

偏微分方程數值解

引言

如果一個物體，它每一點的熱傳導率與通過該點之熱流方向無關，則此物體稱做等向 (*isotropic*) 體。設 k 、 c 及 ρ 都是 (x, y, z) 的函數，分別代表在點 (x, y, z) 處的熱傳導率、比熱及物體密度。則求解偏微分方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) = c \rho \frac{\partial u}{\partial t}$$

可得等向體上的溫度分布 $u \equiv u(x, y, z, t)$ 。當 k 、 c 及 ρ 都是常數時，此方程式叫做 3D 熱傳方程式，可寫為

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{c \rho}{k} \frac{\partial u}{\partial t}$$

如果此物體的邊界形狀簡單，此方程式可以用傅立葉級數 (Fourier series) 求解。

在多數情形下， k 、 c 及 ρ 並非常數，或者邊界形狀並不規則，此偏微分方程必須用近似法求解。本章即介紹這類問題的解法。

■ 橢圓型方程式 (Elliptic Equations)

偏微分方程的分類如同圓錐曲線。我們在 12.1 節所要探討的偏微分方程包含有 $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y)$ 的項，屬於橢圓型 (elliptic) 方程式。我們要討論的特定方程式叫做普松方程 (Poisson equation)：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y)$$

在此方程式中我們設 f 為此問題的輸入，它定義於一個平面區域 R 及邊界 S 。在探討與時間無關的物理問題時，經常出現此種方程式，例如平面區域中的穩態熱分布、平面重力位能分布、以及 2D 不可壓縮流之流場。

普松方程式要有唯一解，必須加入額外的限制條件。例如

在探討平面穩態熱分布時，給定 $f(x, y) \equiv 0$ ，則方程式可簡化為

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

此式叫做**拉普拉斯方程式** (Laplace's equation)。

如果區域內的溫度分布是取決於邊界上的溫度分布，則此條件叫做 **Dirichlet 邊界條件** (Dirichlet boundary conditions)，對所有在 R 之邊界 S 上的 (x, y) (見圖 12.1)，可寫為

$$u(x, y) = g(x, y)$$

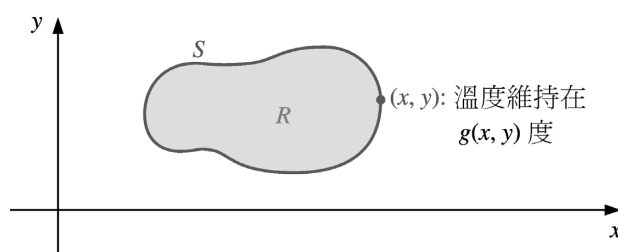


圖 12.1

■ 拋物線型方程式

在 12.2 節中，我們要考慮一個**拋物線型** (parabolic) 偏微分方程的數值解，其型式為：

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0$$

相對此方程式的物理問題為熱通過一根長度為 l 的長桿 (見圖 12.2)，假設長桿的每一個截面上溫度為均勻分布。這代表此長桿的橫向表面為完全絕緣。假設常數 α 與位置無關，只與長桿材料的熱傳導率有關。

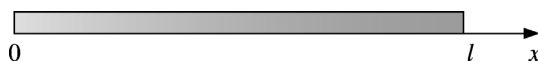


圖 12.2

對於此種熱傳問題的典型限制條件為，指定桿上的初始溫度分布

$$u(x, 0) = f(x)$$

並且描述端點的行為。例如，若指定端點維持固定溫度 U_1 及 U_2 ，邊界條件為

$$u(0, t) = U_1 \text{ 及 } u(l, t) = U_2$$

而桿上的熱分布會趨向終極溫度分布

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{l}x$$

如果桿的 2 端為絕緣，其邊界條件成為

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \text{及} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$$

此時沒有熱傳通過端點，桿上的終極溫度分布為等溫。在研究氣體的擴散時，拋物線型偏微分方程也非常重要，事實上在某些研究領域中，此方程式被叫做**擴散方程式** (diffusion equation)。

■ 雙曲線型方程式

在 12.3 節中要討論 1D 的**波動方程式** (wave equation)，這屬於**雙曲線型** (hyperbolic) 偏微分方程。假設有一條長度為 l 的彈性弦，固定在水平 2 點之間 (見圖 12.3)。

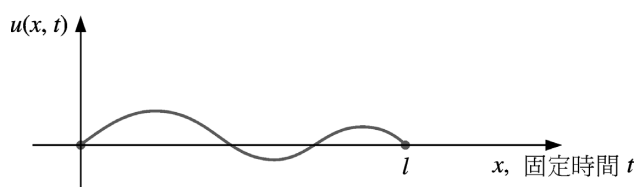


圖 12.3

如果讓此弦在垂直面上振動，則位置 x 處在時間 t 的垂直位移量 $u(x, t)$ 滿足偏微分方程

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = 0 \quad , \quad 0 < x < l \text{ 及 } 0 < t ,$$

其條件為弦的阻尼效應可忽略不計，且振幅不大。對此問題加入限制條件的方式為，給定弦初始位置與速度

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{及} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

如果端點為固定，那我們同時有 $u(0, t) = 0$ 及 $u(l, t) = 0$

其他會用到雙曲線型偏微分方程的物理問題還包括了一端或 2 端固定之梁的振動，有漏電情形下長導線上電力的輸送等。



12.1 橢圓型偏微分方程

我們要考慮的橢圓型 (elliptic) 偏微分方程為普松方程式

$$\nabla^2 u(x, y) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y) \quad (12.1)$$

在 $R = \{(x, y) \mid a < x < b, c < y < d\}$ 上，且對 $(x, y) \in S, u(x, y) = g(x, y)$ ，其中 S 代表 R 的邊界。如果 f 和 g 在其定義域中為連續，則此問題存在有唯一解。

■ 選取格點

使用的解法類似於 11.3 節所介紹的，用於線性邊界值問題的有限差分法之 2D 型式。第一步是選擇整數 n 及 m 以定義步進距離 $h = (b - a)/n$ 及 $k = (d - c)/m$ 。將區間 $[a, b]$ 分成寬度 h 的 n 等分，將區間 $[c, d]$ 分成寬度 k 的 m 等分 (見圖 12.4)。

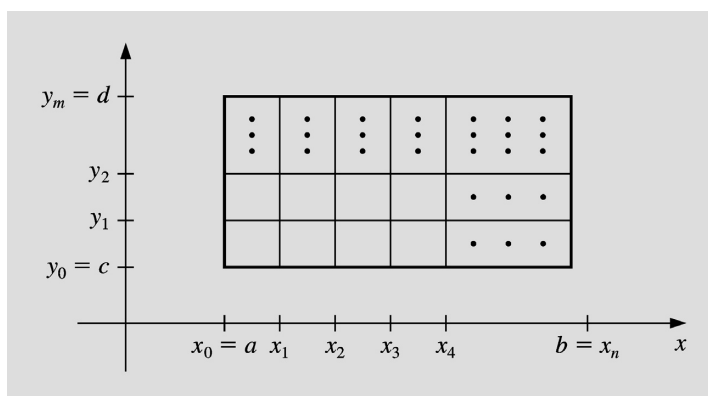


圖 12.4

在區域 R 中，以水平及垂直線連接座標 (x_i, y_j) 可得網格線，其中

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad \text{及} \quad y_j = c + jk, \quad j = 0, 1, \dots, m。$$

線 $x = x_i$ 及 $y = y_j$ 叫做**格點線** (grid lines)，它們的交點叫做**網格點** (mesh points)。對格點系統內部的每一個網格點 (x_i, y_j) ， $i = 1, 2, \dots, n - 1$ 及 $j = 1, 2, \dots, m - 1$ ，我們將變數 x 在 x_i 以泰勒級數展開，可得中央差分公式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, y_j) \quad (12.2)$$

其中 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ 。我們同樣將變數 y 在 y_j 以泰勒級數展開，可得中央差分公式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{k^2} - \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \eta_j) \quad (12.3)$$

其中 $\eta_j \in (y_{j-1}, y_{j+1})$ 。

將以上 2 式代入 (12.1) 式，我們可將點 (x_i, y_j) 的普松方程式寫做

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} + \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{k^2} \\ &= f(x_i, y_j) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, y_j) + \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \eta_j) \end{aligned}$$

對每個 $i = 1, 2, \dots, n - 1$ 及 $j = 1, 2, \dots, m - 1$ 。其邊界條件為

$$u(x_0, y_j) = g(x_0, y_j) \quad \text{及} \quad u(x_n, y_j) = g(x_n, y_j), \quad j = 0, 1, \dots, m$$

$$u(x_i, y_0) = g(x_i, y_0) \quad \text{及} \quad u(x_i, y_m) = g(x_i, y_m), \quad i = 1, 2, \dots, n - 1$$

■ 有限差分法

如此可得有限差分法(Finite-Difference method)：

$$2\left[\left(\frac{h}{k}\right)^2 + 1\right]w_{ij} - (w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - \left(\frac{h}{k}\right)^2(w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) = -h^2 f(x_i, y_j) \quad (12.4)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, n-1$ 及 $j = 1, 2, \dots, m-1$ ，且

$$w_{0j} = g(x_0, y_j) \text{ 及 } w_{nj} = g(x_n, y_j), \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (12.5)$$

$$w_{i0} = g(x_i, y_0) \text{ 及 } w_{im} = g(x_i, y_m), \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

其中 w_{ij} 為 $u(x_i, y_j)$ 的近似值。此方法的局部截尾誤差為 $O(h^2 + k^2)$ 。

在 (12.4) 式中，任一個典型的方程式，包含了 $u(x, y)$ 在下列格點的近似值：

$$(x_{i-1}, y_j), (x_i, y_j), (x_{i+1}, y_j), (x_i, y_{j-1}) \text{ 及 } (x_i, y_{j+1})$$

特別畫出這些格點的關係位置 (見圖 12.5)，可以看出，每個方程式所用到的近似值，圍繞淺色 X 的 (x_i, y_j) 呈星形排列。

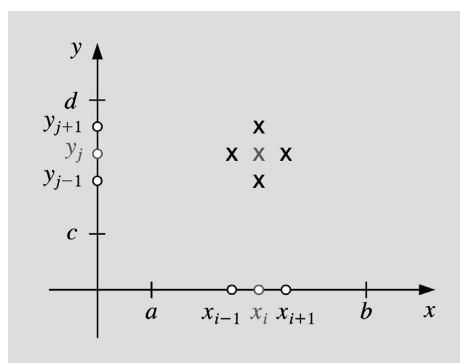


圖 12.5

如果我們將 (12.5) 式的邊界條件在適當的位置代入 (12.4) 式，也就是所有鄰接邊界點的 (x_i, y_j) 。我們可得到一個 $(n-1)(m-1) \times (n-1)(m-1)$ 的線性方程組，其未知數為 w_{ij} ，也就是每個內部網格點上 $u(x_i, y_j)$ 的近似值。

我們將所有內部網格點加以重新編號，可以使矩陣運算更有效率。我們建議的編號方式為 (見 [Var1], p.210)，令

$$P_l = (x_i, y_j) \text{ 及 } w_l = w_{ij}$$

其中 $l = i + (m-1-j)(n-1)$ ， $i = 1, 2, \dots, n-1$ 及 $j = 1, 2, \dots, m-1$ 。這種編號方式可使網格由左至右，由上而下依序排列。這樣可確保我們在求 w_{ij} 時，解的是一個帶狀矩陣，帶寬最多為 $2n-1$ 。

舉例來說，在 $n=4$ 及 $m=5$ 的情形下，這樣的編號法會得到圖 12.6 所示的網格點。

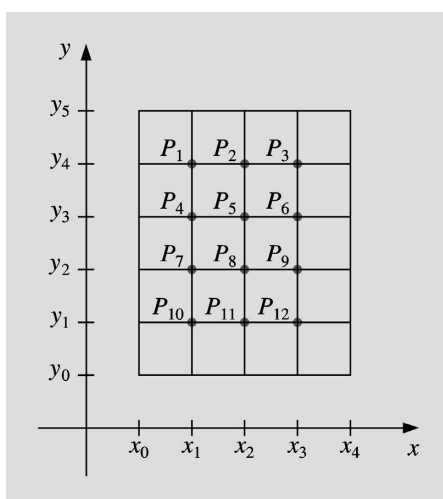


圖 12.6

例題 1 求一塊 0.5×0.5 m 的正方形金屬薄板上的穩態溫度分布。有 2 個相鄰邊的溫度維持在 0°C ，而另外兩邊則是由 0°C 開始，溫度以線性方式增加到對角的 100°C 。

解 將 x 及 y 座標軸置於溫度為 0 的 2 邊，此問題可表示為

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

(x, y) 在集合 $R = \{(x, y) \mid 0 < x < 0.5, 0 < y < 0.5\}$ 之中，邊界條件為

$$u(0, y) = 0 \quad , \quad u(x, 0) = 0 \quad , \quad u(x, 0.5) = 200x \quad \text{及} \quad u(0.5, y) = 200y$$

若 $n = m = 4$ ，此問題之網格如圖 12.7 所示，而其差分方程式 (12.4) 為

$$4w_{ij} - w_{i+1,j} - w_{i-1,j} - w_{i,j+1} - w_{i,j-1} = 0$$

$i = 1, 2, 3$ 及 $j = 1, 2, 3$ 。

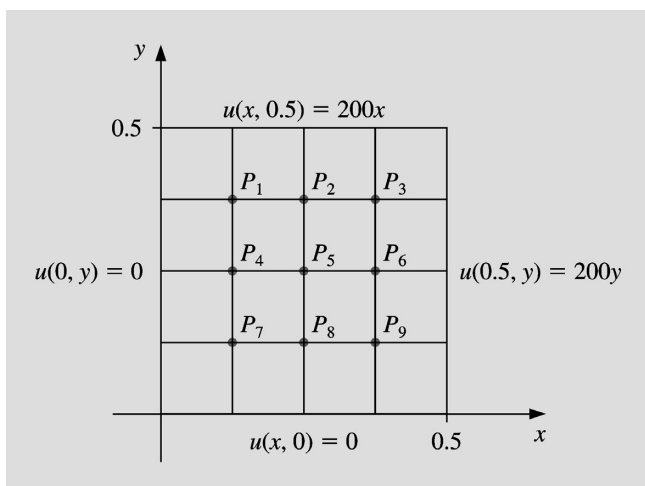


圖 12.7

將這些方程式用新編號的內部格點 $w_i = u(P_i)$ 來表示，可得點 P_i 的方程式為：

$$\begin{aligned}
 P_1 : & \quad 4w_1 - w_2 - w_4 = w_{0,3} + w_{1,4} \\
 P_2 : & \quad 4w_2 - w_3 - w_1 - w_5 = w_{2,4} \\
 P_3 : & \quad 4w_3 - w_2 - w_6 = w_{4,3} + w_{3,4} \\
 P_4 : & \quad 4w_4 - w_5 - w_1 - w_7 = w_{0,2} \\
 P_5 : & \quad 4w_5 - w_6 - w_4 - w_2 - w_8 = 0 \\
 P_6 : & \quad 4w_6 - w_5 - w_3 - w_9 = w_{4,2} \\
 P_7 : & \quad 4w_7 - w_8 - w_4 = w_{0,1} + w_{1,0} \\
 P_8 : & \quad 4w_8 - w_9 - w_7 - w_5 = w_{2,0} \\
 P_9 : & \quad 4w_9 - w_8 - w_6 = w_{3,0} + w_{4,1}
 \end{aligned}$$

