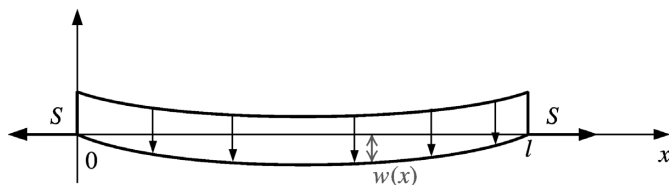


# 常微分方程之 邊界值問題

## 引言

在土木工程中有一個很常見的問題，是關於矩形截面積的梁承受均勻荷重時變形量的問題，而梁的 2 端固定，所以沒有變形量。



設  $l$ 、 $q$ 、 $E$ 、 $S$  及  $I$  分別代表梁的長度、均勻荷重的強度、彈性模數、端點的應力、以及中央慣性矩 (central moment of inertia)。用於描述此一問題的微分方程為

$$\frac{d^2 w}{dx^2}(x) = \frac{S}{EI} w(x) + \frac{qx}{2EI}(x-l)$$

其中  $w(x)$  為由梁的左端起  $x$  距離處的變形量，因為在梁的端點處沒有變形量，所以邊界條件為

$$w(0) = 0 \text{ 且 } w(l) = 0$$

若此梁的厚度均一，則  $EI$  乘積為常數，很容易求得以上方程式的確解。當厚度不是均一的，則慣性矩  $I$  是  $x$  的函數，此問題必須以近似法求解。在 11.3 節的習題 7 以及 11.4 節的習題 6 就考慮了這樣的問題。

在第 5 章中所考慮的是一階微分方程，只有一個初始條件要滿足。在該章中我們也看到了，同樣的方法可推廣到方程組以及高階微分方程，但所有給定的條件都在同一個端點。那些是屬於初值問題 (initial-value problem)。在本章中，我們將說明如何求邊界值問題 (boundary-value problem) 的近似解，也就是在 2 個端點都有外加條件的微分方程。對於一階微分方程，

因為只能指定一個條件，所以無所謂初值問題或邊界值問題的區別。我們將考慮有 2 個邊界值的二階微分方程。

如果一個實際的物理問題，它是與位置相關而非與時間相關，那麼用來描述此問題的微分方程，通常會在一個以上的點有外加條件。在本章中所要討論的 2 點邊界值問題，其所包括的二階微分方程的型式為

$$y'' = f(x, y, y') \quad , \quad a \leq x \leq b \quad (11.1)$$

再加上邊界條件

$$y(a) = \alpha \quad \text{及} \quad y(b) = \beta \quad (11.2)$$

## 11.1 線性射擊法

下面定理給出了，確保二階邊界值問題的解存在且唯一的通用條件。此定理的證明可參見 [Keller, H]。

### 定理 11.1

設邊界值問題

$$y'' = f(x, y, y') \quad , \quad a \leq x \leq b \quad , \quad y(a) = \alpha \quad , \quad y(b) = \beta$$

中的函數  $f$  在集合

$$D = \{ (x, y, y') \mid a \leq x \leq b \quad , \quad \text{給定} \quad -\infty < y < \infty \quad \text{及} \quad -\infty < y' < \infty \}$$

中為連續，且偏導數  $f_y$  及  $f_{y'}$  同樣在  $D$  上為連續。若

- (i) 對所有  $(x, y, y') \in D$  都有  $f_y(x, y, y') > 0$ ，且
- (ii) 存在常數  $M$ ，對所有  $(x, y, y') \in D$ ，可使得

$$|f_{y'}(x, y, y')| \leq M$$

則此邊界值問題有唯一解。

#### 例題 1 用定理 11.1 證明邊界值問題

$$y'' + e^{-xy} + \sin y' = 0 \quad , \quad 1 \leq x \leq 2 \quad , \quad y(1) = y(2) = 0$$

有唯一解。

**解** 我們有

$$f(x, y, y') = -e^{-xy} - \sin y'$$

且對所有屬於  $[1, 2]$  的  $x$ ，

$$f_y(x, y, y') = xe^{-xy} > 0 \text{ 及 } |f_{y'}(x, y, y')| = |-\cos y'| \leq 1$$

