附錄 I ：一些基本定理的證明

在本附錄中，我們證明一些基本的定理.

定理 1.1　唯一性

若 $\lim_{x\to a} f(x)=L_1$，$\lim_{x\to a} f(x)=L_2$，L_1 與 L_2 皆爲某實數，則 $L_1=L_2$.

證　我們假設 $L_1\neq L_2$ 而證明此假設導致矛盾，於是，可得 $L_1=L_2$. 令

$$\varepsilon=\frac{|L_1-L_2|}{2}$$

因假設 $L_1\neq L_2$，故 $\varepsilon>0$.

從假設 $\lim_{x\to a} f(x)=L_1$，可找到 $\delta_1>0$，使得當

$$0<|x-a|<\delta_1 \text{ 時，} \tag{1}$$

$$|f(x)-L_1|<\varepsilon \tag{2}$$

又因 $\lim_{x\to a} f(x)=L_2$，故可找到 $\delta_2>0$，使得當

$$0<|x-a|<\delta_2 \text{ 時，} \tag{3}$$

$$|f(x)-L_2|<\varepsilon \tag{4}$$

令 δ 爲兩數 δ_1 與 δ_2 中最小者，且選取滿足 $0<|x-a|<\delta$ 的任一 x. 因 $\delta\leqslant\delta_1$ 且 $\delta\leqslant\delta_2$，故 x 同時滿足 ① 式與 ③ 式，所以，$f(x)$ 同時滿足 ② 式與 ④ 式. 但

$$\begin{aligned}2\varepsilon&=|L_1-L_2|\\&=|L_1-f(x)+f(x)-L_2|\\&=|(L_1-f(x))+(f(x)-L_2)|\\&\leqslant|L_1-f(x)|+|f(x)-L_2|\\&<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon\end{aligned}$$

此爲矛盾.

定理 1.3

若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ 且 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$，則

(1) $\lim\limits_{x\to a}[cf(x)]=c\lim\limits_{x\to a} f(x)=cL$，$c$ 為常數

(2) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)=L\pm M$

(3) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]=[\lim\limits_{x\to a} f(x)][\lim\limits_{x\to a} g(x)]=LM$

(4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{L}{M}\quad(M\neq 0)$

證 (1) 依定義 2.1，對每一 $\varepsilon>0$，要找到 $\delta>0$，使得

$$\text{若 } 0<|x-a|<\delta\text{，則 } |cf(x)-cL|<\varepsilon$$

當 $c=0$ 時，$\lim\limits_{x\to a} cf(x)=0$ 顯然成立.

當 $c\neq 0$ 時，因 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$，故對 $\dfrac{\varepsilon}{|c|}>0$，存在一 $\delta_1>0$，使得

$$\text{若 } 0<|x-a|<\delta_1\text{，則 } |f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{|c|}.$$

取 $\delta=\delta_1$，可得

$$|cf(x)-cL|=|c||f(x)-L|<|c|\frac{\varepsilon}{|c|}=\varepsilon$$

(2) 令 $\varepsilon>0$ 為給定者. 欲證明 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=L+M$，我們必須證明對每一 $\varepsilon>0$，可找到 $\delta>0$，使得若

$$0<|x-a|<\delta \qquad ①$$

則

$$|f(x)+g(x)-(L+M)|<\varepsilon \qquad ②$$

因 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$，故可找到 $\delta_1>0$，使得若

$$0<|x-a|<\delta_1 \qquad ③$$

則

$$|f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad ④$$

又因 $\lim_{x\to a} g(x)=M$，故可找到 $\delta_2>0$，使得若

$$0<|x-a|<\delta_2 \qquad ⑤$$

則

$$|g(x)-M|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad ⑥$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,\ \delta_2\}$. 若 x 滿足 ① 式，則因 $\delta\leqslant\delta_1$ 且 $\delta\leqslant\delta_2$，故 x 也同時滿足 ③ 式與 ⑤ 式. 所以，

$$\begin{aligned}&|f(x)+g(x)-(L+M)|\\&=|(f(x)-L)+(g(x)-M)|\leqslant|f(x)-L|+|g(x)-M|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