方程式等號右側為邊界條件。

事實上，由邊界條件得

$$w_{1,0} = w_{2,0} = w_{3,0} = w_{0,1} = w_{0,2} = w_{0,3} = 0$$

$$w_{1,4} = w_{4,1} = 25 \quad , \quad w_{2,4} = w_{4,2} = 50 \quad , \quad \text{及} \quad w_{3,4} = w_{4,3} = 75$$

所以此問題的線性方程組為

$$\begin{bmatrix}
 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 w_1 \\
 w_2 \\
 w_3 \\
 w_4 \\
 w_5 \\
 w_6 \\
 w_7 \\
 w_8 \\
 w_9
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 25 \\
 50 \\
 150 \\
 0 \\
 0 \\
 50 \\
 0 \\
 0 \\
 25
 \end{bmatrix}$$

表 12.1

i	w_i
1	18.75
2	37.50
3	56.25
4	12.50
5	25.00
6	37.50
7	6.25
8	12.50
9	18.75

用高斯-賽德 (Gauss-Seidel) 法求得的 $w_1, w_2, \dots, w_9$ 列於表 12.1。

這些答案就是確解，因為真正的確解 $u(x, y) = 400xy$ ，其偏導數

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \equiv 0$$

所以在每一步的截尾誤差為 0。

在例題 1 中所考慮的問題，其網格在兩個方向的大小都是 0.125，且只須要解 9×9 的線性方程組。這樣的簡化情況無法顯示出方程組很大時可能出現的問題。算則 12.1 用高斯-賽德迭代法解線性方程組，並許可不同軸向的網格可有不同的大小。

算則 12.1 普松方程式有限差分 (Poisson Equation Finite-Difference)

求普松方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y), \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$$

在邊界條件

$$u(x, y) = g(x, y) \text{ 若 } x = a \text{ 或 } x = b \text{ 且 } c \leq y \leq d$$

及

$$u(x, y) = g(x, y) \text{ 若 } y = c \text{ 或 } y = d \text{ 且 } a \leq x \leq b$$

之近似解：

INPUT 端點 a, b, c, d ；整數 $m \geq 3$ 及 $n \geq 3$ ；容許誤差 TOL ；最大迭代次數 N 。

OUTPUT 在每個 $i=1, \dots, n-1$ 及 $j=1, \dots, m-1$ 處的 $u(x_i, y_j)$ 的近似值 w_{ij} ，或超過最大迭代次數的訊息。

Step 1 Set $h = (b - a)/n$;
 $k = (d - c)/m$.

Step 2 For $i = 1, \dots, n - 1$ set $x_i = a + ih$. (Steps 2 及 3 建構格點)

Step 3 For $j = 1, \dots, m - 1$ set $y_j = c + jk$.

Step 4 For $i = 1, \dots, n - 1$
 for $j = 1, \dots, m - 1$ set $w_{ij} = 0$.

Step 5 Set $\lambda = h^2/k^2$;
 $\mu = 2(1 + \lambda)$;
 $l = 1$.

Step 6 While $l \leq N$ do Steps 7–20. (Steps 7-20 執行高斯-賽德迭代)

Step 7 Set $z = (-h^2 f(x_1, y_{m-1}) + g(a, y_{m-1}) + \lambda g(x_1, d) + \lambda w_{1,m-2} + w_{2,m-1}) / \mu$;
 $NORM = |z - w_{1,m-1}|$;
 $w_{1,m-1} = z$.

Step 8 For $i = 2, \dots, n - 2$
 set $z = (-h^2 f(x_i, y_{m-1}) + \lambda g(x_i, d) + w_{i-1,m-1} + w_{i+1,m-1} + \lambda w_{i,m-2}) / \mu$;
 if $|w_{i,m-1} - z| > NORM$ then set $NORM = |w_{i,m-1} - z|$;
 set $w_{i,m-1} = z$.

Step 9 Set $z = (-h^2 f(x_{n-1}, y_{m-1}) + g(b, y_{m-1}) + \lambda g(x_{n-1}, d) + w_{n-2,m-1} + \lambda w_{n-1,m-2}) / \mu$;
 if $|w_{n-1,m-1} - z| > NORM$ then set $NORM = |w_{n-1,m-1} - z|$;
 set $w_{n-1,m-1} = z$.

Step 10 For $j = m - 2, \dots, 2$ do Steps 11, 12, and 13.

Step 11 Set $z = (-h^2 f(x_1, y_j) + g(a, y_j) + \lambda w_{1,j+1} + \lambda w_{1,j-1} + w_{2,j}) / \mu$;
 if $|w_{1,j} - z| > NORM$ then set $NORM = |w_{1,j} - z|$;
 set $w_{1,j} = z$.

Step 12 For $i = 2, \dots, n - 2$
 set $z = (-h^2 f(x_i, y_j) + w_{i-1,j} + \lambda w_{i,j+1} + w_{i+1,j} + \lambda w_{i,j-1}) / \mu$;
 if $|w_{i,j} - z| > NORM$ then set $NORM = |w_{i,j} - z|$;
 set $w_{i,j} = z$.

- Step 13** Set $z = (-h^2 f(x_{n-1}, y_j) + g(b, y_j) + w_{n-2,j} + \lambda w_{n-1,j+1} + \lambda w_{n-1,j-1}) / \mu$;
if $|w_{n-1,j} - z| > NORM$ then set $NORM = |w_{n-1,j} - z|$;
set $w_{n-1,j} = z$.
- Step 14** Set $z = (-h^2 f(x_1, y_1) + g(a, y_1) + \lambda g(x_1, c) + \lambda w_{1,2} + w_{2,1}) / \mu$;
if $|w_{1,1} - z| > NORM$ then set $NORM = |w_{1,1} - z|$;
set $w_{1,1} = z$.
- Step 15** For $i = 2, \dots, n-2$
set $z = (-h^2 f(x_i, y_1) + \lambda g(x_i, c) + w_{i-1,1} + \lambda w_{i,2} + w_{i+1,1}) / \mu$;
if $|w_{i,1} - z| > NORM$ then set $NORM = |w_{i,1} - z|$;
set $w_{i,1} = z$.
- Step 16** Set $z = (-h^2 f(x_{n-1}, y_1) + g(b, y_1) + \lambda g(x_{n-1}, c) + w_{n-2,1} + \lambda w_{n-1,2}) / \mu$;
if $|w_{n-1,1} - z| > NORM$ then set $NORM = |w_{n-1,1} - z|$;
set $w_{n-1,1} = z$.
- Step 17** If $NORM \leq TOL$ then do Steps 18 and 19.
- Step 18** For $i = 1, \dots, n-1$
for $j = 1, \dots, m-1$ OUTPUT $(x_i, y_j, w_{i,j})$.
- Step 19** STOP. (程序成功)
- Step 20** Set $l = l + 1$.
- Step 21** OUTPUT ('Maximum number of iterations exceeded');
(程序失敗)
STOP. ■

雖然為了簡單，在算則 12.1 中用的是高斯-賽德迭代法，但如果方程式數目在 100 以下時，還是用例如高斯消去法的直接法較好，因為正定的特性可確保計算對捨入誤差的穩定。特別是一般化的 Crout 因式分解算則 6.7(見 [Var1], p. 221)，用於這種問題的效率很好，因為此方程組的矩陣可寫為對稱塊狀三對角線 (block tridiagonal) 型式

$$\begin{bmatrix} A_1 & C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ C_1 & A_2 & C_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & C_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & C_{m-1} \\ 0 & \cdots & 0 & C_{m-1} & A_{m-1} \end{bmatrix}$$

區塊大小為 $(n-1) \times (n-1)$ 。

■ 選擇迭代法

對於較大的方程組，應該使用迭代法，特別是算則 7.3 的 SOR 法。此種情形下的最佳 ω 值則是來自，當 A 分解為對角線矩陣 D 及上和下三角矩陣 U 及 L ，

$$A = D - L - U$$

且 B 為 Jacobi 法的矩陣

$$B = D^{-1}(L + U)$$

則 B 的頻譜半徑為 (見 [Var1])

$$\rho(B) = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{m}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right]$$

因此, ω 的值為

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(B)]^2}} = \frac{4}{2 + \sqrt{4 - \left[\cos\left(\frac{\pi}{m}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right]^2}}$$

在算則中也可加入針對區塊的方法, 以加速 SOR 法的收斂。對此方法的說明可參見 [Var1], pp. 219-223。

例題 2 利用普松有限差分法, 及 $n = 6$ 和 $m = 5$ 、容許誤差 10^{-10} 求以下偏微分方程的近似解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = xe^y, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1$$

其邊界條件為

$$u(0, y) = 0, \quad u(2, y) = 2e^y, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$u(x, 0) = x, \quad u(x, 1) = ex, \quad 0 \leq x \leq 2$$

並將結果與確解 $u(x, y) = xe^y$ 做比較。

解 用算則 12.1, 並將最大迭代次數設為 $N = 100$, 所得結果如表 12.2。在 Step 17 中高斯-賽德法的終止準則為

$$|w_{ij}^{(l)} - w_{ij}^{(l-1)}| \leq 10^{-10}$$

$i = 1, \dots, 5$ 及 $j = 1, \dots, 4$ 。我們獲得準確的差分方程的解, 迭代程序停止在 $l = 61$ 。計算結果以及確解一同列於表 12.2。 ■

表 12.2

i	j	x_i	y_j	$w_{ij}^{(61)}$	$u(x_i, y_j)$	$ u(x_i, y_j) - w_{ij}^{(61)} $
1	1	0.3333	0.2000	0.40726	0.40713	1.30×10^{-4}
1	2	0.3333	0.4000	0.49748	0.49727	2.08×10^{-4}
1	3	0.3333	0.6000	0.60760	0.60737	2.23×10^{-4}
1	4	0.3333	0.8000	0.74201	0.74185	1.60×10^{-4}
2	1	0.6667	0.2000	0.81452	0.81427	2.55×10^{-4}
2	2	0.6667	0.4000	0.99496	0.99455	4.08×10^{-4}
2	3	0.6667	0.6000	1.2152	1.2147	4.37×10^{-4}
2	4	0.6667	0.8000	1.4840	1.4837	3.15×10^{-4}
3	1	1.0000	0.2000	1.2218	1.2214	3.64×10^{-4}
3	2	1.0000	0.4000	1.4924	1.4918	5.80×10^{-4}
3	3	1.0000	0.6000	1.8227	1.8221	6.24×10^{-4}
3	4	1.0000	0.8000	2.2260	2.2255	4.51×10^{-4}
4	1	1.3333	0.2000	1.6290	1.6285	4.27×10^{-4}
4	2	1.3333	0.4000	1.9898	1.9891	6.79×10^{-4}
4	3	1.3333	0.6000	2.4302	2.4295	7.35×10^{-4}
4	4	1.3333	0.8000	2.9679	2.9674	5.40×10^{-4}
5	1	1.6667	0.2000	2.0360	2.0357	3.71×10^{-4}
5	2	1.6667	0.4000	2.4870	2.4864	5.84×10^{-4}
5	3	1.6667	0.6000	3.0375	3.0369	6.41×10^{-4}
5	4	1.6667	0.8000	3.7097	3.7092	4.89×10^{-4}

習題組 12.1

完整習題請見隨書光碟

1. 用算則 12.1 求以下橢圓偏微分方程之近似解：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2$$

$$u(x, 0) = x^2, \quad u(x, 2) = (x - 2)^2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0, y) = y^2, \quad u(1, y) = (y - 1)^2, \quad 0 \leq y \leq 2$$

使用 $h = k = \frac{1}{2}$ ，將結果與確解 $u(x, y) = (x - y)^2$ 相比。

2. 用算則 12.1 求以下橢圓偏微分方程之近似解：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 1 < x < 2, \quad 0 < y < 1$$

$$u(x, 0) = 2 \ln x, \quad u(x, 1) = \ln(x^2 + 1), \quad 1 \leq x \leq 2$$

$$u(1, y) = \ln(y^2 + 1), \quad u(2, y) = \ln(y^2 + 4), \quad 0 \leq y \leq 1.$$

使用 $h = k = \frac{1}{3}$ ，將結果與確解 $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ 相比。

3. 用算則 12.1 求下列橢圓型偏微分方程的近似解：

a. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1;$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = y, \quad 0 \leq y \leq 1$$

使用 $h = k = 0.2$ ，將結果與確解 $u(x, y) = xy$ 相比。

b. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -(\cos(x+y) + \cos(x-y)), \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2};$

$$u(0, y) = \cos y, \quad u(\pi, y) = -\cos y, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

$$u(x, 0) = \cos x, \quad u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

使用 $h = \pi/5$ 及 $k = \pi/10$ ，將結果與確解 $u(x, y) = \cos x \cos y$ 相比。

c. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)e^{xy}, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1;$

$$u(0, y) = 1, \quad u(2, y) = e^{2y}, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$u(x, 0) = 1, \quad u(x, 1) = e^x, \quad 0 \leq x \leq 2$$

使用 $h = 0.2$ 及 $k = 0.1$ ，將結果與確解 $u(x, y) = e^{xy}$ 相比。

d. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad 1 < x < 2, \quad 1 < y < 2;$

$$u(x, 1) = x \ln x, \quad u(x, 2) = x \ln(4x^2), \quad 1 \leq x \leq 2$$

$$u(1, y) = y \ln y, \quad u(2, y) = 2y \ln(2y), \quad 1 \leq y \leq 2$$

使用 $h = k = 0.1$ ，將結果與確解 $u(x, y) = xy \ln xy$ 相比。

4. 用外推法及 $h_0 = 0.2$ 、 $h_1 = h_0/2$ 及 $h_2 = h_0/4$ ，重複習題 3(a)。

5. 建構一個類似於算則 12.1 的算則，用 SOR 法及最佳之 ω 值取代高斯-賽德法解線性方程組。

6. 用習題 5 所建構之算則重做習題 3。

7. 一條同軸電纜，內導線為 0.1 吋見方，外導線為 0.5 吋見方。纜線截面上任一點的電位可用拉普拉斯方程式來描述。設內導線保持在 0 volts 而外導線維持 110 volts，求兩導線間的電位。令格點的水平間隔 $h = 0.1$ in，垂直間隔為 $k = 0.1$ in，區域為

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 0.5\}$$

在每個網格點求解拉普拉斯方程式，並利用兩組邊界條件導出可用高斯-賽德法求解的線性方程組。

8. 在一塊 6 cm 乘 5 cm 的矩形銀板上，熱量以 $q = 1.5 \text{ cal/cm}^3 \cdot \text{s}$ 的速率均勻的在每一點上產生。

令 x 代表沿著長邊 (6 cm) 的距離, y 為沿著短邊 (5 cm) 的距離。設邊緣的溫度維持在

$$u(x, 0) = x(6 - x), \quad u(x, 5) = 0, \quad 0 \leq x \leq 6$$

$$u(0, y) = y(5 - y), \quad u(6, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 5$$