故此問題有唯一解。

## ■ 線性邊界值問題

當存在有線性函數  $p(x)$ 、 $q(x)$ 、 $r(x)$  可使得

$$f(x, y, y') = p(x)y' + q(x)y + r(x)$$

則微分方程

$$y'' = f(x, y, y')$$

為線性。這種問題經常出現，對這種問題，定理 11.1 可以再簡化。

### 推論 11.2 如果線性邊界值問題

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x) \quad , \quad a \leq x \leq b \quad , \quad y(a) = \alpha \quad , \quad y(b) = \beta$$

滿足

- (i)  $p(x)$ 、 $q(x)$  及  $r(x)$  在  $[a, b]$  上為連續，
- (ii) 在  $[a, b]$  上  $q(x) > 0$ ，

則此問題有唯一解。

要求此線性問題唯一解的近似解，我們先考慮初值問題

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x) \quad , \quad a \leq x \leq b \quad , \quad y(a) = \alpha \quad , \quad y'(a) = 0 \quad (11.3)$$

及

$$y'' = p(x)y' + q(x)y \quad , \quad a \leq x \leq b \quad , \quad y(a) = 0 \quad , \quad y'(a) = 1 \quad (11.4)$$

第 5.9 節的定理 5.17(見 314 頁)確保了，在滿足推論 11.2 的假設條件時，2 個問題都有唯一解。

令  $y_1(x)$  代表 (11.3) 式的解， $y_2(x)$  代表 (11.4) 式的解。假設  $y_2(b) \neq 0$ 。(在習題 8 中會證明， $y_2(b) = 0$  與推論 11.2 之前提相矛盾。) 定義

$$y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x) \quad (11.5)$$

則  $y(x)$  是線性邊界值問題 (11.3) 式的解。要了解此點，我們首先看到

$$y'(x) = y_1'(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2'(x)$$

及

$$y''(x) = y_1''(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2''(x)$$

在方程式中代入  $y_1''(x)$  與  $y_2''(x)$  可得

$$\begin{aligned} y'' &= p(x)y_1' + q(x)y_1 + r(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} (p(x)y_2' + q(x)y_2) \\ &= p(x) \left( y_1' + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2' \right) + q(x) \left( y_1 + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2 \right) + r(x) \\ &= p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x) \end{aligned}$$

此外，

$$y(a) = y_1(a) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(a) = \alpha + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} \cdot 0 = \alpha$$

且

$$y(b) = y_1(b) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(b) = y_1(b) + \beta - y_1(b) = \beta$$

## ■ 線性射擊法

用於線性方程的射擊法，就是將線性邊界值問題換成兩個初值問題 (11.3) 及 (11.4) 式。在第 5 章，我們介紹了許多的方法可以求  $y_1(x)$  及  $y_2(x)$  的近似解，求得這兩個近似解之後，用 (11.5) 式即可求得原邊界值問題的解。此方法可用圖形表示如圖 11.1。

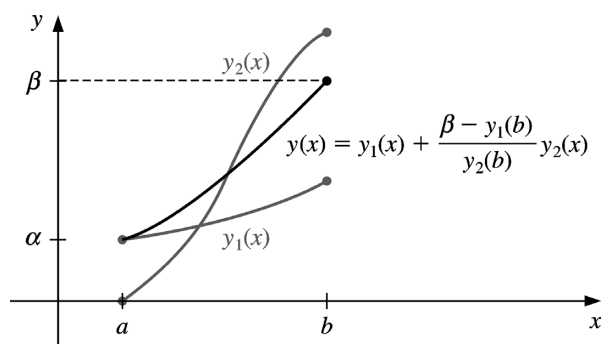


圖 11.1

算則 11.1 使用四階 Runge-Kutta 法求  $y_1(x)$  及  $y_2(x)$  的近似解，但是 Step 4 也可換成別種求解初值問題的方法。

此算則有一個額外的功能，它在求出邊界值問題近似解的同時，也求出解的導數。並非一定要滿足推論 11.2 之假設條件的問題才能用此算則求解，許多不滿足這些條件的問題同樣可求得答案。習題 4 即為一例。

### 算則 11.1 線性射擊法 (Linear Shooting)

求邊界值問題

$$-y'' + p(x)y' + q(x)y + r(x) = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

之近似解：

(註：(11.3) 及 (11.4) 式化成一階方程組型式求解。)

INPUT 端點  $a$ 、 $b$ ；邊界條件  $\alpha$ 、 $\beta$ ；次區間數  $N$ 。

OUTPUT  $y(x_i)$  的近似值  $w_{1,i}$ ； $y'(x_i)$  的近似值  $w_{2,i}$ ， $i = 0, 1, \dots, N$ 。

Step 1 Set  $h = (b - a)/N$ ;

$$u_{1,0} = \alpha;$$

$$u_{2,0} = 0;$$

$$v_{1,0} = 0;$$

$$v_{2,0} = 1.$$

Step 2 For  $i = 0, \dots, N - 1$  do Steps 3 and 4.