於是，對於選取的 δ，當 ① 式滿足時，② 式滿足，證明完畢.
在 (1) 中，令 $c=-1$，可得

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to a}\ [f(x)-g(x)]\\&=\lim_{x\to a}\ [f(x)+(-1)g(x)]=\lim_{x\to a}\ f(x)+\lim_{x\to a}\ (-1)g(x)\\&=\lim_{x\to a}\ f(x)+(-1)\lim_{x\to a}\ g(x)=\lim_{x\to a}\ f(x)-\lim_{x\to a}\ g(x)\\&=L-M\end{aligned}$$

(3) 令 $\varepsilon>0$ 爲給定者. 我們必須找到 $\delta>0$，使得若

$$0<|x-a|<\delta \qquad ⑦$$

則

$$|f(x)-g(x)-LM|<\varepsilon \qquad ⑧$$

欲求 δ，我們以不同的形式表 ⑧ 式. 我們可寫成

$$f(x)=L+(f(x)-L),\ g(x)=M+(g(x)-M)$$

上面兩式相乘，然後兩端同時減去 LM，可得

$$f(x)g(x)-LM$$

$$=L(g(x)-M)+M(f(x)-L)+(f(x)-L)(g(x)-M)$$

故 ⑧ 式可改寫成

$$|L(g(x)-M)+M(f(x)-L)+(f(x)-L)(g(x)-M)|<\varepsilon \qquad ⑨$$

於是，我們必須找到 $\delta>0$，使得當 ⑦ 式成立時，⑨ 式成立.
因 $\varepsilon>0$，故 $\sqrt{\varepsilon/3}$、$\varepsilon/3(1+|L|)$ 與 $\varepsilon/3(1+|M|)$ 皆爲正.
所以，因

$$\lim_{x\to a} f(x)=M，\lim_{x\to a} g(x)=M，$$

故可找到正數 δ_1、δ_2、δ_3 與 δ_4，使得

$$\left.\begin{array}{ll} |f(x)-L|<\sqrt{\varepsilon/3}, & \text{當 } 0<|x-a|<\delta_1 \\ |f(x)-L|<\dfrac{\varepsilon}{3(1+|M|)}, & \text{當 } 0<|x-a|<\delta_2 \\ |g(x)-M|<\sqrt{\varepsilon/3}, & \text{當 } 0<|x-a|<\delta_3 \\ |g(x)-M|<\dfrac{\varepsilon}{3(1+|L|)}, & \text{當 } 0<|x-a|<\delta_4 \end{array}\right\} \qquad ⑩$$

令 $\delta=\min\{\delta_1，\delta_2，\delta_3，\delta_4\}$，則 $\delta\leqslant\delta_1$，$\delta\leqslant\delta_2$，$\delta\leqslant\delta_3$ 且 $\delta\leqslant\delta_4$.
於是，若 x 滿足 ⑦ 式，則 x 也滿足 ⑩ 式右邊的四個不等式.
所以，

$$\begin{aligned} &|L(g(x)-M)+M(f(x)-L)+(f(x)-L)(g(x)-M)| \\ &\leqslant |L(g(x)-M)|+|M(f(x)-L)|+|(f(x)-L)(g(x)-M)| \\ &=|L||g(x)-M|+|M||f(x)-L|+|f(x)-L||g(x)-M| \\ &<|L|\frac{\varepsilon}{3(1+|L|)}+|M|\frac{\varepsilon}{3(1+|M|)}+\sqrt{\varepsilon/3}\sqrt{\varepsilon/3} \qquad (\text{由 ⑩ 式}) \\ &=\frac{\varepsilon}{3}\,\frac{|L|}{1+|L|}+\frac{\varepsilon}{3}\,\frac{|M|}{1+|M|}+\frac{\varepsilon}{3}<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon \end{aligned}$$

於是，對於選擇的 δ，當 ⑦ 式成立時，⑨ 式成立．證明完畢.