其中原點位於銀板的一角, 座標為 $(0, 0)$, x 與 y 軸分別與板的長邊與短邊重合。穩態溫度分布 $u = u(x, y)$ 滿足普松方程式:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{q}{K}, \quad 0 < x < 6, \quad 0 < y < 5$$

其中熱傳導係數 K 為 $1.04 \text{ cal/cm} \cdot \text{deg} \cdot \text{s}$ 。用算則 12.1 及 $h = 0.4$ 和 $k = 1/3$ 求 $u(x, y)$ 的近似解。



12.2 拋物線型偏微分方程

我們要探討的拋物線型偏微分方程是熱傳, 或稱擴散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (12.6)$$

給定條件

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad \text{及} \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

我們用類似於 12.1 節的有限差分法, 求以上方程式的近似解。

首先選一個整數 $m > 0$ 並定義 x 軸的步進距離 $h = l/m$ 。然後選擇一個時間步進 k 。在此情況下, 其格點為 (x_i, t_j) , 其中 $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, m$, 及 $t_j = jk$, $j = 0, 1, \dots$ 。

■ 前向差分法

我們對變數 t 用泰勒級數展開可得差分式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j + k) - u(x_i, t_j)}{k} - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) \quad (12.7)$$

其中 $\mu_j \in (t_j, t_{j+1})$, 而對 x 做泰勒級數展開可得差分式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \quad (12.8)$$

其中 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ 。

由 (12.6) 式可知, 在內部格點 (x_i, t_j) , $i = 1, 2, \dots, m-1$ 且 $j = 1, 2, \dots$, 我們有

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = 0$$

所以, 使用差分式 (12.7) 及 (12.8) 式的有限差分法為

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{ij}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0 \quad (12.9)$$

其中 w_{ij} 是 $u(x_i, t_j)$ 的近似值。

此有限差分公式的局部截尾誤差為

$$\tau_{ij} = \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \quad (12.10)$$

由 (12.9) 式解 $w_{i,j+1}$ 得

$$w_{i,j+1} = \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) w_{ij} + \alpha^2 \frac{k}{h^2} (w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) \quad (12.11)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, m-1$ 且 $j = 1, 2, \dots$ 。

所以我們有

$$w_{0,0} = f(x_0), \quad w_{1,0} = f(x_1), \quad \dots \quad w_{m,0} = f(x_m)$$

然後產生下一個 t 列如下

$$\begin{aligned} w_{0,1} &= u(0, t_1) = 0 \\ w_{1,1} &= \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) w_{1,0} + \alpha^2 \frac{k}{h^2} (w_{2,0} + w_{0,0}) \\ w_{2,1} &= \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) w_{2,0} + \alpha^2 \frac{k}{h^2} (w_{3,0} + w_{1,0}) \\ &\vdots \\ w_{m-1,1} &= \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) w_{m-1,0} + \alpha^2 \frac{k}{h^2} (w_{m,0} + w_{m-2,0}) \\ w_{m,1} &= u(m, t_1) = 0 \end{aligned}$$

接著我們就可以用 $w_{i,1}$ 的值以產生 $w_{i,2}$ 並重複下去。

由此差分法的外顯特性可知，此方程組的 $(m-1) \times (m-1)$ 矩陣為三對角線型式

$$A = \begin{bmatrix} (1-2\lambda) & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & (1-2\lambda) & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & (1-2\lambda) & \dots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & (1-2\lambda) \end{bmatrix}$$

其中 $\lambda = \alpha^2(k/h^2)$ 。如果我們令

$$\mathbf{w}^{(0)} = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{m-1}))^t$$

且

$$\mathbf{w}^{(j)} = (w_{1j}, w_{2j}, \dots, w_{m-1,j})^t, \quad j = 1, 2, \dots$$

則近似解為

$$\mathbf{w}^{(j)} = A\mathbf{w}^{(j-1)}, \quad j = 1, 2, \dots$$

所以只須簡單的矩陣乘法，就可由 $\mathbf{w}^{(j-1)}$ 求得 $\mathbf{w}^{(j)}$ 。這種方法叫做**前向差分法** (Forward-Difference method)，圖 12.8 顯示了，求圖中淺色點之近似解時所會用到的點。如果偏微分方程的解對 x 的四階偏導數，以及對 t 的二階偏導數都為連續，則由 (12.10) 式可知此方法的精度為 $O(k + h^2)$ 。

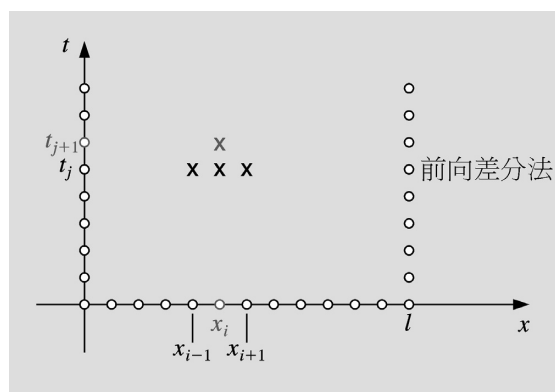


圖 12.8

例題 1 使用步距 (a) $h = 0.1$ 和 $k = 0.0005$ 及 (b) $h = 0.1$ 和 $k = 0.01$ ，求熱傳方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 \leq t$$

之近似解，其邊界條件為

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t$$

初始條件為

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

將 $t = 0.5$ 的計算結果與確解

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$$

做比較。

解 (a) 以前向差分法用 $h = 0.1$ 、 $k = 0.0005$ 及 $\lambda = (1)^2(0.0005/(0.1)^2) = 0.05$ ，所得結果列於表 12.3 的第 3 行。由第 4 行的誤差值可看出，此結果相當準確。

(b) 以前向差分法用 $h = 0.1$ 、 $k = 0.01$ 及 $\lambda = (1)^2(0.01/(0.1)^2) = 1$ ，所得結果列於表 12.3 的第 5 行，由第 6 行可看出，此結果毫無意義。 ■

表 12.3

x_i	$u(x_i, 0.5)$	$w_{i,1000}$ $k = 0.0005$	$ u(x_i, 0.5) - w_{i,1000} $	$w_{i,50}$ $k = 0.01$	$ u(x_i, 0.5) - w_{i,50} $
0.0	0	0		0	
0.1	0.00222241	0.00228652	6.411×10^{-5}	8.19876×10^7	8.199×10^7
0.2	0.00422728	0.00434922	1.219×10^{-4}	-1.55719×10^8	1.557×10^8
0.3	0.00581836	0.00598619	1.678×10^{-4}	2.13833×10^8	2.138×10^8
0.4	0.00683989	0.00703719	1.973×10^{-4}	-2.50642×10^8	2.506×10^8
0.5	0.00719188	0.00739934	2.075×10^{-4}	2.62685×10^8	2.627×10^8
0.6	0.00683989	0.00703719	1.973×10^{-4}	-2.49015×10^8	2.490×10^8
0.7	0.00581836	0.00598619	1.678×10^{-4}	2.11200×10^8	2.112×10^8
0.8	0.00422728	0.00434922	1.219×10^{-4}	-1.53086×10^8	1.531×10^8
0.9	0.00222241	0.00228652	6.511×10^{-5}	8.03604×10^7	8.036×10^7
1.0	0	0		0	

■ 穩定性問題

在例題 1 中，我們預期截尾誤差為 $O(k + h^2)$ 。在使用 $h = 0.1$ 及 $k = 0.0005$ 時確實如此，但在 $h = 0.1$ 及 $k = 0.01$ 時就不對了。要了解問題所在，我們須要檢視一下前向差分法的穩定性。

如果在初始條件

$$\mathbf{w}^{(0)} = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{m-1}))^t$$

中含有誤差 $\mathbf{e}^{(0)} = (e_1^{(0)}, e_2^{(0)}, \dots, e_{m-1}^{(0)})^t$ (用初始條件只是為了方便說明，可以是任一個時間步進)，傳遞到 $\mathbf{w}^{(1)}$ 的誤差為 $A\mathbf{e}^{(0)}$ ，因為

$$\mathbf{w}^{(1)} = A\mathbf{w}^{(0)} + \mathbf{e}^{(0)} = A\mathbf{w}^{(0)} + A\mathbf{e}^{(0)}$$

此程序一再重複。在第 n 個時間步進時， $\mathbf{e}^{(0)}$ 對 $\mathbf{w}^{(n)}$ 所造成的誤差為 $A^n\mathbf{e}^{(0)}$ 。這個方法要穩定，則此一誤差不能隨著 n 的增加而變大。所以對任何的初始誤差 $\mathbf{e}^{(0)}$ ，對所有的 n 都要有 $\|A^n\mathbf{e}^{(0)}\| \leq \|\mathbf{e}^{(0)}\|$ 。因此，必須要 $\|A^n\| \leq 1$ ，由定理 7.15 得知，也就是要 $\rho(A^n) = (\rho(A))^n \leq 1$ 。所以只有在 $\rho(A) \leq 1$ 時，前向差分法為穩定。

可以求得 A 的特徵值 (見習題 13) 為

$$\mu_i = 1 - 4\lambda \left(\sin \left(\frac{i\pi}{2m} \right) \right)^2, \quad i = 1, 2, \dots, m-1$$

所以穩定的條件簡化為是否滿足

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq m-1} \left| 1 - 4\lambda \left(\sin \left(\frac{i\pi}{2m} \right) \right)^2 \right| \leq 1$$

可再簡化為

$$0 \leq \lambda \left(\sin \left(\frac{i\pi}{2m} \right) \right)^2 \leq \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1$$

要達到穩定的要求，此不等式在 $h \rightarrow 0$ 時必須成立，或由另一個角度看是 $m \rightarrow \infty$ ，而由

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sin \left(\frac{(m-1)\pi}{2m} \right) \right]^2 = 1$$

的事實可得，穩定的條件為 $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$ 。

由定義 $\lambda = \alpha^2(k/h^2)$ ，所以由此不等式知， h 和 k 必須滿足

$$\alpha^2 \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

在例題 1 中 $\alpha^2 = 1$ ，所以 $h=0.1$ 及 $k=0.0005$ 時滿足此一條件。但是當 k 增加為 0.01 卻沒有相對的增加 h ，其比值成為

$$\frac{0.01}{(0.1)^2} = 1 > \frac{1}{2}$$

也就出現了立即且劇烈的穩定問題。

與第 5 章所用的名詞一致，前向差分法為**條件穩定** (conditionally stable) 且其收斂到 (12.6) 式的收斂速率為 $O(k + h^2)$ ，前提為

$$\alpha^2 \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

且其解滿足必要的連續條件。(更詳細的證明可參見 [IK, pp. 502-505]。)

■ 後向差分法

要得到**無條件穩定** (unconditionally stable) 的方法，我們考慮一種隱式差分法 (implicit-difference)，對 $(\partial u / \partial t)(x_i, t_j)$ 使用後向差分式，其型式為

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k} + \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j)$$

其中 μ_j 在 (t_{j-1}, t_j) 之間。將此公式，以及 (12.8) 式的 $\partial^2 u / \partial x^2$ ，代入偏微分方程得

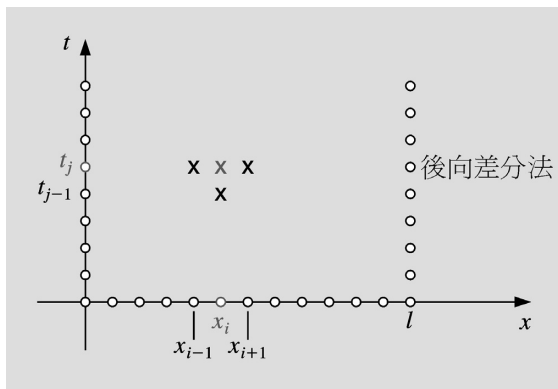
$$\begin{aligned} & \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k} - \alpha^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} \\ &= -\frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \end{aligned}$$

其中 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ 。由此得後向差分法 (Backward-Difference method)

$$\frac{w_{ij} - w_{i,j-1}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0 \quad (12.12)$$

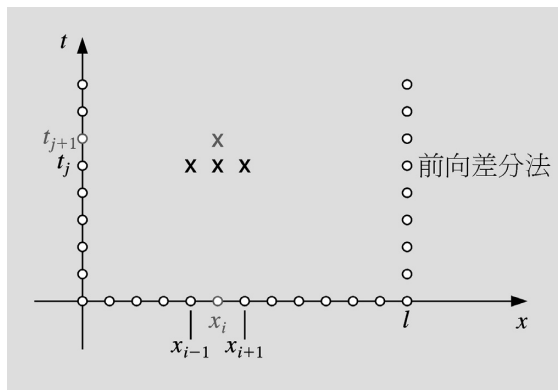
其中 $i = 1, 2, \dots, m-1$ 且 $j = 1, 2, \dots$ 。

後向差分法，在每一個時間步進求點 (x_i, t_j) 上的近似解時，會用到格點 (x_i, t_{j-1}) 、 (x_{i-1}, t_j) 、及 (x_{i+1}, t_j) ，如圖 12.9 所示。



| 圖 12.9

在此問題中，標示圓圈的點是由初始條件與邊界條件所決定，由圖可看出，無法用顯式法求解 (12.12) 式。但對於前向差分法（見圖 12.10），我們用到格點 (x_{i-1}, t_{j-1}) 、 (x_i, t_{j-1}) 及 (x_{i+1}, t_{j-1}) 的近似解以求出 (x_i, t_j) 的近似解。所以可利用初始與邊界條件，以顯式法求解。



| 圖 12.10

如果同樣令 λ 代表 $\alpha^2(k/h^2)$ ，後向差分法可寫成

$$(1 + 2\lambda)w_{ij} - \lambda w_{i+1,j} - \lambda w_{i-1,j} = w_{i,j-1}$$

其中 $i = 1, 2, \dots, m-1$ 且 $j = 1, 2, \dots$ 。因為已知在每個 $i = 1, 2, \dots, m-1$, $w_{i,0} = f(x_i)$,

且在 $j = 1, 2, \dots$ 時 $w_{m,j} = w_{0,j} = 0$ ，故差分法的矩陣型式可寫成

$$\begin{bmatrix} (1+2\lambda) & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & (1+2\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{m-1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j-1} \end{bmatrix} \quad (12.13)$$

或 $A\mathbf{w}^{(i)} = \mathbf{w}^{(i-1)}$, $i = 1, 2, \dots$ 。

因此我們由 $\mathbf{w}^{(i-1)}$ 求 $\mathbf{w}^{(i)}$ ，必須解線性方程組。因為 $\lambda > 0$ ，所以矩陣 A 為正定且完全對角線主導 (strictly diagonally dominant)，同時為三對角線矩陣。我們可以用 Crout 因式分解算則 6.7 或 SOR 算則 7.3 求解此方程組。算則 12.2 則採用 Crout 因式分解法求解 (12.13) 式，當 m 不很大時，這是可行的方法。在此算則中，我們設定 t 的上限，以做為程式終止的條件。

算則 12.2 熱傳方程式後向差分法 (Heat Equation Backward-Difference)

求拋物線型偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T$$

的近似解，已知邊界條件

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < T$$

及初始條件

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

INPUT 端點 l ；最大時間 T ；常數 α ；整數 $m \geq 3$ 及 $N \geq 1$ 。

OUTPUT $u(x_i, t_j)$ 在每個 $i = 1, \dots, m-1$ 及 $j = 1, \dots, N$ 的近似值 $w_{i,j}$ 。

Step 1 Set $h = l/m$;
 $k = T/N$;
 $\lambda = \alpha^2 k / h^2$.