(在 Step 3 及 4 中用 Runge-Kutta 法解方程組)

Step 3 Set  $x = a + ih$ .

Step 4 Set  $k_{1,1} = hu_{2,i}$ ;

$$k_{1,2} = h[p(x)u_{2,i} + q(x)u_{1,i} + r(x)];$$

$$k_{2,1} = h[u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{1,2}];$$

$$k_{2,2} = h[p(x + h/2)(u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{1,2}) + q(x + h/2)(u_{1,i} + \frac{1}{2}k_{1,1}) + r(x + h/2)];$$

$$k_{3,1} = h[u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{2,2}];$$

$$k_{3,2} = h[p(x + h/2)(u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{2,2}) + q(x + h/2)(u_{1,i} + \frac{1}{2}k_{2,1}) + r(x + h/2)];$$

$$k_{4,1} = h[u_{2,i} + k_{3,2}];$$

$$k_{4,2} = h[p(x + h)(u_{2,i} + k_{3,2}) + q(x + h)(u_{1,i} + k_{3,1}) + r(x + h)];$$

$$u_{1,i+1} = u_{1,i} + \frac{1}{6}[k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}];$$

$$u_{2,i+1} = u_{2,i} + \frac{1}{6}[k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}];$$

$$k'_{1,1} = hv_{2,i};$$

$$k'_{1,2} = h[p(x)v_{2,i} + q(x)v_{1,i}];$$

$$k'_{2,1} = h[v_{2,i} + \frac{1}{2}k'_{1,2}];$$

$$k'_{2,2} = h[p(x + h/2)(v_{2,i} + \frac{1}{2}k'_{1,2}) + q(x + h/2)(v_{1,i} + \frac{1}{2}k'_{1,1})];$$

$$k'_{3,1} = h[v_{2,i} + \frac{1}{2}k'_{2,2}];$$

$$k'_{3,2} = h[p(x + h/2)(v_{2,i} + \frac{1}{2}k'_{2,2}) + q(x + h/2)(v_{1,i} + \frac{1}{2}k'_{2,1})];$$

$$k'_{4,1} = h[v_{2,i} + k'_{3,2}];$$

$$k'_{4,2} = h[p(x + h)(v_{2,i} + k'_{3,2}) + q(x + h)(v_{1,i} + k'_{3,1})];$$

$$v_{1,i+1} = v_{1,i} + \frac{1}{6}[k'_{1,1} + 2k'_{2,1} + 2k'_{3,1} + k'_{4,1}];$$

$$v_{2,i+1} = v_{2,i} + \frac{1}{6}[k'_{1,2} + 2k'_{2,2} + 2k'_{3,2} + k'_{4,2}].$$

**Step 5** Set  $w_{1,0} = \alpha$ ;  
 $w_{2,0} = \frac{\beta - u_{1,N}}{v_{1,N}};$   
 OUTPUT  $(a, w_{1,0}, w_{2,0}).$

**Step 6** For  $i = 1, \dots, N$   
 set  $W1 = u_{1,i} + w_{2,0}v_{1,i};$   
 $W2 = u_{2,i} + w_{2,0}v_{2,i};$   
 $x = a + ih;$   
 OUTPUT  $(x, W1, W2).$  (輸出為  $x_i, w_{1,i}, w_{2,i}$ )

**Step 7** STOP. (程序完成) ■

**例題 2** 將線性射擊法及  $N = 10$ ，用於邊界值問題

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 2$$

並將結果與確解

$$y = c_1x + \frac{c_2}{x^2} - \frac{3}{10}\sin(\ln x) - \frac{1}{10}\cos(\ln x)$$

做比較，其中

$$c_2 = \frac{1}{70}[8 - 12\sin(\ln 2) - 4\cos(\ln 2)] \approx -0.03920701320$$

及

$$c_1 = \frac{11}{10} - c_2 \approx 1.1392070132$$

**解** 將算則 11.1 用於此問題，我們須要求解的初值問題為

$$y_1'' = -\frac{2}{x}y_1' + \frac{2}{x^2}y_1 + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y_1(1) = 1, \quad y_1'(1) = 0$$

