Ω 的**通量**.

若曲面 Ω 在 xy-平面上的投影區域爲 R，則

$$\iint_\Omega \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=\iint_R \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,\frac{dx\,dy}{|\mathbf{N}\cdot\mathbf{k}|} \tag{15-39}$$

若曲面爲分段平滑，則在各平滑部分積分，然後將所得結果相加.

【例題 6】　利用定義 15.10

若 $\mathbf{F}=\mathbf{i}+xy\mathbf{j}$，且以向下單位法向量定向的曲面 Ω 的位置向量爲

$\mathbf{R}(u, v)=(u+v)\mathbf{i}+(u-v)\mathbf{j}+u^2\mathbf{k}$，$0\leqslant u\leqslant 1$，$0\leqslant v\leqslant 1$，求 $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$.

【解】 $\dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\times\dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 1 & 2u\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=2u\mathbf{i}+2u\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ (此爲向下法向量)

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\right)&=[\mathbf{i}+(u^2-v^2)\mathbf{j}]\cdot(2u\mathbf{i}+2u\mathbf{j}-2\mathbf{k})\\&=2u+2u(u^2-v^2)=2u^3-2uv^2+2u\end{aligned}$$

故
$$\begin{aligned}\iint_\Omega \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}&=\int_0^1\int_0^1(2u^3-2uv^2+2u)\,du\,dv\\&=\int_0^1\left(\frac{3}{2}-v^2\right)dv=\frac{7}{6}.\end{aligned}$$

【例題 7】 利用定義 15.10

若 $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，$\Omega$ 爲以向外單位法向量定向的球面 $x^2+y^2+z^2=4$，求

$$\iint_\Omega \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}.$$

【解】 單位法向量 $\mathbf{N}=\dfrac{\nabla(x^2+y^2+z^2)}{|\nabla(x^2+y^2+z^2)|}=\dfrac{2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}=\dfrac{1}{2}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)=2$$

故 $\displaystyle\iint_\Omega \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint_\Omega \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=\iint_\Omega 2\,dS=2(16\pi)=32\pi.$

若定向曲面 Ω 定義爲 $z=g(x, y)$，則 $z-g(x, y)=0$. 令 $f(x, y, z)=z-g(x, y)$，可得

$$\mathbf{N}=\frac{\nabla f(x, y, z)}{|\nabla f(x, y, z)|}=\frac{-g_x(x, y)\mathbf{i}-g_y(x, y)\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{[g_x(x, y)]^2+[g_y(x, y)]^2+1}}$$

此爲向上單位法向量.
若 Ω 是以 $\mathbf{N}$ 爲定向，則

$$\iint_\Omega \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint_\Omega \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$$

$$=\iint_R (f_1\mathbf{i}+f_2\mathbf{j}+f_3\mathbf{k})\cdot\frac{-\dfrac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i}-\dfrac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)^2+1}}\sqrt{\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)^2+1}\,dA$$

即，

$$\iint_\Omega \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint_R\left(-f_1\frac{\partial g}{\partial x}-f_2\frac{\partial g}{\partial y}+f_3\right)dA \tag{15-40}$$

此處 R 為 Ω 在 xy-平面上的投影.

若定向曲面定義為 $y=g(x, z)$ 或 $x=g(y, z)$，則可得出類似的公式.

【例題 8】　利用 (15-40) 式

令曲面 $z=1-x^2-y^2$ 在 xy-平面上方由向上單位法向量定向的部分為 Ω，且 $\mathbf{F}(x, y, z)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，求 $\iint_\Omega \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$.

【解】　令 $g(x, y)=1-x^2-y^2$，則 $\dfrac{\partial g}{\partial x}=-2x$，$\dfrac{\partial g}{\partial y}=-2y$.