Step 2 For $i = 1, \dots, m-1$ set $w_i = f(ih)$. (初始值)
 (Steps 3-11 用算則 6.7 解三對角線線性方程組)

Step 3 Set $l_1 = 1 + 2\lambda$;
 $u_1 = -\lambda / l_1$.

Step 4 For $i = 2, \dots, m-2$ set $l_i = 1 + 2\lambda + \lambda u_{i-1}$;
 $u_i = -\lambda / l_i$.

Step 5 Set $l_{m-1} = 1 + 2\lambda + \lambda u_{m-2}$.

Step 6 For $j = 1, \dots, N$ do Steps 7-11.

Step 7 Set $t = jk$; (目前的 t_j)
 $z_1 = w_1 / l_1$.

Step 8 For $i = 2, \dots, m-1$ set $z_i = (w_i + \lambda z_{i-1})/l_i$.

Step 9 Set $w_{m-1} = z_{m-1}$.

Step 10 For $i = m-2, \dots, 1$ set $w_i = z_i - u_i w_{i+1}$.

Step 11 OUTPUT (t); (註： $t = t_j$)
For $i = 1, \dots, m-1$ set $x = ih$;
OUTPUT (x, w_i). (註： $w_i = w_{i,j}$)

Step 12 STOP. (程序完成)

例題 2 使用後向差分法(算則 12.2)及 $h=0.1$ 和 $k=0.01$ 求例題 1 之熱傳方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

的近似解，給定條件

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t, \quad u(x, 0) = \sin \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

解 在例題 1 中，我們用 $h=0.1$ 和 $k=0.0005$ 獲得相當準確的近似解。但使用本例中的 $h=0.1$ 和 $k=0.01$ 時，結果很差。為說明後向差分法的無條件穩定性，我們在此使用 $h=0.1$ 和 $k=0.01$ ，並再次比較 $w_{i,50}$ 及 $u(x_i, 0.5)$ ，其中 $i = 0, 1, \dots, 10$ 。

計算結果列於表 12.4，表中所用的 h 及 k 的值，與表 12.3 的第 5 及第 6 行所用的一樣，由此可看出此方法的穩定性。

表 12.4

x_i	$w_{i,50}$	$u(x_i, 0.5)$	$ w_{i,50} - u(x_i, 0.5) $
0.0	0	0	
0.1	0.00289802	0.00222241	6.756×10^{-4}
0.2	0.00551236	0.00422728	1.285×10^{-3}
0.3	0.00758711	0.00581836	1.769×10^{-3}
0.4	0.00891918	0.00683989	2.079×10^{-3}
0.5	0.00937818	0.00719188	2.186×10^{-3}
0.6	0.00891918	0.00683989	2.079×10^{-3}
0.7	0.00758711	0.00581836	1.769×10^{-3}
0.8	0.00551236	0.00422728	1.285×10^{-3}
0.9	0.00289802	0.00222241	6.756×10^{-4}
1.0	0	0	

經由分析矩陣 A 的特徵值，可看出為何後向差分法沒有穩定的問題，但前向差分法卻有。後向差分法的特徵值為(見習題 14)

$$\mu_i = 1 + 4\lambda \left[\sin \left(\frac{i\pi}{2m} \right) \right]^2, \quad i = 1, 2, \dots, m-1$$

因為 $\lambda > 0$ ，所以對所有的 $i = 1, 2, \dots, m-1$ ，我們有 $\mu_i > 1$ 。因為 A^{-1} 的特徵值是 A 的特徵值的倒數，所以 A^{-1} 的頻譜半徑 $\rho(A^{-1}) < 1$ 。這代表 A^{-1} 是收斂矩陣。

在後向差分法中，初始值中的誤差 $\mathbf{e}^{(0)}$ ，在 n 次時間步進後造成的誤差為 $(A^{-1})^n \mathbf{e}^{(0)}$ 。因為 A^{-1} 是收斂矩陣，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A^{-1})^n \mathbf{e}^{(0)} = \mathbf{0}$$

所以使用任何的 $\lambda = \alpha^2(k/h^2)$ ，此方法均為穩定。依據第 5 章所用的名辭，我們將後向差分法叫做**無條件穩定法** (unconditionally stable method)。其局部截尾誤差為 $O(k + h^2)$ ，當然其前提為此微分方程的解滿足一般的可微條件。在此情形下，此方法以同樣的收斂速率收斂到微分方程的解 (見 [IK], p. 508)。

後向差分法有一個缺點，它的局部截尾誤差中包含了 $O(h^2)$ 和 $O(k)$ 的兩部分。所以使用的時間間距必須比空間間隔小很多。能有一種局部截尾誤差為 $O(k^2 + h^2)$ 的方法當然比較好。建立這種方法的第一步，使用誤差為 $O(k^2)$ 的差分公式來代表 $u_t(x, t)$ ，而不再用之前 $O(k)$ 的差分公式。我們可以將函數 $u(x, t)$ 在點 (x_i, t_j) 對 t 用泰勒級數展開，然後利用 (x_i, t_{j+1}) 和 (x_i, t_{j-1}) 的級數以獲得中央差分公式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_{j-1}))}{2k} + \frac{k^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \mu_j)$$

其中 $\mu_j \in (t_{j-1}, t_{j+1})$ 。將上式以及通常用於 $(\partial^2 u / \partial x^2)$ 的差分式，(12.8) 式，代入微分方程可得**理查森法** (Richardson's method)

$$\frac{w_{ij+1} - w_{ij-1}}{2k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1j} - 2w_{ij} + w_{i-1j}}{h^2} = 0 \quad (12.14)$$

此方法的局部截尾誤差為 $O(k^2 + h^2)$ ，但很不幸的，和前向差分法一樣，它有嚴重的穩定性問題 (見習題 11 及 12)。

■ Crank-Nicolson 法

另一種實際可行的方法是將兩種差分公式加以平均，考慮在 t 為第 j 步的前向差分法

$$\frac{w_{ij+1} - w_{ij}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1j} - 2w_{ij} + w_{i-1j}}{h^2} = 0$$

其局部截尾誤差為

$$\tau_F = \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) + O(h^2)$$

以及第 $(j+1)$ 步的後向差分法

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{ij}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j+1} - 2w_{ij+1} + w_{i-1,j+1}}{h^2} = 0$$

其局部截尾誤差為

$$\tau_B = -\frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \hat{\mu}_j) + O(h^2)$$

如果我們假設

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \hat{\mu}_j) \approx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j)$$

則平均後之差分法為

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{ij}}{k} - \frac{\alpha^2}{2} \left[\frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h^2} + \frac{w_{i+1,j+1} - 2w_{ij+1} + w_{i-1,j+1}}{h^2} \right] = 0$$

其局部截尾誤差為 $O(k^2 + h^2)$ ，前提當然也是要滿足一般的可微條件。

此方法叫做 **Crank-Nicolson 法**，其矩陣型式可寫成

$$A\mathbf{w}^{(j+1)} = B\mathbf{w}^{(j)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (12.15)$$

其中

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{ij}}{k} - \frac{\alpha^2}{2} \left[\frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h^2} + \frac{w_{i+1,j+1} - 2w_{ij+1} + w_{i-1,j+1}}{h^2} \right] = 0$$

且矩陣 A 及 B 為：

$$A = \begin{bmatrix} (1+\lambda) & -\frac{\lambda}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{\lambda}{2} & (1+\lambda) \end{bmatrix}$$

及

$$B = \begin{bmatrix} (1-\lambda) & \frac{\lambda}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\lambda}{2} & (1-\lambda) \end{bmatrix}$$

非奇異矩陣 A 為正定、完全對角線主導及三對角線。所以對 $j=0, 1, 2, \dots$ ，要由 $\mathbf{w}^{(j-1)}$ 求 $\mathbf{w}^{(j)}$ ，可以用 Crout 因式分解算則 6.7 或 SOR 算則 7.3。算則 12.3 則將 Crout 因式分解與 Crank-Nicolson 法結合。與算則 12.2 一樣，必須指定一個時間長度，以終止計算。Crank-Nicolson 法為無條件穩定，且收斂速率為 $O(k^2 + h^2)$ ，其證明可參見 [IK], pp. 508-512。圖 12.11 顯示了，求 (x_i, t_j) 之近似解時所會用到的格點。

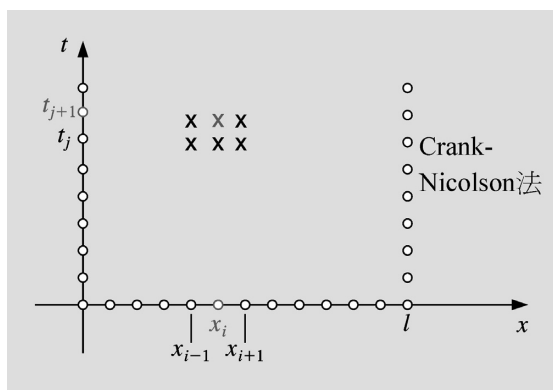


圖 12.11

算則 12.3 Crank-Nicolson

求拋物線型偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T$$

的近似解，已知邊界條件

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < T$$

及初始條件

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

INPUT 端點 l ；最大時間 T ；常數 α ；整數 $m \geq 3$ 及 $N \geq 1$ 。OUTPUT $u(x_i, t_j)$ 在每個 $i = 1, \dots, m-1$ 及 $j = 1, \dots, N$ 的近似值 w_{ij} 。

Step 1 Set $h = l/m$;
 $k = T/N$;
 $\lambda = \alpha^2 k / h^2$;
 $w_m = 0$.

Step 2 For $i = 1, \dots, m-1$ set $w_i = f(ih)$. (初始值)
 (Steps 3-11 用算則 6.7 解三對角線線性方程組)

Step 3 Set $l_1 = 1 + \lambda$;
 $u_1 = -\lambda / (2l_1)$.

Step 4 For $i = 2, \dots, m-2$ set $l_i = 1 + \lambda + \lambda u_{i-1} / 2$;
 $u_i = -\lambda / (2l_i)$.

Step 5 Set $l_{m-1} = 1 + \lambda + \lambda u_{m-2} / 2$.

Step 6 For $j = 1, \dots, N$ do Steps 7-11.

Step 7 Set $t = jk$; (目前的 t_j)

$$z_1 = \left[(1 - \lambda)w_1 + \frac{\lambda}{2}w_2 \right] / l_1.$$

Step 8 For $i = 2, \dots, m-1$ set

$$z_i = \left[(1 - \lambda)w_i + \frac{\lambda}{2}(w_{i+1} + w_{i-1} + z_{i-1}) \right] / l_i.$$

Step 9 Set $w_{m-1} = z_{m-1}$.

Step 10 For $i = m-2, \dots, 1$ set $w_i = z_i - u_i w_{i+1}$.

Step 11 OUTPUT (t); (註: $t = t_j$)

For $i = 1, \dots, m-1$ set $x = ih$;

OUTPUT (x, w_i). (註: $w_i = w_{i,j}$)

Step 12 STOP. (程序完成) ■

例題 3 用 Crank-Nicolson 法及 $h = 0.1$ 、 $k = 0.01$ 求

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1 \quad 0 < t$$

之近似解，給定條件為

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t$$

及

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

解 選取 $h = 0.1$ 和 $k = 0.01$ ，在算則 12.3 中可得 $m = 10$ 、 $N = 50$ 及 $\lambda = 1$ 。回顧一下，使用此處的 h 和 k 時，前向差分法結果很差，而後向差分法在表的中段部分準確到約 2×10^{-3} 。表 12.5 列出 Crank-Nicolson 法的結果，它的準確度更優於後向差分法。 ■

表 12.5

x_i	$w_{i,50}$	$u(x_i, 0.5)$	$ w_{i,50} - u(x_i, 0.5) $
0.0	0	0	
0.1	0.00230512	0.00222241	8.271×10^{-5}
0.2	0.00438461	0.00422728	1.573×10^{-4}
0.3	0.00603489	0.00581836	2.165×10^{-4}
0.4	0.00709444	0.00683989	2.546×10^{-4}
0.5	0.00745954	0.00719188	2.677×10^{-4}
0.6	0.00709444	0.00683989	2.546×10^{-4}
0.7	0.00603489	0.00581836	2.165×10^{-4}
0.8	0.00438461	0.00422728	1.573×10^{-4}
0.9	0.00230512	0.00222241	8.271×10^{-5}
1.0	0	0	

習題組 12.2 完整習題請見隨書光碟

1. 用後向差分法求以下偏微分方程的近似解。

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = u(2, t) = 0, \quad 0 < t, \quad u(x, 0) = \sin \frac{\pi}{2}x, \quad 0 \leq x \leq 2$$

使用 $m=4$ 、 $T=0.1$ 及 $N=2$ ，將結果與確解 $u(x, t) = e^{-(\pi^2/4)t} \sin \frac{\pi}{2}x$ 做比較。

2. 用後向差分法求以下偏微分方程的近似解。

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t, \quad u(x, 0) = 2 \sin 2\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

使用 $m=3$ 、 $T=0.1$ 及 $N=2$ ，將結果與確解 $u(x, t) = 2e^{-(\pi^2/4)t} \sin 2\pi x$ 做比較。

3. 用 Crank-Nicolson 算則重做習題 1。

4. 用 Crank-Nicolson 算則重做習題 2。

5. 用前向差分法求下列拋物線型偏微分方程之近似解。

a. $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < t$

$$u(0, t) = u(2, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = \sin 2\pi x, \quad 0 \leq x \leq 2$$

用 $h=0.4$ 及 $k=0.1$ ，將 $t=0.5$ 的結果與確解 $u(x, t) = e^{-4\pi^2 t} \sin 2\pi x$ 做比較。再用 $h=0.4$ 及 $k=0.05$ ，並再次比較結果。

b. $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

用 $h = \pi/10$ 及 $k=0.05$ ，將 $t=0.5$ 的結果與確解 $u(x, t) = e^{-t} \sin x$ 做比較。

6. 用前向差分法求下列拋物線型偏微分方程之近似解。

a. $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{4}{\pi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 4, \quad 0 < t$

$$u(0, t) = u(4, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = \sin \frac{\pi}{4}x \left(1 + 2 \cos \frac{\pi}{4}x\right), \quad 0 \leq x \leq 4$$

用 $h=0.2$ 及 $k=0.04$ ，將 $t=0.4$ 的結果與確解 $u(x, t) = e^{-t} \sin \frac{\pi}{2}x + e^{-t/4} \sin \frac{\pi}{4}x$ 做比較。

b. $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = \cos \pi \left(x - \frac{1}{2}\right), \quad 0 \leq x \leq 1$$

用 $h=0.1$ 及 $k=0.04$ ，將 $t=0.4$ 的結果與確解 $u(x, t) = e^{-t} \cos \pi \left(x - \frac{1}{2}\right)$ 做比較。