及

$$y_2'' = -\frac{2}{x}y_2' + \frac{2}{x^2}y_2, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y_2(1) = 0, \quad y_2'(1) = 1$$

在算則 11.1 中使用  $N = 10$  及  $h = 0.1$ ，計算的結果如表 11.1 所示。表列的  $u_{1,i}$  為  $y_1(x_i)$  的近似值， $v_{1,i}$  為  $y_2(x_i)$  的近似值，而  $w_i$  則為

$$y(x_i) = y_1(x_i) + \frac{2 - y_1(2)}{y_2(2)}y_2(x_i)$$

的近似值。 ■

表 11.1

| $x_i$ | $u_{1,i} \approx y_1(x_i)$ | $v_{1,i} \approx y_2(x_i)$ | $w_i \approx y(x_i)$ | $y(x_i)$   | $ y(x_i) - w_i $       |
|-------|----------------------------|----------------------------|----------------------|------------|------------------------|
| 1.0   | 1.00000000                 | 0.00000000                 | 1.00000000           | 1.00000000 |                        |
| 1.1   | 1.00896058                 | 0.09117986                 | 1.09262917           | 1.09262930 | $1.43 \times 10^{-7}$  |
| 1.2   | 1.03245472                 | 0.16851175                 | 1.18708471           | 1.18708484 | $1.34 \times 10^{-7}$  |
| 1.3   | 1.06674375                 | 0.23608704                 | 1.28338227           | 1.28338236 | $9.78 \times 10^{-8}$  |
| 1.4   | 1.10928795                 | 0.29659067                 | 1.38144589           | 1.38144595 | $6.02 \times 10^{-8}$  |
| 1.5   | 1.15830000                 | 0.35184379                 | 1.48115939           | 1.48115942 | $3.06 \times 10^{-8}$  |
| 1.6   | 1.21248372                 | 0.40311695                 | 1.58239245           | 1.58239246 | $1.08 \times 10^{-8}$  |
| 1.7   | 1.27087454                 | 0.45131840                 | 1.68501396           | 1.68501396 | $5.43 \times 10^{-10}$ |
| 1.8   | 1.33273851                 | 0.49711137                 | 1.78889854           | 1.78889853 | $5.05 \times 10^{-9}$  |
| 1.9   | 1.39750618                 | 0.54098928                 | 1.89392951           | 1.89392951 | $4.41 \times 10^{-9}$  |
| 2.0   | 1.46472815                 | 0.58332538                 | 2.00000000           | 2.00000000 |                        |

在本例中，因為用了  $O(h^4)$  的四階 Runge-Kutta 法求初值問題的近似解，所以結果非常準確。但很不幸的，此方法的背後隱藏著捨入誤差的問題。

### ■ 減少捨入誤差

如果隨著  $x$  由  $a$  到  $b$ ， $y_1(x)$  會快速增加，則會出現捨入誤差的問題。在此情形下  $u_{1,N} \approx y_1(b)$  將會很大，且若  $\beta$  的絕對值比  $u_{1,N}$  小很多，則  $w_{2,0} = (\beta - u_{1,N})/v_{1,N}$  會近似於  $-u_{1,N}/v_{1,N}$ 。在 Step 6 的計算就成了

$$W1 = u_{1,i} + w_{2,0}v_{1,i} \approx u_{1,i} - \left(\frac{u_{1,N}}{v_{1,N}}\right)v_{1,i}$$

$$W2 = u_{2,i} + w_{2,0}v_{2,i} \approx u_{2,i} - \left(\frac{u_{1,N}}{v_{1,N}}\right)v_{2,i}$$

這有可能會減少有效位數。不過，因為  $u_{1,i}$  是  $y_1(x_i)$  的近似值，我們很容易監控  $y_1$  的行為，如果  $u_{1,i}$  由  $a$  到  $b$  快速增大，射擊法可以倒轉使用，由  $x_0 = b$  到  $x_N = a$ 。也就是求解以下初值問題：

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x) \quad , \quad a \leq x \leq b \quad , \quad y(b) = \alpha \quad , \quad y(b) = \alpha \quad , \quad y'(b) = 0$$

及

$$y'' = p(x)y' + q(x)y \quad , \quad a \leq x \leq b \quad , \quad y(b) = 0 \quad , \quad y'(b) = 1$$