(4) 我們足以證明 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{M}$，一旦完成，應用 (3) 於乘積 $f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}$ 可以獲得所要的結果．考慮

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{M}\right|=\left|\frac{M-g(x)}{Mg(x)}\right|=\frac{1}{|M||g(x)|}|g(x)-M| \qquad ⑪$$

因 $\lim_{x\to a} g(x)=M$，故存在一 $\delta_1>0$，使得若 $0<|x-a|<\delta_1$，則

$|g(x)-M|<\dfrac{|M|}{2}$. 因而對所有如此的 x，

$$|M|=|g(x)+(M-g(x))|\leqslant|g(x)|+|M-g(x)|<|g(x)|+\frac{|M|}{2}$$

所以，$\dfrac{|M|}{2}<|g(x)|$ 或 $\dfrac{1}{|g(x)|}<\dfrac{2}{|M|}$

代入 ⑪ 式中，可得若 $0<|x-a|<\delta_1$，則

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{M}\right|<\frac{2}{|M|^2}|g(x)-M| \qquad ⑫$$

再用 $\lim_{x\to a} g(x)=M$ 的事實，對每一 $\varepsilon>0$，存在一 $\delta_2>0$，使得若 $0<|x-a|<\delta_2$，則

$$|g(x)-M|<\frac{|M|^2}{2}\varepsilon \qquad ⑬$$

令 $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$. 若 $0<|x-a|<\delta$，則由 ⑫ 式與 ⑬ 式，可知

$\left|\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{M}\right|<\varepsilon$，此表示 $\lim_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{M}$.

定理 1.8 夾擠定理

設在一包含 a 的開區間中的所有 x (可能在 a 除外)，恆有 $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$.

若
$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=L$$

則
$$\lim_{x\to a} h(x)=L$$

證 令 $\varepsilon>0$ 爲給定者：因 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$，故存在一 $\delta_1>0$，使得若 $0<|x-a|<\delta_1$，則 $|f(x)-L|<\varepsilon$，即，若 $0<|x-a|<\delta_1$，則 $L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$. 因 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$，故存在一 $\delta_2>0$，使得

$$\text{若 } 0<|x-a|<\delta_2\text{，則 } |g(x)-L|<\varepsilon$$

即

$$\text{若 } 0<|x-a|<\delta_2\text{，則 } L-\varepsilon<g(x)<L+\varepsilon$$

令 $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$.

若 $0<|x-a|<\delta$，則 $0<|x-a|<\delta_1$，$0<|x-a|<\delta_2$，因此

$$L-\varepsilon<f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)<L+\varepsilon$$

尤其，

$$L-\varepsilon<h(x)<L+\varepsilon$$

即，$|h(x)-L|<\varepsilon$

所以，$\lim\limits_{x\to a} h(x)=L$.

定理 2.9　連鎖法則

若 $y=f(u)$ 與 $u=g(x)$ 皆爲可微分函數，則合成函數 $y=(f\circ g)(x)=f(g(x))$ 爲可微分，且

$$\frac{d}{dx}f(g(x))=f'(g(x))g'(x)$$

上式亦可用**萊布尼茲**符號表成

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

證 由於函數 $y=f(u)$ 在 $u=g(x)$ 爲可微分，所以

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{dy}{du}.$$

定義一新函數 ε 如下：

$$\varepsilon=\begin{cases}0, & \text{若 } \Delta u=0\\ \dfrac{\Delta y}{\Delta u}-\dfrac{dy}{du}, & \text{若 } \Delta u\neq 0\end{cases}$$

當 $\Delta u \fallingdotseq 0$ 時，$\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=\dfrac{dy}{du}+\varepsilon$，

故

$$\Delta y=\frac{dy}{du}\,\Delta u+\varepsilon\Delta u \qquad ⊛$$

由於對 $\Delta u=0$，則 $\Delta y=0$ (y 是 u 的連續函數)，故 ⊛ 式對 $\Delta u=0$ 或 $\Delta u \fallingdotseq 0$ 均成立。

今以 Δx 除 ⊛ 式的兩邊，可得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)+\varepsilon\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right).$$

因此，

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{dy}{du}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)+\left(\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon\right)\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\\&=\frac{dy}{du}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\left(\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon\right)\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\end{aligned}$$

現在，當 $\Delta x\to 0$ 時，由於 u 是 x 的連續函數，故 $\Delta u\to 0$，於是，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon=\lim_{\Delta u\to 0}\varepsilon=\lim_{\Delta u\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}-\frac{dy}{du}\right)=0$$