7. 用後向差分算則重做習題 5。
8. 用後向差分算則重做習題 6。
9. 用 Crank-Nicolson 算則重做習題 5。
10. 用 Crank-Nicolson 算則重做習題 6。
11. 用理察生法重做習題 5。
12. 用理察生法重做習題 6。
13. $(m-1)$ 乘 $(m-1)$ 的三對角線矩陣 A 定義為

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda, & j = i-1 \text{ 或 } j = i+1, \\ 1-2\lambda, & j = i, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

證明其特徵值為

$$\mu_i = 1 - 4\lambda \left(\sin \frac{i\pi}{2m} \right)^2, \quad i = 1, 2, \dots, m-1$$

且有相對之特徵向量 $\mathbf{v}^{(i)}$ ，其中 $v_j^{(i)} = \sin(ij\pi/m)$ 。

14. $(m-1)$ 乘 $(m-1)$ 的三對角線矩陣 A 定義為

$$a_{ij} = \begin{cases} -\lambda, & j = i-1 \text{ 或 } j = i+1, \\ 1+2\lambda, & j = i, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$ ，證明其為正定且完全對角線主導，並證明其特徵值為

$$\mu_i = 1 + 4\lambda \left(\sin \frac{i\pi}{2m} \right)^2, \quad i = 1, 2, \dots, m-1$$

且有相對之特徵向量 $\mathbf{v}^{(i)}$ ，其中 $v_j^{(i)} = \sin(ij\pi/m)$ 。

15. 修改算則 12.2 及 12.3 使能適用於拋物線型偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

16. 用習題 15 的結果，求

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = \sin \pi x + x(1-x)$$

之近似解，使用 $h=0.1$ 及 $k=0.01$ 。將 $t=0.25$ 時的結果與確解 $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x + x(1-x)$ 做比較。

17. 修改算則 12.2 及 12.3，使能適用於偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = \phi(t), \quad u(l, t) = \Psi(t), \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

其中 $f(0) = \phi(0)$ 且 $f(l) = \Psi(0)$ 。

18. 對一根固定截面積的長薄桿，若其材料具均質導熱性，則其溫度分布 $u(x, t)$ 滿足一維熱傳方程式。假設經由電阻或核反應，材料中會產生熱，則熱傳方程式為

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{Kr}{\rho C} = K \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t$$

其中 l 為長度、 ρ 為密度、 C 為比熱值、且 K 為熱擴散係數。函數 $r = r(x, t, u)$ 代表每單位體積產生的熱。設定

$$l = 1.5 \text{ cm}, \quad K = 1.04 \text{ cal/cm} \cdot \text{deg} \cdot \text{s}, \quad \rho = 10.6 \text{ g/cm}^3, \quad C = 0.056 \text{ cal/g} \cdot \text{deg}$$

及

$$r(x, t, u) = 5.0 \text{ cal/cm}^3 \cdot \text{s}$$

若 2 端點溫度維持在 0°C ，則

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0$$

設初始溫度分布為

$$u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l$$

用習題 15 的結果求溫度分布的近似解，給定 $h = 0.15$ 及 $k = 0.0225$ 。

19. Sagar 和 Payne [SP] 分析反覆加熱及冷卻之圓柱體之材料特性與應力—應變關係，他們使用方程式

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{4K} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \frac{1}{2} < r < 1, \quad 0 < T$$

其中 $T = T(r, t)$ 為溫度， r 為由圓柱中心算起的徑向距離， t 為時間，且 K 為擴散係數。

- a. 求 $T(r, 10)$ 的近似解，已知圓柱外徑為 1，初始及邊界條件為：

$$T(1, t) = 100 + 40t, \quad T\left(\frac{1}{2}, t\right) = t, \quad 0 \leq t \leq 10$$

$$T(r, 0) = 200(r - 0.5), \quad 0.5 \leq r \leq 1.$$

使用修改過之後向差分法，給定 $K = 0.1$ 、 $k = 0.5$ 及 $h = \Delta r = 0.1$ 。

- b. 用 (a) 所得的溫度分布，求積分

$$I = \int_{0.5}^1 \alpha T(r, t) r \, dr$$

的近似解，以得到應變 I 的近似值，其中 $\alpha = 10.7$ 且 $t = 10$ 。使用 $n = 5$ 的複合梯形法則。



12.3 雙曲線型偏微分方程

在本節中我們要考慮**波動方程式** (wave equation) 的數值解，這是一個雙曲線型偏微分方程。波動方程式為

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (12.16)$$

其條件為

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(l, t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \text{及} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l \end{aligned}$$

其中 α 為常數，取決於此問題的物理條件。

選擇一個整數 $m > 0$ ，以 $h = l/m$ 定義 x 軸的格點。另外再選取時間步距 $k > 0$ 。格點 (x_i, t_j) 定義為

$$x_i = ih \quad \text{及} \quad t_j = jk$$

$i = 0, 1, \dots, m$ 及 $j = 0, 1, \dots$ 。

在每個內部格點 (x_i, t_j) 上，波動方程式可寫成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = 0 \quad (12.17)$$

用中央差分公式表示二次偏導數可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{k^2} - \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \mu_j)$$

其中 $\mu_j \in (t_{j-1}, t_{j+1})$ ，及

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)$$

其中 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ 。將以上 2 式代入 (12.17) 式可得

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{k^2} - \alpha^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} \\ &= \frac{1}{12} \left[k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \right] \end{aligned}$$

去掉誤差項

$$\tau_{ij} = \frac{1}{12} \left[k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \right] \quad (12.18)$$

可得差分方程式

$$\frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{k^2} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

定義 $\lambda = \alpha k/h$ ，差分方程式可寫成

$$w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1} - \lambda^2 w_{i+1,j} + 2\lambda^2 w_{i,j} - \lambda^2 w_{i-1,j} = 0$$

移項後得最新一次時間步進的近似值 $w_{i,j+1}$ 為

$$w_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)w_{i,j} + \lambda^2(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - w_{i,j-1} \quad (12.19)$$

此方程式在 $i = 1, 2, \dots, m-1$ 及 $j = 1, 2, \dots$ 時成立。由邊界條件得

$$w_{0,j} = w_{m,j} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (12.20)$$

由初始條件得

$$w_{i,0} = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, m-1 \quad (12.21)$$

將此方程組寫成矩陣型式為

$$\begin{bmatrix} w_{1,j+1} \\ w_{2,j+1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda^2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{m-1,j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j-1} \end{bmatrix} \quad (12.22)$$

由 (12.19) 及 (12.20) 式可知，在計算 $(j+1)$ 時距時，須要 j 與 $(j-1)$ 時距的值。(見圖 12.12) 這樣就出現了起動的問題，因為由 (12.21) 式可得 $j=0$ 的值，但是用 (12.19) 式求 $w_{i,2}$ 時必須要用到 $j=1$ 的值，這必須來自初始速度的條件

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

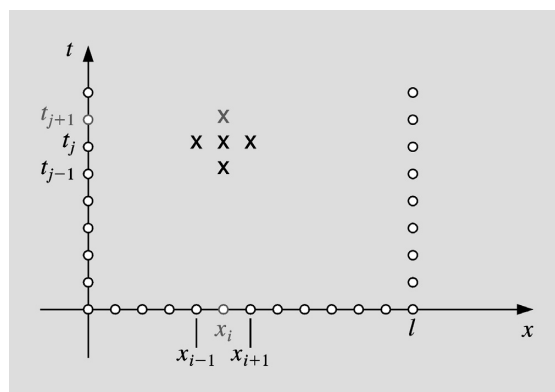


圖 12.12

一種方法是用前向差分來替換 $\partial u / \partial t$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) = \frac{u(x_i, t_1) - u(x_i, 0)}{k} - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \tilde{\mu}_i) \quad (12.23)$$

其中 $\tilde{\mu}_i$ 在 $(0, t_1)$ 之間。由此方程式解 $u(x_i, t_1)$ 得

$$\begin{aligned} u(x_i, t_1) &= u(x_i, 0) + k \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \tilde{\mu}_i) \\ &= u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \tilde{\mu}_i) \end{aligned}$$

刪除截尾誤差項可得近似值 ,

$$w_{i,1} = w_{i,0} + kg(x_i) \quad , \quad i = 1, \dots, m-1 \quad (12.24)$$

但是這樣的近似值其誤差為 $O(k)$, 而 (12.19) 式的誤差為 $O(k^2)$ 。

■ 改進初始近似值

要獲得 $u(x_i, 0)$ 更好的近似值 , 將 $u(x_i, t_1)$ 以麥克勞林 (Maclaurin) 多項式對 t 展開。則

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + k \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, 0) + \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \hat{\mu}_i)$$

其中 $\hat{\mu}_i$ 在 $(0, t_1)$ 之間。如果 f'' 存在 , 則

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, 0) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, 0) = \alpha^2 \frac{d^2 f}{dx^2}(x_i) = \alpha^2 f''(x_i)$$

且

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{\alpha^2 k^2}{2} f''(x_i) + \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \hat{\mu}_i)$$

可得誤差為 $O(k^3)$ 的近似值 :

$$w_{i,1} = w_{i,0} + kg(x_i) + \frac{\alpha^2 k^2}{2} f''(x_i)$$

如果 $f \in C^4[0, 1]$, 但 $f''(x_i)$ 並非現成 , 則可以使用 (4.9) 式的差分公式寫出

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\tilde{\xi}_i)$$

其中 $\tilde{\xi}_i$ 在 (x_{i-1}, x_{i+1}) 之間。由此可得

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{k^2 \alpha^2}{2h^2} [f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))] + O(k^3 + h^2 k^2)$$

因為 $\lambda = k\alpha/h$, 我們可將上式寫成

$$\begin{aligned}
u(x_i, t_1) &= u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{\lambda^2}{2}[f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))] + O(k^3 + h^2k^2) \\
&= (1 - \lambda^2)f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2}f(x_{i+1}) + \frac{\lambda^2}{2}f(x_{i-1}) + kg(x_i) + O(k^3 + h^2k^2)
\end{aligned}$$

因此，可以用差分方程式

$$w_{i,1} = (1 - \lambda^2)f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2}f(x_{i+1}) + \frac{\lambda^2}{2}f(x_{i-1}) + kg(x_i) \quad (12.25)$$

求 $i = 1, 2, \dots, m-1$ 的 $w_{i,1}$ 。用 (12.22) 式的方程組可求出後續的近似值。

雖然 (12.24) 式同樣可用，但在算則 12.4 中採用 (12.25) 式求 $w_{i,1}$ 。在此假設已知計算終止時間 t 的上限，且 $k = T/N$ ，其中 N 也是已知。

算則 12.4 波動方程式的有限差分法 (Wave Equation Finite-Difference)

求波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T$$

的近似解，已知邊界條件

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < T$$

及初始條件

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{、和} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

INPUT 端點 l ；最大時間 T ；常數 α ；整數 $m \geq 2$ 及 $N \geq 2$ 。

OUTPUT $u(x_i, t_j)$ 在每個 $i = 0, \dots, m$ 及 $j = 0, \dots, N$ 的近似值 $w_{i,j}$ 。

Step 1 Set $h = l/m$;
 $k = T/N$;
 $\lambda = k\alpha/h$.

Step 2 For $j = 1, \dots, N$ set $w_{0,j} = 0$;
 $w_{m,j} = 0$;

Step 3 Set $w_{0,0} = f(0)$;
 $w_{m,0} = f(l)$.

Step 4 For $i = 1, \dots, m-1$ (對 $t = 0$ 及 $t = k$ 做初始化)
 set $w_{i,0} = f(ih)$;
 $w_{i,1} = (1 - \lambda^2)f(ih) + \frac{\lambda^2}{2}[f((i+1)h) + f((i-1)h)] + kg(ih)$.

Step 5 For $j = 1, \dots, N-1$ (執行矩陣乘法)
 for $i = 1, \dots, m-1$
 set $w_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)w_{i,j} + \lambda^2(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - w_{i,j-1}$.

Step 6 For $j = 0, \dots, N$
 set $t = jk$;
 for $i = 0, \dots, m$
 set $x = ih$;
 OUTPUT $(x, t, w_{i,j})$.

Step 7 STOP. (程序完成) ■

例題 1 求雙曲線型偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

之近似解，其邊界條件為

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t$$

初始條件為

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \text{及} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

使用 $h = 0.1$ 及 $k = 0.05$ 。將結果與確解

$$u(x, t) = \sin \pi x \cos 2\pi t$$

做比較。

表 12.6

x_i	$w_{i,50}$
0.0	0.0000000000
0.1	0.3090169944
0.2	0.5877852523
0.3	0.8090169944
0.4	0.9510565163
0.5	1.0000000000
0.6	0.9510565163
0.7	0.8090169944
0.8	0.5877852523
0.9	0.3090169944
1.0	0.0000000000

解 選用 $h = 0.1$ 及 $k = 0.05$ 可得 $\lambda = 1$ 、 $m = 10$ 及 $N = 20$ 。我們選取最大時間 $T = 1$ 並使用有限差分法算則 12.4。這會得到 $i = 0, 1, \dots, 10$ 之 $u(0.1i, 1)$ 的近似值 $w_{i,N}$ 。計算結果如表 12.6 所示，均準確至所示位數。 ■

此方法的截尾誤差為 $O(k^2 + h^2)$ ，但以上結果的準確度超過預期。這是因為此問題的確解是無限可微。在此種情況下使用泰勒級數可得

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) + 2 \left[\frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j) + \frac{h^4}{6!} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_i, t_j) + \dots \right] \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{k^2} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) + 2 \left[\frac{k^2}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, t_j) + \frac{k^4}{6!} \frac{\partial^6 u}{\partial t^6}(x_i, t_j) + \dots \right] \end{aligned}$$

因為 $u(x, t)$ 滿足偏微分方程

$$\begin{aligned}
& \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{k^2} - \alpha^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} \\
&= 2 \left[\frac{1}{4!} \left(k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, t_j) - \alpha^2 h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{6!} \left(k^4 \frac{\partial^6 u}{\partial t^6}(x_i, t_j) - \alpha^2 h^4 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_i, t_j) \right) + \dots \right] \quad (12.26)
\end{aligned}$$

但是對波動方程式微分可得

$$\begin{aligned}
k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, t_j) &= k^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \right] = \alpha^2 k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) \right] \\
&= \alpha^2 k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \right] = \alpha^4 k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j)
\end{aligned}$$

而且因為 $\lambda^2 = (\alpha^2 k^2 / h^2) = 1$ ，我們可得

$$\frac{1}{4!} \left[k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, t_j) - \alpha^2 h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j) \right] = \frac{\alpha^2}{4!} [\alpha^2 k^2 - h^2] \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j) = 0$$

重複同樣的過程，可得 (12.26) 式右側的所有項都為 0，所以局部截尾誤差為 0。例題 1 中只有計算 $w_{i,1}$ 的誤差及捨入誤差。

與解熱傳方程式的前向差分法一樣，解波動方程式的顯式有限差分法也有穩定性的問題。事實上，此方法要在 $\lambda = \alpha k / h \leq 1$ 的條件下才會穩定。(見 [IK], p. 489) 算則 12.4 的外顯法在 $\lambda \leq 1$ 時，收斂速率為 $O(h^2 + k^2)$ ，前提為 f 與 g 為充分可微。要驗證此點可參考 [IK], p. 491。