如果反向射擊法仍然出現有效位數抵消的問題，或無法提高準確度，那就應該考慮別的方法，本章以後各節會介紹其中一些方法。通常，如果  $u_{1,i}$  及  $v_{1,i}$  是  $y_1(x_i)$  與  $y_2(x_i)$  的  $O(h^n)$

的近似值， $i=0, 1, \dots, N$ ，則  $w_{1,i}$  將同樣是  $y(x_i)$  的  $O(h^n)$  的近似值。特別有

$$|w_{1,i} - y(x_i)| \leq Kh^n \left| 1 + \frac{v_{1,i}}{v_{1,N}} \right|$$

$K$  為某常數 (見 [IK], p.426)。

## 習題組 11.1 完整習題請見隨書光碟

### 1. 邊界值問題

$$y'' = 4(y - x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2$$

之確解為  $y(x) = e^2(e^4 - 1)^{-1}(e^{2x} - e^{-2x}) + x$ 。用線性射擊法求其近似解，並與確解做比較。

a. 使用  $h = \frac{1}{2}$ ；

b. 使用  $h = \frac{1}{4}$ 。

### 2. 邊界值問題

$$y'' = y' + 2y + \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad y(0) = -0.3, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0.1$$

之確解為  $y(x) = -\frac{1}{10}(\sin x + 3 \cos x)$ 。用線性射擊法求其近似解，並與確解做比較。

a. 使用  $h = \frac{\pi}{4}$ ；

b. 使用  $h = \frac{\pi}{8}$ 。

### 3. 用線性射擊法求下列各邊界值問題之近似解。

a.  $y'' = -3y' + 2y + 2x + 3, 0 \leq x \leq 1, y(0) = 2, y(1) = 1$ ；使用  $h = 0.1$ 。

b.  $y'' = -4x^{-1}y' - 2x^{-2}y + 2x^{-2} \ln x, 1 \leq x \leq 2, y(1) = -\frac{1}{2}, y(2) = \ln 2$ ；使用  $h = 0.05$ 。

c.  $y'' = -(x+1)y' + 2y + (1-x^2)e^{-x}, 0 \leq x \leq 1, y(0) = -1, y(1) = 0$ ；使用  $h = 0.1$ 。

d.  $y'' = x - 1y' + 3x^{-2}y + x^{-1} \ln x - 1, 1 \leq x \leq 2, y(1) = y(2) = 0$ ；使用  $h = 0.1$ 。

### 4. 雖然在下列邊界值問題中 $q(x) < 0$ ，但都有唯一解，已列於各小題中。用線性射擊算則求下列問題的近似解，並與確解做比較。

a.  $y'' + y = 0, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, y(0) = 1, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ ；使用  $h = \frac{\pi}{20}$ ；確解  $y(x) = \cos x + (\sqrt{2} - 1) \sin x$ 。

b.  $y'' + 4y = \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ ；使用  $h = \frac{\pi}{20}$ ；確解  $y(x) = -\frac{1}{3} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{6} \sin 2x + \frac{1}{3} \cos x$ 。

c.  $y'' = -4x^{-1}y' - 2x^{-2}y + 2x^{-2} \ln x, 1 \leq x \leq 2, y(1) = \frac{1}{2}, y(2) = \ln 2$ ；使用  $h = 0.05$ ；確解  $y(x) = 4x^{-1} - 2x^{-2} + \ln x - 3/2$ 。

d.  $y'' = 2y' - y + xe^x - x, 0 \leq x \leq 2, y(0) = 0, y(2) = -4$ ；使用  $h = 0.2$ ；確解  $y(x) = \frac{1}{6}x^3e^x - \frac{5}{3}xe^x + 2e^x - x - 2$ 。

### 5. 用線性射擊算則求邊界值問題

$$y'' = 100y, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e^{-10}.$$

之近似解，已知其確解為  $y = e^{-10x}$ 。分別使用  $h = 0.1$  及  $0.05$ 。

### 6. 寫出二階初值問題 (11.3) 及 (11.4) 式所對應之一階方程組，然後推導出用四階 Runge-Kutta 法

解此方程組所須用到的方程式。

7. 令  $u$  代表 2 個同心金屬球之間的靜電位，球之半徑為  $R_1$  及  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ )。內球之電位維持在  $V_1$  volts，外層的電位為 0 volts。兩球體之間的電位符合 Laplace 方程式，在本題中簡化為