因此，$\dfrac{dy}{dx}=\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}+0\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)=f'(u)g'(x)=f'(g(x))g'(x)$

定理 4.5

若 f 與 g 在 $[a, b]$ 皆為可積分，則

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx.$$

證 因 f 與 g 在 $[a, b]$ 上可積分，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ 與 $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ 皆存在。

假設 $\int_a^b f(x)\,dx = M$ 與 $\int_a^b g(x)\,dx = N$

令 $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$ 與 $\sum_{i=1}^{n} g(x_i^*)\Delta x_i$ 爲黎曼和具有相同之分割

$$P=\{a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b\}$$

且 $x_{i-1} \leqslant x_i^* \leqslant x_i$

因 $M=\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i$，與

$N=\int_a^b g(x)\,dx=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(x_i^*)\,\Delta x_i$，

故對任意 $\frac{\varepsilon}{2}>0$，存在一數 $\delta_1>0$ 使得

$$\text{當 } \|P\|<\delta_1 \text{ 時} \Rightarrow \left| M-\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad ①$$

且存在一數 $\delta_2>0$，使得

$$\text{當 } \|P\|<\delta_2 \text{ 時} \Rightarrow \left| N-\sum_{i=1}^{n} g(x_i^*)\,\Delta x_i \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad ②$$

若令 $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$，則當 $\|P\|<\delta$ 時，① 與 ② 式同時成立．故

$$\text{當 } \|P\|<\delta \text{ 時} \Rightarrow \left| M-\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i \right| + \left| N-\sum_{i=1}^{n} g(x_i^*)\Delta x_i \right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$$

利用三角不等式之關係，當 $\|P\|<\delta$ 時 $\Rightarrow$

$$\left| (M-\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i)+(N-\sum_{i=1}^{n} g(x_i^*)\Delta x_i) \right| < \varepsilon$$

或

$$\left| (M+N)-(\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n} g(x_i^*)\Delta x_i) \right| < \varepsilon \qquad ③$$

因

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\ \Delta x_i+\sum_{i=1}^{n} g(x_i^*)\ \Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\ [f(\bar{x}_i)+g(x_i^*)]\ \Delta x_i \qquad ④$$

將 ④ 式代入 ③ 式得

$$\left|(M+N)-\sum_{i=1}^{n}\ [f(\bar{x}_i)+g(x_i^*)]\ \Delta x_i\right|<\varepsilon,$$

無論何時 $\|P\|<\delta$.

故

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\ [f(x_i^*)+g(x_i^*)]\ \Delta x_i=M+N$$

所以 $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$ 成立.

定理 11.4

設 f 爲定義在 $x\geqslant n_0$ (n_0 爲某固定正整數) 的函數，且 $\{a_n\}$ 爲一數列使得對 $n\geqslant n_0$，$a_n=f(n)$ 成立.

(1) 若 $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$，則 $\lim_{n\to\infty} a_n=L$.

(2) 若 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ (或 $-\infty$)，則 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ (或 $-\infty$).

證 (1) 假設 $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$，則對每一個正數 ε，存在一正數 M 使得對所有 x，

$$x>M \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

令 N 爲大於 M 的整數且大於或等於 n_0.
若 $n>N$，則 $a_n=f(n)$ 且 $|a_n-L|=|f(n)-L|<\varepsilon$，
故 $\lim_{n\to\infty} a_n=L$.

(2) 留給讀者自證.

定理 11.9

收斂數列必爲有界.

證 假設 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$，並選取任一正數 $\varepsilon=1$，則存在一正整數 N，使得 $n>N$ 時，$|a_n-L|<1$. 此表示 $n>N$ 時，$|a_n|<1+|L|$. 因此，$|a_n|\leqslant \max.\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, 1+|L|\}$，$n>N$.

定理 11.22 極限比較檢驗法

假設 $a_n>0$ 且 $b_n>0$，$\forall\ n>N$ (N 爲正整數).

(1) 若 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}=L$，$0<L<\infty$，則 $\sum a_n$ 與 $\sum b_n$ 同時收斂或同時發散.