雖然未在本書介紹，但也有無條件穩定的隱式法可用。在 [Am], p. 199、[Mi] 或 [Sm, G] 中，對這類方法有所討論。

習題組 12.3 完整習題請見隨書光碟

1. 求波動方程式

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \\
& u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t \\
& u(x, 0) = \sin \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1 \\
& \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1
\end{aligned}$$

之近似解，使用有限差分算則 12.4 及 $m = 4$ 、 $N = 4$ 、和 $T = 1.0$ 。將 $t = 1.0$ 的結果與確解 $u(x, t) = \cos \pi t \sin \pi x$ 做比較。

2. 求波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{16\pi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 0.5, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = u(0.5, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 0.5$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin 4\pi x, \quad 0 \leq x \leq 0.5$$

之近似解，使用有限差分算則 12.4 及 $m = 4$ 、 $N = 4$ 、和 $T = 0.5$ 。將 $t = 0.5$ 的結果與確解 $u(x, t) = \sin t \sin 4\pi x$ 做比較。

3. 求波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

之近似解，使用有限差分算則分別配合 $h = \pi/10$ 和 $k = 0.05$ 、 $h = \pi/20$ 和 $k = 0.1$ 、以及 $h = \pi/20$ 和 $k = 0.05$ 。將 $t = 0.5$ 的結果與確解 $u(x, t) = \cos t \sin x$ 做比較。

4. 將算則 12.4 之 Step 4 所用的近似值換成

$$w_{i,1} = w_{i,0} + kg(x_i), \quad i = 1, \dots, m-1$$

重做習題 3。

5. 求波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = \sin 2\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 2\pi \sin 2\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

之近似解，使用算則 12.4 及 $h = 0.1$ 和 $k = 0.1$ 。將 $t = 0.3$ 的結果與確解 $u(x, t) = \sin 2\pi x (\cos 2\pi t + \sin 2\pi t)$ 做比較。

6. 求波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

的近似解，使用算則 12.4 及 $h=0.1$ 和 $k=0.1$ 。

7. 管風琴的風管內氣壓 $p(x, t)$ 的統御方程式可寫為

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t$$

其中 l 為管長， c 為常數。若風管為開口，邊界條件為

$$p(0, t) = p_0 \quad \text{及} \quad p(l, t) = p_0$$

如果風管在端點 $x=l$ 處為封閉，邊界條件為

$$p(0, t) = p_0 \quad \text{及} \quad \frac{\partial p}{\partial x}(l, t) = 0$$

假設 $c=1$ 、 $l=1$ ，且初始條件為

$$p(x, 0) = p_0 \cos 2\pi x \quad \text{及} \quad \frac{\partial p}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

- 用算則 12.4 配合 $h=k=0.1$ 求開口條件下在 $x=\frac{1}{2}$ 處 $t=0.5$ 及 $t=1$ 的風管壓力的近似解，給定 $p_0=0.9$ 。
 - 修改算則 12.4，以求解封閉條件下的壓力，給定 $p_0=0.9$ ， $h=k=0.1$ ，求 $p(0.5, 0.5)$ 及 $p(0.5, 1)$ 。
8. 以長度為 l 的電力傳輸線輸送高頻交流電（叫做「無耗損」線路），其電壓 V 及電流 i 之關係為

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} &= LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t \end{aligned}$$

其中 L 為每單位長度之電感， C 為每單位長度之電容。設定此線路為 200 ft 長，且常數 L 及 C 為

$$C = 0.1 \text{ farads/ft} \quad \text{及} \quad L = 0.3 \text{ henries/ft}$$

令電壓及電流同時滿足

$$\begin{aligned} V(0, t) &= V(200, t) = 0, \quad 0 < t \\ V(x, 0) &= 110 \sin \frac{\pi x}{200}, \quad 0 \leq x \leq 200 \\ \frac{\partial V}{\partial t}(x, 0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq 200 \\ i(0, t) &= i(200, t) = 0, \quad 0 < t \\ i(x, 0) &= 5.5 \cos \frac{\pi x}{200}, \quad 0 \leq x \leq 200 \end{aligned}$$

及

$$\frac{\partial i}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 200$$

用算則 12.4 及 $h=10$ 和 $k=0.1$ 求 $t=0.2$ 及 $t=0.5$ 時電壓與電流的近似值。

12.4 簡介有限元素法

有限元素法 (Finite-Element method) 與 11.5 節中所介紹的，求兩點邊界值問題近似解的 Rayleigh-Ritz 法類似。此方法原本是用於土木工程的領域，但現在已用於求應用數學範疇中各種偏微分方程的近似解。

與有限差分法相比，有限元素法的優點是，邊界條件容易處理。許多物理問題的邊界條件中，包含了導數及不規則形狀的邊界。這樣子的邊界條件，用有限差分法處理起來很困難。因為每個導數項都必須換成格點上的差分式，不規則的外形則使得格點配置變得很困難。而有限元素法則將邊界條件整合入一個求最小化的泛函中，所以它的建構程序與特定的邊界條件無關。

在本節中我們討論的偏微分方程為

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + r(x, y) u(x, y) = f(x, y) \quad (12.27)$$

其中 $(x, y) \in \mathcal{D}$ ， $\mathcal{D}$ 是一個平面區域，其邊界為 $\mathcal{S}$ 。

在一部分邊界 $\mathcal{S}_1$ 上加入

$$u(x, y) = g(x, y) \quad (12.28)$$

的邊界條件。在其餘的邊界 $\mathcal{S}_2$ 上，則方程式的解 $u(x, y)$ 必須滿足

$$p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \cos \theta_1 + q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \cos \theta_2 + g_1(x, y) u(x, y) = g_2(x, y) \quad (12.29)$$

其中 θ_1 與 θ_2 為點 (x, y) 處外向法線 (outward normal) 的方向角。(見圖 12.13)

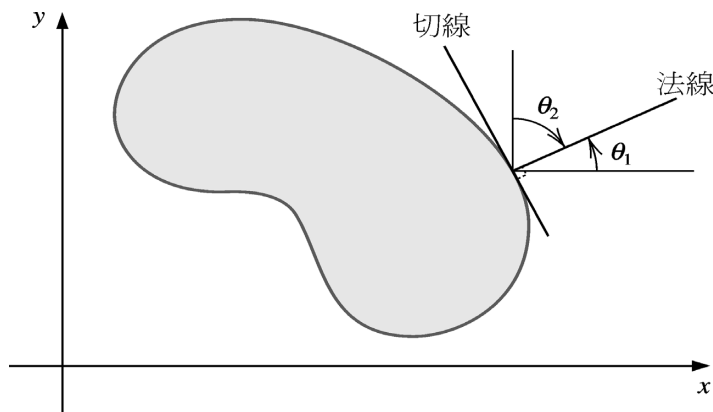


圖 12.13

在固體及彈性力學中都會出現類似 (12.27) 式的偏微分方程。這類問題典型的解法是，在一類取決於問題本身的函數中，找出某個包含積分之泛函的最小值。

設 p 、 q 、 r 及 f 在 $\mathcal{D} \cup \mathcal{S}$ 均為連續， p 及 q 的一階偏導數為連續，而 g_1 和 g_2 在 $\mathcal{S}_2$ 為

連續。再設我們同時有 $p(x, y) > 0$ 、 $q(x, y) > 0$ 、 $r(x, y) \leq 0$ 及 $g_1(x, y) > 0$ 。則 (12.27) 式的解可以唯一的使泛函

$$I[w] = \iint_D \left\{ \frac{1}{2} \left[p(x, y) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + q(x, y) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - r(x, y) w^2 \right] + f(x, y) w \right\} dx dy \\ + \int_{S_2} \left\{ -g_2(x, y) w + \frac{1}{2} g_1(x, y) w^2 \right\} dS \quad (12.30)$$

為最小，而 w 為所有二次可微且在 S_1 上滿足 (12.28) 式的函數。有限元素法在較小的函數組合中將泛函 I 最小化，以獲得問題的近似解，類似於 11.5 節中 Rayleigh-Ritz 法解邊界值問題的方式。

■ 定義元素

第一步是將要求解的區域，用規則的形狀，劃分成有限數目的區段或元素，可以是矩形或三角形。(見圖 12.14)

用來求近似解的函數集合，通常是 x 和 y 固定次數的分段多項式，且這些多項式的分段方式，必須能使所得的函數在整個區間中為可積的，或其一或二階導數為連續。對 x 和 y 為線性的多項式

$$\phi(x, y) = a + bx + cy$$

常用於三角形元素，對 x 和 y 為雙線性 (bilinear) 的多項式

$$\phi(x, y) = a + bx + cy + dxy$$

常用於矩形元素。

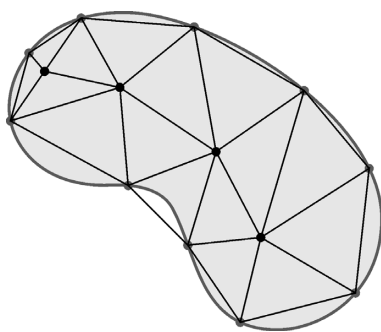


圖 12.14

假設區域 D 已用三角形元素完成劃分。所有三角形的集合記做 D ，各三角形的頂點叫做節點 (node)。此方法要找型式為

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y) \quad (12.31)$$

的近似解，其中 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$ 為線性獨立的分段線性多項式，而 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ 為常數。這些常數中的一部分，例如 $\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \dots, \gamma_m$ ，是用來滿足 S_1 上的邊界條件

$$\phi(x, y) = g(x, y)$$

而其餘的常數 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ 則用來使泛函 $I[\sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i]$ 最小化。

用 (12.31) 式的 $\phi(x, y)$ 取代 (12.30) 式中的 w 可得

$$\begin{aligned} I[\phi] &= I\left[\sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i\right] \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{1}{2} \left\{ p(x, y) \left[\sum_{i=1}^m \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x, y) \right]^2 + q(x, y) \left[\sum_{i=1}^m \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x, y) \right]^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - r(x, y) \left[\sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y) \right]^2 \right\} + f(x, y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y) \right) dy dx \\ &\quad + \int_{S_2} \left\{ -g_2(x, y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y) + \frac{1}{2} g_1(x, y) \left[\sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y) \right]^2 \right\} dS \end{aligned} \quad (12.32)$$

將 I 視為是 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ 的函數， I 要有最小值必須

$$\frac{\partial I}{\partial \gamma_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

將 (12.32) 式微分可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \gamma_j} &= \iint_{\mathcal{D}} \left\{ p(x, y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial x}(x, y) \right. \\ &\quad + q(x, y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial y}(x, y) \\ &\quad \left. - r(x, y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) + f(x, y) \phi_j(x, y) \right\} dx dy \\ &\quad + \int_{S_2} \left\{ -g_2(x, y) \phi_j(x, y) + g_1(x, y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) \right\} dS \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^m \left[\iint_{\mathcal{D}} \left\{ p(x, y) \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial x}(x, y) + q(x, y) \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial y}(x, y) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - r(x, y) \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) \right\} dx dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{S_2} g_1(x, y) \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) dS \right] \gamma_i \\ &\quad + \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \phi_j(x, y) dx dy - \int_{S_2} g_2(x, y) \phi_j(x, y) dS \end{aligned}$$

其中 $j = 1, 2, \dots, n$ 。這一組方程式可寫成線性方程組：

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b}$$

其中 $\mathbf{c} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^t$ ，且其中 $A = (\alpha_{ij})$ 及 $\mathbf{b} = (\beta_1, \dots, \beta_n)^t$ 的定義為

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} = \iint_D \left[p(x, y) \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial x}(x, y) + q(x, y) \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial y}(x, y) \right. \\ \left. - r(x, y) \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) \right] dx dy + \int_{S_2} g_1(x, y) \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) dS \end{aligned} \quad (12.33)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, n$ 及 $j = 1, 2, \dots, m$ ，且

$$\beta_i = - \iint_D f(x, y) \phi_i(x, y) dx dy + \int_{S_2} g_2(x, y) \phi_i(x, y) dS - \sum_{k=n+1}^m \alpha_{ik} \gamma_k \quad (12.34)$$

$i = 1, \dots, n$ 。

基底函數的選取是很重要的，適當的選擇可使得矩陣 A 為正定且為帶狀矩陣。對於 (12.27) 式的二階問題，我們假設 $\mathcal{D}$ 為多邊形，所以 $\mathcal{D} = D$ ， S 為連續線段的集合。

■ 劃分三角區域

我們先將區域 D 分割成三角形 $T_1, T_2, \dots, T_M$ ，其中第 i 個三角形的頂點，或稱節點，記做

$$V_j^{(i)} = (x_j^{(i)}, y_j^{(i)}) \quad , \quad j = 1, 2, 3$$

為簡化符號，當針對固定的三角形 T_i 時，我們將 $V_j^{(i)}$ 記做 $V_j = (x_j, y_j)$ 。對每一個頂點 V_j 有一個線性多項式

$$N_j^{(i)}(x, y) \equiv N_j(x, y) = a_j + b_j x + c_j y \quad , \quad \text{其中 } N_j^{(i)}(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & \text{若 } j = k \\ 0, & \text{若 } j \neq k \end{cases}$$

這樣就得到線性方程組

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

而元素 1 出現在右側向量的第 j 列 (在此 $j = 2$)。

令 $D \cup S$ 上的節點以 $E_1, \dots, E_n$ 編號。對每個節點 E_k 我們配上一個函數 ϕ_k ，此函數在每個三角形為線性，且在 E_k 的值為 1，在其他節點的值都為 0。這樣就使得，當節點 E_k 即為頂點 $V_j^{(i)}$ 時，在三角形 T_i 上 ϕ_k 等於 $N_j^{(i)}$ 。

說明題 假設有一個有限元素問題，包括三角形 T_1 及 T_2 ，如圖 12.15 所示。

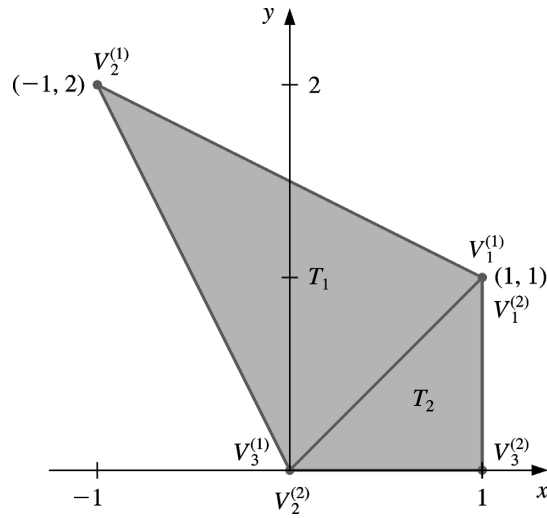


圖 12.15

線性函數 $N_1^{(1)}(x, y)$ 在 $(1, 1)$ 的值為 1，在 $(0, 0)$ 及 $(-1, 2)$ 的值均為 0，滿足

$$\begin{aligned} a_1^{(1)} + b_1^{(1)}(1) + c_1^{(1)}(1) &= 1 \\ a_1^{(1)} + b_1^{(1)}(-1) + c_1^{(1)}(2) &= 0 \end{aligned}$$