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} = 0, \quad R_1 \leq r \leq R_2, \quad u(R_1) = V_1, \quad u(R_2) = 0$$

設  $R_1 = 2$ 、 $R_2 = 4$  in、且  $V_1 = 110$  volts。

- a. 用線性射擊算則求  $u(3)$  的近似值。  
b. 將 (a) 的結果與實際的  $u(3)$  的電位相比較，其中

$$u(r) = \frac{V_1 R_1}{r} \left( \frac{R_2 - r}{R_2 - R_1} \right)$$

8. 證明，在推論 11.2 的前提之下，若  $y_2$  是  $y'' = p(x)y' + q(x)y$  的解，且  $y_2(a) = y_2(b) = 0$ ，則  $y_2 \equiv 0$ 。  
9. 考慮邊界值問題

$$y'' + y = 0, \quad 0 \leq x \leq b, \quad y(0) = 0, \quad y(b) = B$$

求  $b$  及  $B$  以使得邊界值問題為

- a. 無解                      b. 恰有一解                      c. 無限多解

10. 試著將習題 9 用於邊界值問題

$$y'' - y = 0, \quad 0 \leq x \leq b, \quad y(0) = 0, \quad y(b) = B$$

情況如何？此兩問題與推論 11.2 的關聯為何？



## 11.2 非線性問題射擊法

用於非線性二階邊界值問題

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \quad (11.6)$$

的射擊法與線性的情況類似，只是非線性問題的解無法表示成 2 個初值問題解的線性組合。所以我們用一序列以  $t$  為參數之初值問題的解來近似邊界值問題。這些問題的型式為

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = t \quad (11.7)$$

我們選擇參數  $t = t_k$  的方式是要確保

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(b, t_k) = y(b) = \beta$$

其中  $y(x, t_k)$  代表  $t = t_k$  時，初值問題 (11.7) 式的解，且  $y(x)$  代表邊界值問題 (11.6) 式的解。

此方法之所以叫做「射擊」法，是因為它的過程可類比於射擊一個固定目標。(見圖 11.2) 我們由參數  $t_0$  開始，以此做為仰角，由點  $(a, \alpha)$  射擊，初值問題

$$y'' = f(x, y, y') \quad , \quad a \leq x \leq b \quad , \quad y(a) = \alpha \quad , \quad y'(a) = t_0$$

的解即為射擊路徑。

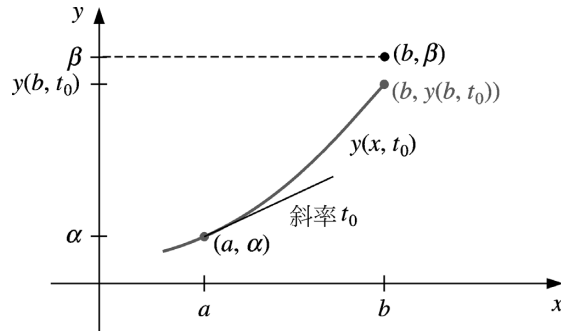


圖 11.2

如果  $y(b, t_0)$  不夠接近  $\beta$ ，我們調整仰角  $t_1$ 、 $t_2$  等等，直到  $y(b, t_k)$  近到「擊中」 $\beta$  為止。(見圖 11.3)

要決定參數  $t_k$ ，我們設 (11.6) 式的邊界值問題滿足定理 11.1 的假設條件。如果  $y(x, t)$  代表 (11.7) 式初值問題的解，我們接著用