(2) 若 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}=0$ 且 $\sum b_n$ 收斂，則 $\sum a_n$ 收斂.

(3) 若 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}=\infty$ 且 $\sum b_n$ 發散，則 $\sum a_n$ 發散.

證 (1) 在數列的極限定義中取 $\varepsilon=\dfrac{L}{2}$，則必存在一個 N，使得

$n>N \Rightarrow \left|\dfrac{a_n}{b_n}-L\right|<\dfrac{L}{2}$，即

$$-\frac{L}{2}<\frac{a_n}{b_n}-L<\frac{L}{2}$$

上述的不等式相當於 (各加上 L)

$$\frac{L}{2}<\frac{a_n}{b_n}<\frac{3L}{2}, \qquad \left(\frac{L}{2}\right)b_n<a_n<\left(\frac{3L}{2}\right)b_n.$$

若 $\sum b_n$ 收斂，則由比較檢驗法知，$\sum \left(\dfrac{3L}{2}\right)b_n$ 與 $\sum a_n$ 收斂.

若 $\sum b_n$ 發散，則由比較檢驗法知，$\sum \left(\dfrac{L}{2}\right)b_n$ 與 $\sum a_n$ 發散.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$，則存在某正整數 N，使得 $0\leqslant\dfrac{a_n}{b_n}<1\ \forall\, n>N$。於是，對 $n>N$，$a_n<b_n$。由比較檢驗法，由於 $\sum\limits_{n=N}^{\infty} b_n$ 收斂，故 $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ 亦收斂。於是，$\sum a_n$ 收斂，因爲一級數加上有限項之後並不影響級數的斂散性。

(3) 留給讀者自證之。

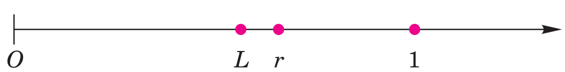
定理 11.23 比值檢驗法

設 $\sum a_n$ 爲正項級數且令

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$$

(1) 若 $L<1$，則級數收斂。
(2) 若 $L>1$，或 $L=\infty$，則級數發散。

證 (1) 假設 $L<1$。由於 $a_n>0$ 對所有正整數 n，a_{n+1}/a_n 對所有 n 與 L 皆爲正。選擇一數 r 介於 L 與 1 之間，使得 $0\leqslant L<r<1$，如下圖所示，因而 $r-L>0$。



因爲 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=L$，則存在一正整數 N，使得對所有 $n\geqslant N$，

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-L\right|<r-L$$

或

$$L-(r-L)<\frac{a_{n+1}}{a_n}<L+(r-L)$$

所以，

$$a_{n+1}<a_n r \quad \forall\, n\geqslant N\text{。於是，}$$

$$a_{N+1}<a_N r,$$
$$a_{N+2}<a_{N+1}r<a_N r^2,$$

$$a_{N+3} < a_{N+2}r < a_N r^3,$$
$$\vdots$$

由於 $r = |r| < 1$. 因此，下列的幾何級數

$$a_N r + a_N r^2 + a_N r^3 + \cdots, \quad \cdots\cdots ①$$

爲收斂. 又由比較檢驗法知，級數

$$a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \cdots, \quad \cdots\cdots ②$$

的每一項皆小於收斂幾何級數 ① 的對應項. 所以，$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ 收斂.

又因爲刪掉有限個項，不會影響級數的斂散性，所以，級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收斂.

(2) 假設 $L > 1$. 如上所述，存在一正整數 N，使得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$，$\forall\, n \geqslant N$，亦即，

$$a_{n+1} > a_n, \quad \forall\, n \geqslant N.$$

但 $a_N > 0$ 因爲這是一個正項級數，所以

$$a_n > a_N > 0, \quad \forall\, n \geqslant N.$$

且 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$，故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 爲發散.