又 $f_1(x, y, z)=x$，$f_2(x, y, z)=y$，$f_3(x, y, z)=z$，
可得

$$\iint_\Omega \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint_R (2x^2+2y^2+1-x^2-y^2)\,dA=\iint_R (x^2+y^2+1)\,dA$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2+1)\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{3}{4}\,d\theta=\frac{3\pi}{2}.$$

【例題 9】　利用定義 15.10 各別計算面積分

若 $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，且以向外單位法向量定向的曲面 Ω 是由六個平面 Ω_1：$x=0$，Ω_2：$x=1$，Ω_3：$y=0$，Ω_4：$y=1$，Ω_5：$z=0$ 及 Ω_6：$z=1$ 所圍成正方體的表面，

求 $\iint_{\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

【解】 在 Ω_1 面上，$\mathbf{N}=-\mathbf{i}$，$dS=dy\,dz$，

$$\iint_{\Omega_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS=\int_0^1\int_0^1 0\, dy\, dz=0$$

在 Ω_2 面上，$\mathbf{N}=\mathbf{i}$，$dS=dy\,dz$，

$$\iint_{\Omega_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS=\int_0^1\int_0^1 dy\, dz=1$$

在 Ω_3 面上，$\mathbf{N}=-\mathbf{j}$，$dS=dx\,dz$，

$$\iint_{\Omega_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS=\int_0^1\int_0^1 0\, dx\, dz=0$$

在 Ω_4 面上，$\mathbf{N}=\mathbf{j}$，$dS=dx\,dz$，

$$\iint_{\Omega_4} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS=\int_0^1\int_0^1 dx\, dz=1$$

在 Ω_5 面上，$\mathbf{N}=-\mathbf{k}$，$dS=dx\,dy$，

$$\iint_{\Omega_5} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS=\int_0^1\int_0^1 0\, dx\, dy=0$$

在 Ω_6 面上，$\mathbf{N}=\mathbf{k}$，$dS=dx\,dy$，

$$\iint_{\Omega_6} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS=\int_0^1\int_0^1 dx\, dy=1$$

故 $$\iint_{\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}=\iint_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS=0+1+0+1+0+1=3.$$

習題 15.9

1. 已知曲面的位置向量爲 $\mathbf{R}(u, v)=u^2\mathbf{i}+uv\mathbf{j}+\frac{1}{2}v^2\mathbf{k}$，$0\leqslant u\leqslant 1$，$0\leqslant v\leqslant 3$，求此曲面的面積.

2. 設 $\mathbf{F}=z\mathbf{i}+x\mathbf{j}-3y^2z\mathbf{k}$，$\Omega$ 爲圓柱面 $x^2+y^2=16$ 在第一卦限而介於平面 $z=0$ 及 $z=5$ 之間且以向外單位法向量定向的部分，求 $\iint_\Omega \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$.

3. 設 $\mathbf{F}=18z\mathbf{i}-12\mathbf{j}+3y\mathbf{k}$，$\Omega$ 爲平面 $2x+3y+6z=12$ 在第一卦限以向上單位法向量定向的部分，求 $\iint_\Omega \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$.

4. 若 $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，且以向上單位法向量定向之半球面 Ω 爲 $\mathbf{R}(u, v)=r\sin u\cos v\mathbf{i}+r\sin u\sin v\mathbf{j}+r\cos u\mathbf{k}$ $(0\leqslant u\leqslant \pi,\ 0\leqslant v\leqslant \pi)$，求 $\iint_\Omega \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$.

5. 若 $\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}+xy\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$，$\Omega$ 爲具有頂點 $(0, 0, 0)$、$(1, 0, 0)$、$(0, 2, 0)$ 及 $(0, 0, 3)$ 之四面體的表面，求 $\iint_\Omega \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$.

6. 若 $\mathbf{F}=4xz\mathbf{i}-y^2\mathbf{j}+yz\mathbf{k}$，且以向外單位法向量定向的曲面 Ω 是由六平面 $x=0$，$x=1$，$y=0$，$y=1$，$z=0$ 及 $z=1$ 所圍成正方體的表面，求 $\iint_\Omega \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$.

∑ 15-10　散度定理，史托克定理

在本節裡，我們列出以向量形式表出的主要定理：**散度定理**（或稱**高斯定理**）與**史托克定理**，並以例子來說明其應用．最後，我們舉出史托克定理在平面上的一個特例——**格林平面定理**.