$$y(b, t) - \beta = 0 \quad (11.8)$$

來決定  $t$ 。

這是一個變數  $t$  的非線性方程式，我們在第 2 章中已討論過，有許多現成的方法可用來求解。

要使用正割法解此問題，我們須要 2 個初始近似值  $t_0$  及  $t_1$ ，然後用

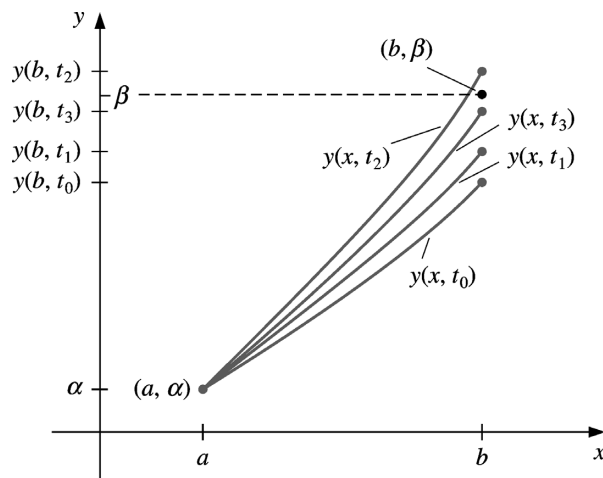


圖 11.3

$$t_k = t_{k-1} - \frac{(y(b, t_{k-1}) - \beta)(t_{k-1} - t_{k-2})}{y(b, t_{k-1}) - y(b, t_{k-2})}, \quad k = 2, 3, \dots$$

以產生後續各項。

## ■ 牛頓迭代

如果用更有效率的牛頓法以產生數列  $\{t_k\}$ ，只須要一個初始近似值  $t_0$ 。但其迭代方式為

$$t_k = t_{k-1} - \frac{y(b, t_{k-1}) - \beta}{\frac{dy}{dt}(b, t_{k-1})} \quad (11.9)$$

此時我們必須要知道  $(dy/dt)(b, t_{k-1})$ 。這就出現困難了，因為我們不知道  $y(b, t)$  函數的外顯型式，我們只知道  $y(b, t_0)$ 、 $y(b, t_1)$ 、 $\dots$ 、 $y(b, t_{k-1})$  的值。

假設我們改寫初值問題 (11.7) 式，強調其解同時取決於  $x$  及  $t$ ：

$$y''(x, t) = f(x, y(x, t), y'(x, t)) \quad , \quad a \leq x \leq b \quad , \quad y(a, t) = \alpha \quad , \quad y'(a, t) = t \quad (11.10)$$

我們保留了上撇的符號，代表對  $x$  的微分。因為我們須要在  $t = t_{k-1}$  時決定  $(dy/dt)(b, t)$ ，我們先將 (11.10) 式對  $t$  偏微。由此可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial y''}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(x, y(x, t), y'(x, t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{\partial y'}{\partial t}(x, t) \end{aligned}$$

因為  $x$  與  $t$  為獨立，故  $\partial x / \partial t = 0$  且方程式簡化為

$$\frac{\partial y''}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{\partial y'}{\partial t}(x, t) \quad (11.11)$$

對  $a \leq x \leq b$ 。由初始條件得

$$\frac{\partial y}{\partial t}(a, t) = 0 \quad \text{及} \quad \frac{\partial y'}{\partial t}(a, t) = 1$$

如果我們用  $z(x, t)$  代替  $(\partial y / \partial t)(x, t)$ ，並假設對  $x$  及  $t$  微分的順序可互換，(11.11) 式及初始條件，就成為初值問題

$$z''(x, t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')z(x, t) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')z'(x, t) \quad , \quad a \leq x \leq b \quad (11.12)$$

並有  $z(a, t) = 0$  及  $z'(a, t) = 1$ 。

因此牛頓法每次迭代要解 2 個初值問題，(11.10) 及 (11.12) 式。然後由 (11.9) 式可得

$$t_k = t_{k-1} - \frac{y(b, t_{k-1}) - \beta}{z(b, t_{k-1})} \quad (11.13)$$

當然，我們沒法求得這些初值問題的確解，要用第 5 章介紹的方法求它們的近似解。算則 11.2 使用四階 Runge-Kutta 法求這兩個初值問題的近似解。習題 5 則是一個使用正割法的類似程序。

**算則 11.2** 使用牛頓法的非線性射擊 (Nonlinear Shooting with Newton's Method)

求非線性邊界值問題

$$y'' = f(x, y, y') \quad , \quad a \leq x \leq b \quad , \quad y(a) = \alpha \quad , \quad y(b) = \beta$$

之近似解：

(註：(11.10) 及 (11.12) 式改寫為一階方程組求解)

**INPUT** 端點  $a, b$ ；邊界條件  $\alpha, \beta$ ；次區間數  $N \geq 2$ ；容許誤差  $TOL$ ；最大迭代次數  $M$ 。

**OUTPUT**  $y(x_i)$  的近似值  $w_{1,i}$ ； $y'(x_i)$  的近似值  $w_{2,i}$ ， $i = 0, 1, \dots, N$ ，或超過最大迭代次數的訊息。

**Step 1** Set  $h = (b - a)/N$ ;

$k = 1$ ;

$TK = (\beta - \alpha)/(b - a)$ . (註：TK 也可直接輸入)

**Step 2** While  $(k \leq M)$  do Steps 3–10.

**Step 3** Set  $w_{1,0} = \alpha$ ;

$w_{2,0} = TK$ ;

$u_1 = 0$ ;

$u_2 = 1$ .