定理 13.5

若 f，f_x，f_y，f_{xy} 與 f_{yx} 在開區域 R 皆爲連續，則對 R 中任一點 (a, b)，

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

證 我們定義兩函數 $\phi(y)$ 與 $\psi(x)$ 分別定義如下：

$$\phi(y) = f(a+h, y) - f(a, y)$$
$$\psi(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$$

則

$$\phi(b+k) - \phi(b) = [f(a+h, b+k) - f(a, b+k)] - [f(a+h, b) - f(a, b)],$$

$\psi(a+h)-\psi(a)=[f(a+h,\ b+k)-f(a+h,\ b)]-[f(a,\ b+k)-f(a,\ b)]$，

因此，

$$\phi(b+k)-\phi(b)=\psi(a+h)-\psi(a) \quad \cdots\cdots ①$$

我們應用均值定理於 ① 式等號的兩端，可得

$$k\phi'(b+\alpha k)=h\psi'(a+\beta h) \quad \cdots\cdots ②$$

其中 $0<\alpha<1$，$0<\beta<1$。

現在

$$\begin{aligned}\phi'(y)&=f_y(a+h,\ y)-f_y(a,\ y),\\ \psi'(x)&=f_x(x,\ b+k)-f_x(x,\ b),\end{aligned}$$

則 ② 式變爲

$$\begin{aligned}&k[f_y(a+h,\ b+\alpha k)-f_y(a,\ b+\alpha k)]\\ &=h[f_x(a+\beta h,\ b+k)-f_x(a+\beta h,\ b)] \quad \cdots\cdots ③\end{aligned}$$

視 $a+h$ 爲常數，而將 $f_y(a+h,\ b+\alpha k)$ 與 $f_y(a,\ b+\alpha k)$ 分別視作 x 的函數。則得 $f_y(x,\ b+\alpha k)$ 在 $a+h$ 與 a 的函數值分別爲 $f_y(a+h,\ b+\alpha k)$ 與 $f_y(a,\ b+\alpha k)$，再應用均值定理於 ③ 式等號的兩端，可得

$$f_y(a+h,\ b+\alpha k)-f_y(a,\ b+\alpha k)=hf_{yx}(a+sh,\ b+\alpha k),\ 0<s<1.$$

同理，

$$f_x(a+\beta h,\ b+k)-f_x(a+\beta h,\ b)=kf_{xy}(a+\beta h,\ b+tk),\ 0<t<1.$$

故

$$kh\, f_{yx}(a+sh,\ b+\alpha k)=hk\, f_{xy}(a+\beta h,\ b+tk)$$

$$0<s<1,\ 0<t<1$$

消去 hk，且令 $h\to 0$，$k\to 0$，依 f_{yx} 與 f_{xy} 的連續性，可得

$$f_{yx}(a,\ b)=f_{xy}(a,\ b).$$

定理 13.6

設 f_x 與 f_y 在各邊皆平行於坐標軸且包含點 (a, b) 與 $(a+\Delta x, b+\Delta y)$ 之矩形區域 R 中各點皆存在，又 f_x 與 f_y 在點 (a, b) 皆爲連續，並令 $\Delta z=f(a+\Delta x, b+\Delta y)-f(a, b)$ 則

$$\Delta z=f_x(a, b)\,\Delta x+f_y(a, b)\,\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

此處 ε_1 與 ε_2 皆爲 Δx 與 Δy 的函數，當 $(\Delta x, \Delta y)\to(0, 0)$ 時，$\varepsilon_1\to 0$，$\varepsilon_2\to 0$.

證　由圖所示，由點 A 移到點 C，f 的變化爲

$$\Delta z=f(a+\Delta x, b+\Delta y)-f(a, b)\cdots\cdots①$$

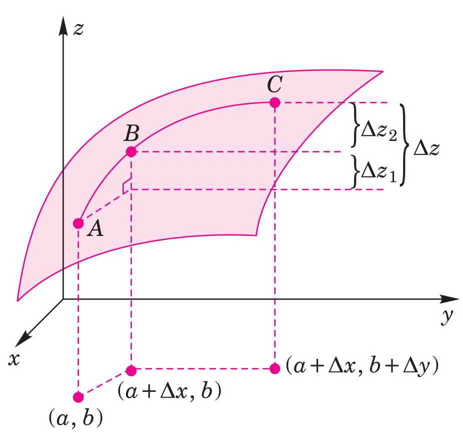
或

$$\begin{aligned}\Delta z&=\Delta z_1+\Delta z_2\\&=[f(a+\Delta x, b)-f(a, b)]+[f(a+\Delta x, b+\Delta y)-f(a+\Delta x, b)]\end{aligned}$$