定理 15.10　散度定理

設 G 爲以向外單位法向量 $\mathbf{N}$ 定向的封閉曲面 Ω 所圍成的立體區域，向量 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 及其各分量的一階偏導函數在 G 中及 Ω 上皆爲連續，$dV=dx\,dy\,dz$，則

$$\iiint_G \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV=\iint_\Omega \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint_\Omega \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$$

【例題 1】　利用散度定理

設 $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，且以向外單位法向量定向的曲面 Ω 是由六個平面 $x=0$，$x=1$，$y=0$，$y=1$，$z=0$，$z=1$ 所圍成正方體的表面，求 $\iint_\Omega \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$.

【解】　令 Ω 所圍成的立體區域爲 G，則

$$\iint_\Omega \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iiint_G \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 3\,dz\,dy\,dx=3.$$

【例題 2】　利用散度定理

若一封閉曲面 Ω 所圍成的立體區域爲 G，f 及 g 皆爲純量函數，試證：

(1) $\iiint_G (f\nabla^2 g+\nabla f\cdot\nabla g)\,dV=\iint_\Omega (f\,\nabla g)\cdot d\mathbf{S}$

(2) $\iiint_G (f\,\nabla^2 g-g\nabla^2 f)\,dV=\iint_\Omega (f\,\nabla g-g\nabla f)\cdot d\mathbf{S}$.

【解】

(1) 以 $\mathbf{F}=f\nabla g$ 代入，可得

$$\iiint_G \nabla\cdot(f\nabla g)\,dV=\iint_\Omega (f\nabla g)\cdot d\mathbf{S}$$

但 $\nabla\cdot(f\nabla g)=f\nabla^2 g+\nabla f\cdot\nabla g$，故等式成立.

(2) 將 (1) 式中之 f，g 互換，然後兩式相減，即可得到等式.

上述例題 2 (1) 及 (2) 稱爲**格林公式**.

【例題 3】 散度的意義

說明散度定理的物理意義.

【解】 設流體的流速 $\mathbf{v}=\mathbf{v}(x, y, z)$，由圖 15-32(i)，流體在 Δt 時間內通過面積 dS 的體積爲

$$(\mathbf{v}\Delta t)\cdot\mathbf{N}\,dS=(\mathbf{v}\Delta t)\cdot d\mathbf{S}$$

則流體在單位時間內通過 dS 的體積爲 $\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}$.

由圖 15-32(ii)，流體在單位時間內自閉曲面 Ω 流出的總體積爲 $\iint_{\Omega}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}$.

由 15-8 節例題 2，我們求得 $\nabla\cdot\mathbf{v}\,dV$ 爲流體在單位時間內自體積 dV 流出的體積，故流出的總體積爲 $\iiint_{G}\nabla\cdot\mathbf{v}\,dV$. 因此，

$$\iint_{\Omega}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}=\iiint_{G}\nabla\cdot\mathbf{v}\,dV.$$