及

$$a_1^{(1)} + b_1^{(1)}(0) + c_1^{(1)}(0) = 0$$

此方程組的解為 $a_1^{(1)} = 0$ 、 $b_1^{(1)} = \frac{2}{3}$ 及 $c_1^{(1)} = \frac{1}{3}$ ，所以

$$N_1^{(1)}(x, y) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y$$

同樣的，線性函數 $N_1^{(2)}(x, y)$ 在 $(1, 1)$ 的值為 1，在 $(0, 0)$ 及 $(1, 0)$ 的值均為 0，滿足

$$\begin{aligned} a_1^{(2)} + b_1^{(2)}(1) + c_1^{(2)}(1) &= 1 \\ a_1^{(2)} + b_1^{(2)}(0) + c_1^{(2)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

及

$$a_1^{(2)} + b_1^{(2)}(1) + c_1^{(2)}(0) = 0$$

所以 $a_1^{(2)} = 0$ 、 $b_1^{(2)} = 0$ 及 $c_1^{(2)} = 1$ 。因此 $N_1^{(2)}(x, y) = y$ 。而在 T_1 及 T_2 的共同邊界上 $N_1^{(1)}(x, y) = N_1^{(2)}(x, y)$ ，因為 $y = x$ 。□

考慮圖 12.16 所示的圖形，這是圖 12.14 中圖形的左上部。我們要產生相對於圖示節點之矩陣 A 的元素。

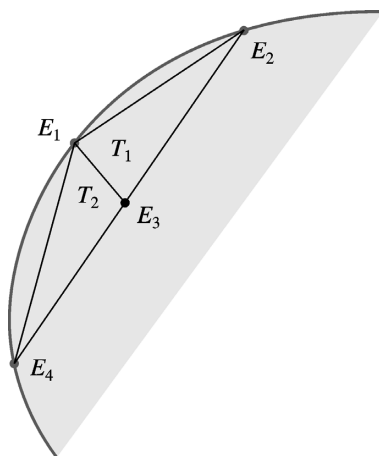


圖 12.16

為求簡化，我們假設 E_1 是 S_1 上的節點，適用 $u(x, y) = g(x, y)$ 的邊界條件。此部分的節點與三角形頂點之間的關係為

$$E_1 = V_3^{(1)} = V_1^{(2)}, \quad E_4 = V_2^{(2)}, \quad E_3 = V_2^{(1)} = V_3^{(2)}, \quad \text{及} \quad E_2 = V_1^{(1)}$$

因為 ϕ_1 及 ϕ_3 在 T_1 及 T_2 均不為零，元素 $\alpha_{1,3} = \alpha_{3,1}$ 為

$$\begin{aligned} \alpha_{1,3} &= \iint_D \left[p \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_3}{\partial x} + q \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial \phi_3}{\partial y} - r \phi_1 \phi_3 \right] dx dy \\ &= \iint_{T_1} \left[p \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_3}{\partial x} + q \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial \phi_3}{\partial y} - r \phi_1 \phi_3 \right] dx dy \\ &\quad + \iint_{T_2} \left[p \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_3}{\partial x} + q \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial \phi_3}{\partial y} - r \phi_1 \phi_3 \right] dx dy \end{aligned}$$

在三角形 T_1 上

$$\phi_1(x, y) = N_3^{(1)}(x, y) = a_3^{(1)} + b_3^{(1)}x + c_3^{(1)}y$$

且

$$\phi_3(x, y) = N_2^{(1)}(x, y) = a_2^{(1)} + b_2^{(1)}x + c_2^{(1)}y$$

所以對所有的 (x, y) ,

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = b_3^{(1)}, \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = c_3^{(1)}, \quad \frac{\partial \phi_3}{\partial x} = b_2^{(1)} \quad \text{及} \quad \frac{\partial \phi_3}{\partial y} = c_2^{(1)}$$

同樣的，在 T_2 上

$$\phi_1(x, y) = N_1^{(2)}(x, y) = a_1^{(2)} + b_1^{(2)}x + c_1^{(2)}y$$

且

$$\phi_3(x, y) = N_3^{(2)}(x, y) = a_3^{(2)} + b_3^{(2)}x + c_3^{(2)}y$$

所以對所有的 (x, y) ,

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = b_1^{(2)} \quad , \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = c_1^{(2)} \quad , \quad \frac{\partial \phi_3}{\partial x} = b_3^{(2)} \quad \text{及} \quad \frac{\partial \phi_3}{\partial y} = c_3^{(2)}$$

因此，

$$\begin{aligned} \alpha_{1,3} &= b_3^{(1)}b_2^{(1)} \iint_{T_1} p \, dx \, dy + c_3^{(1)}c_2^{(1)} \iint_{T_1} q \, dx \, dy \\ &\quad - \iint_{T_1} r(a_3^{(1)} + b_3^{(1)}x + c_3^{(1)}y)(a_2^{(1)} + b_2^{(1)}x + c_2^{(1)}y) \, dx \, dy \\ &\quad + b_1^{(2)}b_3^{(2)} \iint_{T_2} p \, dx \, dy + c_1^{(2)}c_3^{(2)} \iint_{T_2} q \, dx \, dy \\ &\quad - \iint_{T_2} r(a_1^{(2)} + b_1^{(2)}x + c_1^{(2)}y)(a_3^{(2)} + b_3^{(2)}x + c_3^{(2)}y) \, dx \, dy \end{aligned}$$

所有對 D 的雙重積分簡化為對三角形的雙重積分。通常的程序是，計算三角形上所有可能的積分值，然後將其累加至 A 中正確的元素 α_{ij} 。同樣的，雙重積分

$$\iint_D f(x, y)\phi_i(x, y) \, dx \, dy$$

也是在三角形上計算，然後累加至 $\mathbf{b}$ 中正確的元素 β_i 。例如，求 β_1 須要

$$\begin{aligned} - \iint_D f(x, y)\phi_1(x, y) \, dx \, dy &= - \iint_{T_1} f(x, y)[a_3^{(1)} + b_3^{(1)}x + c_3^{(1)}y] \, dx \, dy \\ &\quad - \iint_{T_2} f(x, y)[a_1^{(2)} + b_1^{(2)}x + c_1^{(2)}y] \, dx \, dy \end{aligned}$$

因為 E_1 同時是 T_1 及 T_2 的頂點，所以 β_1 的一部分來自 T_1 的 ϕ_1 ，另一部分則來自 T_2 的 ϕ_1 。

另外，在 $\mathcal{S}_2$ 上的節點其在 A 及 $\mathbf{b}$ 中的元素要再加一個線積分。

算則 12.5 則將有限元素法用於二階橢圓型微分方程。此算則將 A 及 $\mathbf{b}$ 的所有元素的初始值都設為 0，在獲得了所有三角形的所有積分值之後，再將其加至正確的 A 及 $\mathbf{b}$ 的元素。

算則 12.5 有限元素法

求偏微分方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + r(x, y)u = f(x, y), \quad (x, y) \in D$$

之近似解，給定邊界條件

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{S}_1$$

對 $(x, y) \in \mathcal{S}_2$ 則有

$$p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \cos \theta_1 + q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \cos \theta_2 + g_1(x, y)u(x, y) = g_2(x, y)$$

其中 $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ 為 D 之邊界，而 θ_1 及 θ_2 為邊界上法線之方向角：

Step 0 將區域 D 劃分為三角形 $T_1, \dots, T_M$ 使得：

三角形 $T_1, \dots, T_K$ 沒有任一邊在 $\mathcal{S}_1$ 或 $\mathcal{S}_2$ 上；

(註： $K = 0$ 代表 D 沒有內部三角形)

三角形 $T_{K+1}, \dots, T_N$ 至少有一邊在 $\mathcal{S}_2$ 上；

$T_{N+1}, \dots, T_M$ 為其餘的三角形。

(註： $M = N$ 代表所有三角形都有邊在 $\mathcal{S}_2$ 上)

將三角形 T_i 的三個頂點標示為

$$(x_1^{(i)}, y_1^{(i)}), (x_2^{(i)}, y_2^{(i)}) \text{ 及 } (x_3^{(i)}, y_3^{(i)})。$$

將所有節點編號為 $E_1, \dots, E_m$ ，其中 $E_1, \dots, E_n$ 在 $D \cup \mathcal{S}_2$ 之內

且 $E_{n+1}, \dots, E_m$ 在 $\mathcal{S}_1$ 上。

(註： $n = m$ 代表 $\mathcal{S}_1$ 上沒有節點)

INPUT 整數 K, N, M, n, m ；每個 $i = 1, \dots, M$ 的頂點 $(x_1^{(i)}, y_1^{(i)})$ 、

$(x_2^{(i)}, y_2^{(i)})$ 、 $(x_3^{(i)}, y_3^{(i)})$ ；每個 $j = 1, \dots, m$ 的節點 E_j 。

(註：我們所要的是一種將頂點 $(x_k^{(i)}, y_k^{(i)})$ 對應到節點 $E_j = (x_j, y_j)$ 的方法。)

OUTPUT 常數 $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ ； $a_j^{(i)}$ 、 $b_j^{(i)}$ 、 $c_j^{(i)}$ ， $j = 1, 2, 3$ 及 $i = 1, \dots, M$ 。

Step 1 For $l = n + 1, \dots, m$ set $\gamma_l = g(x_l, y_l)$. (註： $E_l = (x_l, y_l)$)

Step 2 For $i = 1, \dots, n$

set $\beta_i = 0$;

for $j = 1, \dots, n$ set $\alpha_{ij} = 0$.

Step 3 For $i = 1, \dots, M$

$$\text{set } \Delta_i = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1^{(i)} & y_1^{(i)} \\ 1 & x_2^{(i)} & y_2^{(i)} \\ 1 & x_3^{(i)} & y_3^{(i)} \end{vmatrix};$$

$$a_1^{(i)} = \frac{x_2^{(i)} y_3^{(i)} - y_2^{(i)} x_3^{(i)}}{\Delta_i}; \quad b_1^{(i)} = \frac{y_2^{(i)} - y_3^{(i)}}{\Delta_i}; \quad c_1^{(i)} = \frac{x_3^{(i)} - x_2^{(i)}}{\Delta_i};$$

$$a_2^{(i)} = \frac{x_3^{(i)} y_1^{(i)} - y_3^{(i)} x_1^{(i)}}{\Delta_i}; \quad b_2^{(i)} = \frac{y_3^{(i)} - y_1^{(i)}}{\Delta_i}; \quad c_2^{(i)} = \frac{x_1^{(i)} - x_3^{(i)}}{\Delta_i};$$

$$a_3^{(i)} = \frac{x_1^{(i)} y_2^{(i)} - y_1^{(i)} x_2^{(i)}}{\Delta_i}; \quad b_3^{(i)} = \frac{y_1^{(i)} - y_2^{(i)}}{\Delta_i}; \quad c_3^{(i)} = \frac{x_2^{(i)} - x_1^{(i)}}{\Delta_i};$$

for $j = 1, 2, 3$

$$\text{define } N_j^{(i)}(x, y) = a_j^{(i)} + b_j^{(i)}x + c_j^{(i)}y.$$

Step 4 For $i = 1, \dots, M$ (可以用數值積分求 Steps 4 及 5 中的積分值)

for $j = 1, 2, 3$

for $k = 1, \dots, j$ (計算三角形上的所有雙重積分)

$$\text{set } z_{j,k}^{(i)} = b_j^{(i)} b_k^{(i)} \iint T_i p(x, y) dx dy + c_j^{(i)} c_k^{(i)} \iint T_i q(x, y) dx dy \\ - \iint T_i r(x, y) N_j^{(i)}(x, y) N_k^{(i)}(x, y) dx dy;$$

$$\text{set } H_j^{(i)} = - \iint T_i f(x, y) N_j^{(i)}(x, y) dx dy.$$

Step 5 For $i = K + 1, \dots, N$ (計算所有線積分)

for $j = 1, 2, 3$

for $k = 1, \dots, j$

$$\text{set } J_{j,k}^{(i)} = \int_{S_2} g_1(x, y) N_j^{(i)}(x, y) N_k^{(i)}(x, y) dS;$$

$$\text{set } I_j^{(i)} = \int_{S_2} g_2(x, y) N_j^{(i)}(x, y) dS.$$

Step 6 For $i = 1, \dots, M$ do Steps 7–12. (將每個三角形上的積分組合為線性方程組)

Step 7 For $k = 1, 2, 3$ do Steps 8–12.

Step 8 Find l so that $E_l = (x_k^{(i)}, y_k^{(i)})$.

Step 9 If $k > 1$ then for $j = 1, \dots, k - 1$ do Steps 10, 11.

Step 10 Find t so that $E_t = (x_j^{(i)}, y_j^{(i)})$.

Step 11 If $l \leq n$ then

if $t \leq n$ then set $\alpha_{lt} = \alpha_{lt} + z_{k,j}^{(i)}$;

$$\alpha_{tl} = \alpha_{tl} + z_{k,j}^{(i)}$$

else set $\beta_l = \beta_l - \gamma_t z_{k,j}^{(i)}$

else

if $t \leq n$ then set $\beta_t = \beta_t - \gamma_l z_{k,j}^{(i)}$.

Step 12 If $l \leq n$ then set $\alpha_{ll} = \alpha_{ll} + z_{k,k}^{(i)}$;

$$\beta_l = \beta_l + H_k^{(i)}.$$

Step 13 For $i = K + 1, \dots, N$ do Steps 14–19. (將線積分值加入線性方程組)

Step 14 For $k = 1, 2, 3$ do Steps 15–19.

Step 15 Find l so that $E_l = (x_k^{(i)}, y_k^{(i)})$.

Step 16 If $k > 1$ then for $j = 1, \dots, k - 1$ do Steps 17, 18.

Step 17 Find t so that $E_t = (x_j^{(i)}, y_j^{(i)})$.

Step 18 If $l \leq n$ then

if $t \leq n$ then set $\alpha_{lt} = \alpha_{lt} + J_{k,j}^{(i)}$;

$$\alpha_{tl} = \alpha_{tl} + J_{k,j}^{(i)}$$

else set $\beta_l = \beta_l - \gamma_t J_{k,j}^{(i)}$

else

if $t \leq n$ then set $\beta_t = \beta_t - \gamma_l J_{k,j}^{(i)}$.

Step 19 If $l \leq n$ then set $\alpha_{ll} = \alpha_{ll} + J_{k,k}^{(i)}$;
 $\beta_l = \beta_l + I_k^{(i)}$.

Step 20 解線性方程組 $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ ，其中 $A = (\alpha_{l,t})$ 、 $\mathbf{b} = (\beta_l)$ 及 $\mathbf{c} = (\gamma_l)$ ，
 $1 \leq l \leq n$ 且 $1 \leq t \leq n$

Step 21 OUTPUT $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$.