現在由 A 移到 B，若 x 變化，則 y 固定，因此，由均值定理知，存在一數 x_1，$a<x_1<a+\Delta x$，使得

$$\begin{aligned}\Delta z_1&=f(a+\Delta x, b)-f(a, b)\\&=f_x(x_1, b)\,\Delta x\cdots\cdots②\end{aligned}$$

同理，由 B 移到 C，則 x 固定且 y 變化；於是，存在一數 y_1，$b<y_1<b+\Delta y$，使得



$\Delta z=f(a+\Delta x, b+\Delta y)-f(a, b)$

$$\Delta z_2=f(a+\Delta x,\ b+\Delta y)-f(a+\Delta x,\ b)$$
$$=f_y(a+\Delta x,\ y_1)\ \Delta y \quad \cdots\cdots ③$$

我們定義 ε_1 與 ε_2 分別爲

$$\varepsilon_1=f_x(x_1,\ b)-f_x(a,\ b)$$

與

$$\varepsilon_2=f_y(a+\Delta x,\ y_1)-f_y(a,\ b)$$

依 f_x 與 f_y 的連續性，且 $a<x_1<a+\Delta x$，$b<y_1<b+\Delta y$，可知當 $\Delta x\to 0$ 且 $\Delta y\to 0$ 時，$\varepsilon_1\to 0$，$\varepsilon_2\to 0$。於是，

$$\Delta z=\Delta z_1+\Delta z_2=[f_x(a,\ b)+\varepsilon_1]\ \Delta x+[f_y(a,\ b)+\varepsilon_2]\ \Delta y$$
$$=f_x(a,\ b)\ \Delta x+f_y(a,\ b)\ \Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

其中 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \varepsilon_1(\Delta x,\ \Delta y)=0$；$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \varepsilon_2(\Delta x,\ \Delta y)=0$。

定理 13.9

若 f 爲 x 與 y 的可微分函數，且 x 與 y 皆爲 t 的可微分函數，則 f 爲 t 的可微分函數，且

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{dy}{dt}$$

證 因 x 與 y 皆爲 t 的可微分函數，當 t 變化 Δt 時，則導致 x 的變化 Δx 與 y 的變化 Δy。依定理 13.6，可知

$$\Delta f=f_x(x,\ y)\ \Delta x+f_y(x,\ y)\ \Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

此處，當 $\Delta x\to 0$ 與 $\Delta x\to 0$ (亦即，當 $\Delta t\to 0$) 時，$\varepsilon_1\to 0$ 且 $\varepsilon_2\to 0$。於是，對 $\Delta t\neq 0$，可得

$$\frac{\Delta f}{\Delta t}=f_x(x,\ y)\ \frac{\Delta x}{\Delta t}+f_y(x,\ y)\ \frac{\Delta y}{\Delta t}+\varepsilon_1\ \frac{\Delta x}{\Delta t}+\varepsilon_2\ \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

當 $\Delta t\to 0$ 時，上式兩端取極限，可得

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta t}=f_x(x,\ y)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+f_y(x,\ y)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}+(\lim_{\Delta t\to 0}\ \varepsilon_1)\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$$

$$+(\lim_{\Delta t\to 0}\ \varepsilon_2)\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)$$

故

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+0\left(\frac{dx}{dt}\right)+0\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

定理 13.10

令 $z=f(x,\ y)$ 爲可微分函數，且 $x=g(u,\ v)$ 與 $y=h(u,\ v)$ 皆爲可微分函數，則 f 爲 u 與 v 的可微分函數，且

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\quad \frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

證 若將 v 固定 $(\Delta v=0)$ 而 u 變化 Δu，則 x 變化 Δx，y 變化 Δy. 所以，

$$\Delta x=g(u+\Delta u,\ v)-g(u,\ v)$$
$$\Delta y=h(u+\Delta u,\ v)-h(u,\ v)$$

因 f 是可微分，故

$$\Delta f=f_x\ \Delta x+f_y\ \Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