往後，我們所提到的定向曲面 (以單位法向量 $\mathbf{N}$ 定向) 上簡單閉曲線 C 的方向

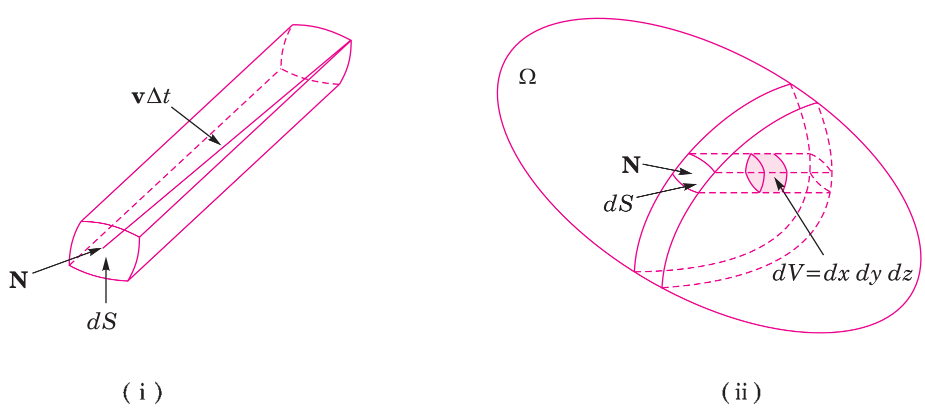


圖 15-32

是採**正方向** (或逆時鐘方向)，即，當我們頭部朝著 $\mathbf{N}$ 的方向，沿著路徑 C 前進時，C 所圍成的區域始終位於左側。

定理 15.11 史托克定理

設在以單位法向量 $\mathbf{N}$ 定向的曲面上由簡單封閉曲線 C 所圍成的區域爲 Ω，向量 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 及其各分量的一階偏導函數在 Ω 與 C 上皆爲連續，則

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\iint_\Omega (\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}=\iint_\Omega (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{N}\,dS.$$

【例題 4】 利用史托克定理

試證：$\oint_C (f\nabla g)\cdot d\mathbf{R}=-\oint_C (g\nabla f)\cdot d\mathbf{R}=\iint_\Omega (\nabla f\times\nabla g)\cdot d\mathbf{S}.$

【解】

$$\oint_C \nabla(fg)\cdot d\mathbf{R}=\iint_\Omega [\nabla\times\nabla(fg)]\cdot d\mathbf{S}$$

但 $\nabla\times\nabla(fg)=\mathbf{0}$，故 $\oint_C \nabla(fg)\cdot d\mathbf{R}=0.$

又 $\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$，知 $\oint_C (f\nabla g+g\nabla f)\cdot d\mathbf{R}=0,$

即，

$$\oint_C (f\nabla g)\cdot d\mathbf{R}=-\oint_C (g\nabla f)\cdot d\mathbf{R}$$

因 $\nabla\times(f\nabla g)=f(\nabla\times\nabla g)+(\nabla f\times\nabla g)=\nabla f\times\nabla g$，故再由史托克定理可得

$$\iint_\Omega (\nabla f\times\nabla g)\cdot d\mathbf{S}=\iint_\Omega \nabla\times(f\nabla g)\cdot d\mathbf{S}=\oint_C (f\nabla g)\cdot d\mathbf{R}.$$

【例題 5】 利用史托克定理

格林平面定理：若 R 爲 xy-平面上由簡單封閉曲線 C 所圍成的區域，且函數 P

與 Q 與其偏導函數在 R 上皆爲連續，則

$$\oint_C P\,dx+Q\,dy=\iint_R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dS$$

【解】 若曲面爲平面，令此平面爲 xy-平面，則 $\mathbf{N}=\mathbf{k}$，法線恆在 z-軸方向，而

$$(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{N}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ f_1&f_2&f_3\end{vmatrix}\cdot\mathbf{k}=\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}$$

在平面上，$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\oint_C f_1\,dx+f_2\,dy$，故

$$\oint_C f_1\,dx+f_2\,dy=\iint_R\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)dS$$

式中 R 爲平面上由 C 所圍成的區域．今設 $\mathbf{F}(x,\ y)=P(x,\ y)\mathbf{i}+Q(x,\ y)\mathbf{j}$，則得格林平面定理公式

$$\oint_C P\,dx+Q\,dy=\iint_R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dS.$$

習題 15.10

1. 設 $\mathbf{F}=4x\mathbf{i}-2y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$，$\Omega$ 爲曲面 $x^2+y^2=4$ 及平面 $z=0$，$z=3$ 所圍成區域的表面，且以向外單位法向量定向，求 $\iint_\Omega \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$.

2. 若 Ω 爲以向外單位法向量定向的封閉曲面，且 $\mathbf{R}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，求 $\iint_\Omega \mathbf{R}\cdot d\mathbf{S}$.

3. 利用史托克定理，證明 $\oint_C \mathbf{R}\cdot d\mathbf{R}=0$.

4. 設 $\mathbf{F}=(2x-y)\mathbf{i}-yz^2\mathbf{j}-y^2z\mathbf{k}$，且 Ω 爲球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 之上半部且以向上單位法向量定向，C 爲 Ω 的邊界，驗證史托克定理.

5. 設 C 爲任一簡單封閉曲線，試證 $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=0$ 的充要條件爲 $\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$.