(若 $E_k = (x_j^{(i)}, y_j^{(i)})$ ，對每個 $k = 1, \dots, m$ 令 T_i 上的 $\phi_k = N_j^{(i)}$ 。

則在 $D \cup S_1 \cup S_2$ 上 $\phi(x, y) = \sum_{k=1}^m \gamma_k \phi_k(x, y)$ 為 $u(x, y)$ 的近似值。)

Step 22 For $i = 1, \dots, M$

for $j = 1, 2, 3$ OUTPUT $(a_j^{(i)}, b_j^{(i)}, c_j^{(i)})$.

Step 23 STOP. (程序完成)

說明題 在 2D 區域 D 之內的溫度分布 $u(x, y)$ 滿足 Laplace 方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \text{ 在 } D \text{ 之內。}$$

考慮圖 12.17 所示的區域 D ，已知其邊界條件為

$$u(x, y) = 4, \quad (x, y) \in L_6 \text{ 且 } (x, y) \in L_7$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, y) = x, \quad (x, y) \in L_2 \text{ 且 } (x, y) \in L_4$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, y) = y, \quad (x, y) \in L_5$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, y) = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad (x, y) \in L_1 \text{ 且 } (x, y) \in L_3$$

其中 $\partial u / \partial \mathbf{n}$ 是在點 (x, y) 處邊界的法線方向 $\mathbf{n}$ 的方向導數。

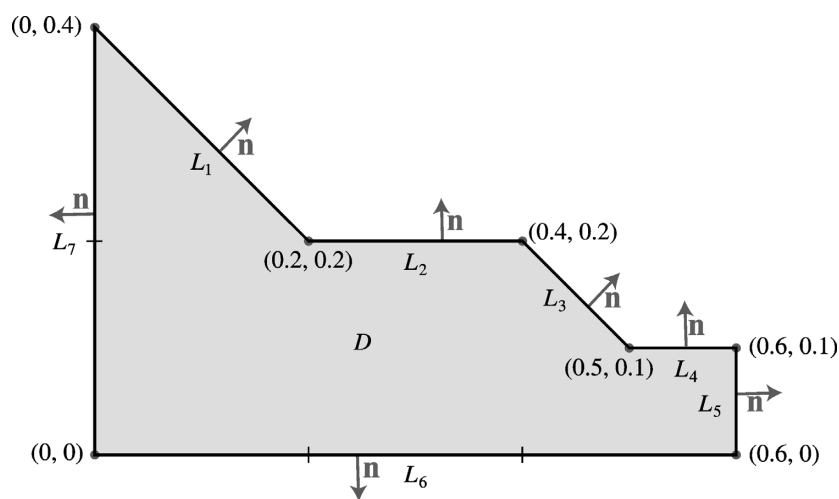


圖 12.17

我們首先依算則的 Step 0 所建議的編號原則劃分區域 D 。在此例中 $S_1 = L_6 \cup L_7$ 且 $S_2 = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5$ 。三角形之編號如圖 12.18 所示。

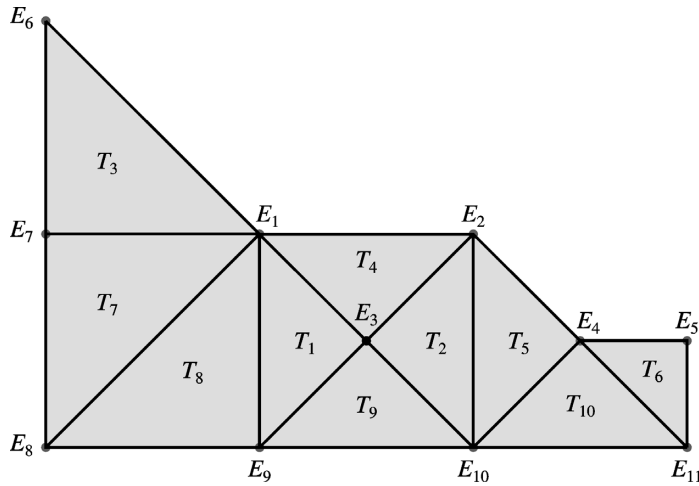


圖 12.18

由 L_6 及 L_7 的邊界條件 $u(x, y) = 4$ 可得，在 $t = 6, 7, \dots, 11$ 時，也就是在節點 $E_6, E_7, \dots, E_{11}$ ， $\gamma_t = 4$ 。要求出 $l = 1, 2, \dots, 5$ 時的 γ_l ，我們依循算則中其餘的步驟，並產生矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & -1 & -0.5 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 2.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

及向量

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6.066\bar{6} \\ 0.063\bar{3} \\ 8.0000 \\ 6.056\bar{6} \\ 2.031\bar{6} \end{bmatrix}$$

方程組 $\mathbf{Ac} = \mathbf{b}$ 的解是

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0383 \\ 4.0782 \\ 4.0291 \\ 4.0496 \\ 4.0565 \end{bmatrix}$$

由此可得在每個三角形上 Laplace 方程式的近似解及邊界條件為：

$$\begin{aligned}
T_1: \phi(x, y) &= 4.0383(1 - 5x + 5y) + 4.0291(-2 + 10x) + 4(2 - 5x - 5y) \\
T_2: \phi(x, y) &= 4.0782(-2 + 5x + 5y) + 4.0291(4 - 10x) + 4(-1 + 5x - 5y) \\
T_3: \phi(x, y) &= 4(-1 + 5y) + 4(2 - 5x - 5y) + 4.0383(5x), \\
T_4: \phi(x, y) &= 4.0383(1 - 5x + 5y) + 4.0782(-2 + 5x + 5y) + 4.0291(2 - 10y) \\
T_5: \phi(x, y) &= 4.0782(2 - 5x + 5y) + 4.0496(-4 + 10x) + 4(3 - 5x - 5y) \\
T_6: \phi(x, y) &= 4.0496(6 - 10x) + 4.0565(-6 + 10x + 10y) + 4(1 - 10y) \\
T_7: \phi(x, y) &= 4(-5x + 5y) + 4.0383(5x) + 4(1 - 5y) \\
T_8: \phi(x, y) &= 4.0383(5y) + 4(1 - 5x) + 4(5x - 5y) \\
T_9: \phi(x, y) &= 4.0291(10y) + 4(2 - 5x - 5y) + 4(-1 + 5x - 5y) \\
T_{10}: \phi(x, y) &= 4.0496(10y) + 4(3 - 5x - 5y) + 4(-2 + 5x - 5y)
\end{aligned}$$

此邊界值問題的確解為 $u(x, y) = xy + 4$ 。表 12.7 比較了在 $i = 1, \dots, 5$ 之 E_i 處的 u 及 ϕ 的值。

表 12.7

x	y	$\phi(x, y)$	$u(x, y)$	$ \phi(x, y) - u(x, y) $
0.2	0.2	4.0383	4.04	0.0017
0.4	0.2	4.0782	4.08	0.0018
0.3	0.1	4.0291	4.03	0.0009
0.5	0.1	4.0496	4.05	0.0004
0.6	0.1	4.0565	4.06	0.0035

對於像 (12.27) 式這種係數平順的二階橢圓型偏微分方程，其典型的誤差為 $O(h^2)$ ，其中 h 為三角形元素的最大直徑。對於使用雙線性基底函數的矩形元素而言，預期它的誤差也是 $O(h^2)$ ，而 h 為矩形元素的最大對角線長。使用其他的基底函數也可獲得 $O(h^4)$ 的結果，但建構的過程更複雜。我們很難說明或應用有限元素法的誤差理論，因為近似解的準確度取決於解的連續性及邊界的規則程度。

有限元素法也可用於求解拋物線型及雙曲線型偏微分方程，但最小化的過程較困難。在論文 [Fi] 中，對於有限元素法在各種物理問題的應用及優點，有很好的說明。更深入的探討可參考 [SF]、[ZM] 或 [AB]。

習題組 12.4

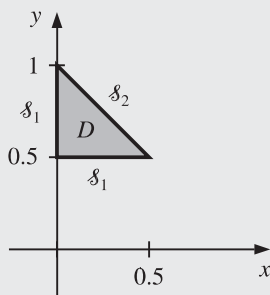
完整習題請見隨書光碟

1. 用算則 12.5 求以下偏微分方程的近似解 (參考下圖)：

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(y^2 \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right) - yu(x, y) = -x, \quad (x, y) \in D$$

$$u(x, 0.5) = 2x, \quad 0 \leq x \leq 0.5, \quad u(0, y) = 0, \quad 0.5 \leq y \leq 1$$

$$\text{在 } (x, y) \in \mathcal{S}_2 \text{ 時 } y^2 \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \cos \theta_1 + y^2 \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \cos \theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(y - x)$$



令 $M = 2$ ； T_1 的頂點為 $(0, 0.5)$ 、 $(0.25, 0.75)$ 、 $(0, 1)$ ；且 T_2 的頂點為 $(0, 0.5)$ 、 $(0.5, 0.5)$ 、 $(0.25, 0.75)$ 。

2. 使用以下三角形重做習題 1

$$T_1 : (0, 0.75), (0, 1), (0.25, 0.75)$$

$$T_2 : (0.25, 0.5), (0.25, 0.75), (0.5, 0.5)$$

$$T_3 : (0, 0.5), (0, 0.75), (0.25, 0.75)$$

$$T_4 : (0, 0.5), (0.25, 0.5), (0.25, 0.75)$$

3. 求偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) - 12.5\pi^2 u(x, y) = -25\pi^2 \sin \frac{5\pi}{2}x \sin \frac{5\pi}{2}y, \quad 0 < x, y < 0.4$$

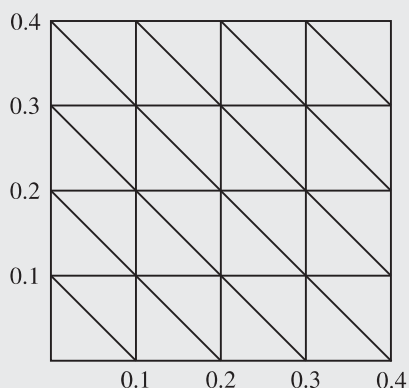
之近似解，其 Dirichlet 邊界條件為

$$u(x, y) = 0$$

使用有限元素法算則 12.5 及以下附圖所示之元素。將每個內部頂點的近似解與確解

$$u(x, y) = \sin \frac{5\pi}{2}x \sin \frac{5\pi}{2}y$$

做比較，同時比較點 $(0.125, 0.125)$ 、 $(0.125, 0.25)$ 、 $(0.25, 0.125)$ 及 $(0.25, 0.25)$ 上的值。



4. 重做習題 3，但使用 $f(x, y) = -25\pi^2 \cos \frac{5\pi}{2}x \cos \frac{5\pi}{2}y$ 以及 Neumann 邊界條件

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = 0$$

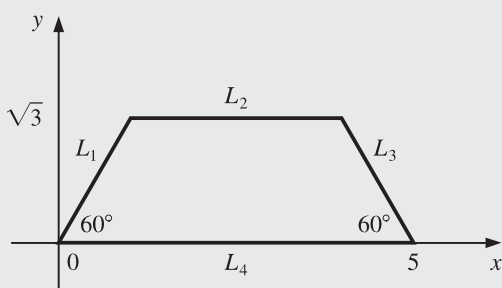
此問題之確解為

$$u(x, y) = \cos \frac{5\pi}{2}x \cos \frac{5\pi}{2}y$$

5. 一塊梯形銀板 (見附圖)，在每一點上以 $q = 1.5 \text{ cal/cm}^3 \cdot \text{s}$ 的速率均勻的產生熱。此銀板上的穩態溫度分布 $u(x, y)$ 滿足普松方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \frac{-q}{k}$$

其中熱傳導係數 k 為 $1.04 \text{ cal/cm} \cdot \text{deg} \cdot \text{s}$ 。設定在 L_2 溫度維持 15°C 不變，在斜邊 L_1 及 L_3 ，熱量依 $\partial u / \partial n = 4$ 的邊界條件散失，在 L_4 則沒有溫度散失，也就是 $\partial u / \partial n = 0$ 。用算則 12.5 求點 $(1, 0)$ 、 $(4, 0)$ 及 $(\frac{5}{2}, \sqrt{3}/2)$ 處溫度的近似值。





12.5 檢視方法與軟體

在本章中，我們介紹了求偏微分方程近似解的方法。對於橢圓型偏微分方程，我們只探討了普松方程式，在拋物線型偏微分方程中則以熱傳或擴散方程式為例，對雙曲線型偏微分方程則以波動方程式為例。分別探討了以有限差分法求這 3 個例子的近似解。

在一個矩形區域的普松方程式，須要求解一個很大的稀疏方程組，我們建議用迭代法求解這種方程組，例如 **SOR** 法。對於熱傳方程式，我們介紹了 4 種有限差分法。因為前向差分法及理察森法有穩定性的問題，所以又介紹了後向差分法及 **Crank-Nicolson** 法。雖然這類隱式法在每一次時間步進，須要解一個三對角線方程組，但它們比前向差分法及理察森法穩定。用於波動方程式的有限差分法也是顯式的，在特定的時間及空間離散方式下也會有穩定性的問題。

在本章的最後一節，我們簡單介紹了有限元素法，用以求解多邊形區域的自伴橢圓型偏微分方程。雖然此方法足可求解本書所列例題，但要做為一般商用軟體，還須要許多的一般化及修改。

在 **IMSL** 程式庫中有一個副程式可用來解偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

配合邊界條件

$$\alpha(x, t)u(x, t) + \beta(x, t)\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \gamma(x, t)$$

此副程式所用的方法是，在每個時間 t ，使用 x 軸上的高斯點的共位法，並用三次 **Hermite** 雲形線做基底函數。**IMSL** 的另一個副程式可以解矩形區域的普松方程式。

在 **NAG** 程式庫中有許多可用於解偏微分方程的副程式。有一個副程式可以解 xy 平面上任意區域的 **Laplace** 方程式，另一個副程式則用直線法 (**method of lines**) 解單一拋物線型偏微分方程。

也有專屬的軟體如 **NASTRAN**，包含了有限元素法的程式。這些軟體在工程應用上使用普遍。在 **netlib** 程式庫中的 **FISHPACK** 則可求解可分離的橢圓型偏微分方程。解偏微分方程的通用程式很難寫，因為要定義各種幾何形狀的區域。目前對偏微分方程解法的研究，仍十分活躍。

在本書中，我們只介紹了用於偏微分方程的各種解法的一小部分。對此要有更多的了解，可參考 **Lapidus** 和 **Pinder** [LP]、**Twizell** [Tw] 及 **Morton** 和 **Mayers** [MM] 最近的新書。相關軟體的資訊則可參考 **Rice** 和 **Boisvert** [RB] 及 **Bank** [Ban]。

專門討論有限差分法的書則有 **Strikwerda** [Strik]、**Thomas** [Th] 及 **Shashkov** 和

Steinberg [ShS]。關於有限元素法則可參考 Strange 和 Fix [SF] 以及 Zienkiewicz 和 Morgan [ZM]。Schiesser [Schi] 及 Gustafsson、Kreiss 和 Oliger [GKO] 討論依時性方程式的問題，而 Birkhoff 和 Lynch [BL] 及 Roache [Ro] 則討論求解橢圓型方程的問題。

多重格點法則利用疏格點的近似解，經迭代以獲得細格點的近似解。關於此方法可參考 Briggs [Brigg]、Mc Cormick [Mc] 及 Bramble [Bram]。