其中 $\displaystyle\lim_{(\Delta x,\ \Delta y)\to(0,\ 0)}\varepsilon_1(\Delta x,\ \Delta y)=0$ 且 $\displaystyle\lim_{(\Delta x,\ \Delta y)\to(0,\ 0)}\varepsilon_2(\Delta x,\ \Delta y)=0.$

若 $\Delta u\neq 0$，則

$$\frac{\Delta f}{\Delta u}=f_x\frac{\Delta x}{\Delta u}+f_y\frac{\Delta y}{\Delta u}+\varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta u}+\varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta u}$$

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta u}=f_x\left(\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta u}\right)+f_y\left(\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)+(\lim_{\Delta u\to 0}\ \varepsilon_1)\left(\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta u}\right)$$

$$+\left(\lim_{\Delta u\to 0}\varepsilon_2\right)\left(\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\cdots\cdots\cdots\circledast$$

因 f 爲 x 與 y 的函數，且 x 與 y 又皆爲 u 與 v 的函數，故 f 爲 u 與 v 的函數．由於 v 固定且 u 變化 Δu，故

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta u}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u,\ v)-f(u,\ v)}{\Delta u}=\frac{\partial f}{\partial u}$$

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta u}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{g(u+\Delta u,\ v)-g(u,\ v)}{\Delta u}=\frac{\partial x}{\partial u}$$

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{h(u+\Delta u,\ v)-h(u,\ v)}{\Delta u}=\frac{\partial y}{\partial u}$$

又 $\lim_{\Delta u\to 0}\varepsilon_1=0$ 與 $\lim_{\Delta u\to 0}\varepsilon_2=0$，代入 ⊛ 式可得

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

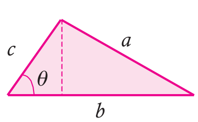
同理可證

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

附錄 II ：公式彙集

三角形：

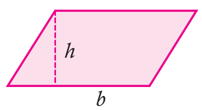
面積$=\dfrac{1}{2}bh$



$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\theta$

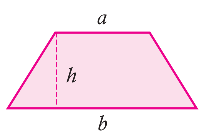
平行四邊形：

面積$=bh$



梯形：

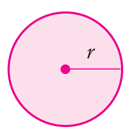
面積$=\dfrac{h}{2}(a+b)$



圓：

面積$=\pi r^2$

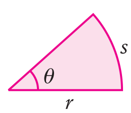
周長$=2\pi r$



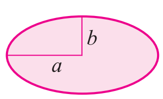
圓的扇形：

面積$=\dfrac{1}{2}r^2\theta$

$s=r\theta$



橢圓：



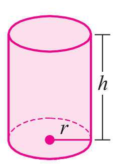
面積$=\pi ab$

正圓柱：

體積$=\pi r^2h$

側表面積$=2\pi rh$

總表面積$=2\pi r(r+h)$

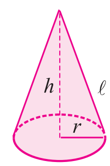


正圓錐：

體積$=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$

側表面積$=\pi r\ell$

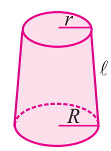
總表面積$=\pi r(r+\ell)$



正圓錐的錐台：

體積$=\dfrac{1}{3}\pi(r^2+rR+R^2)h$

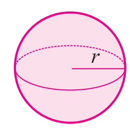
側表面積$=\pi(r+R)\ell$



球：

體積$=\dfrac{4}{3}\pi r^3$

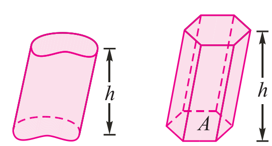
表面積$=4\pi r^2$



柱體或角柱：

體積$=Ah$

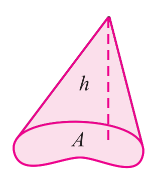
(A 為底面積)



錐：

體積$=\dfrac{1}{3}Ah$

(A 為底面積)



點 $P(x_0, y_0)$ 到直線 $ax+by+c=0$ 的距離：

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

通過點 (x_0, y_0, z_0) 且方向數為 ℓ、m、n 之直線的方程式：

$$\frac{x-x_0}{\ell}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$