**Step 4** For  $i = 1, \dots, N$  do Steps 5 and 6.

(Steps 5 及 6 用 Runge-Kutta 法解方程組)

**Step 5** Set  $x = a + (i - 1)h$ .

**Step 6** Set  $k_{1,1} = hw_{2,i-1}$ ;

$k_{1,2} = hf(x, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})$ ;

$k_{2,1} = h(w_{2,i-1} + \frac{1}{2}k_{1,2})$ ;

$k_{2,2} = hf(x + h/2, w_{1,i-1} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,i-1} + \frac{1}{2}k_{1,2})$ ;

$k_{3,1} = h(w_{2,i-1} + \frac{1}{2}k_{2,2})$ ;

$k_{3,2} = hf(x + h/2, w_{1,i-1} + \frac{1}{2}k_{2,1}, w_{2,i-1} + \frac{1}{2}k_{2,2})$ ;

$k_{4,1} = h(w_{2,i-1} + k_{3,2})$ ;

$k_{4,2} = hf(x + h, w_{1,i-1} + k_{3,1}, w_{2,i-1} + k_{3,2})$ ;

$w_{1,i} = w_{1,i-1} + (k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1})/6$ ;

$w_{2,i} = w_{2,i-1} + (k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2})/6$ ;

$k'_{1,1} = hu_2$ ;

$k'_{1,2} = h[f_y(x, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})u_1$   
 $+ f_{y'}(x, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})u_2]$ ;

$$\begin{aligned}
k'_{2,1} &= h[u_2 + \frac{1}{2}k'_{1,2}]; \\
k'_{2,2} &= h[f_y(x + h/2, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_1 + \frac{1}{2}k'_{1,1}) \\
&\quad + f_{y'}(x + h/2, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_2 + \frac{1}{2}k'_{1,2})]; \\
k'_{3,1} &= h(u_2 + \frac{1}{2}k'_{2,2}); \\
k'_{3,2} &= h[f_y(x + h/2, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_1 + \frac{1}{2}k'_{2,1}) \\
&\quad + f_{y'}(x + h/2, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_2 + \frac{1}{2}k'_{2,2})]; \\
k'_{4,1} &= h(u_2 + k'_{3,2}); \\
k'_{4,2} &= h[f_y(x + h, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_1 + k'_{3,1}) \\
&\quad + f_{y'}(x + h, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_2 + k'_{3,2})]; \\
u_1 &= u_1 + \frac{1}{6}[k'_{1,1} + 2k'_{2,1} + 2k'_{3,1} + k'_{4,1}]; \\
u_2 &= u_2 + \frac{1}{6}[k'_{1,2} + 2k'_{2,2} + 2k'_{3,2} + k'_{4,2}].
\end{aligned}$$

**Step 7** If  $|w_{1,N} - \beta| \leq TOL$  then do Steps 8 and 9.

**Step 8** For  $i = 0, 1, \dots, N$   
 set  $x = a + ih$ ;  
 OUTPUT  $(x, w_{1,i}, w_{2,i})$ .

**Step 9** (程序完成)  
 STOP.

**Step 10** Set  $TK = TK - \frac{w_{1,N} - \beta}{u_1}$ ;  
 (用牛頓法求  $TK$ )  
 $k = k + 1$ .

**Step 11** OUTPUT ('Maximum number of iterations exceeded');  
 (程式失敗)  
 STOP. ■

在 Step 1 中所選的  $t_0 = TK$  是通過  $(a, \alpha)$  及  $(b, \beta)$  兩點直線的斜率。如果問題滿足定理 11.1 的假設條件，則任何的  $t_0$  都會收斂，但  $t_0$  選得好則會收斂的較快，對許多不滿足定理 11.1 假設條件的問題，此程序同樣會收斂。習題 3(d) 即為一例。

**例題 1** 以使用牛頓法的非線性射擊求解邊界值問題

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy') \quad , \quad 1 \leq x \leq 3 \quad , \quad y(1) = 17 \quad , \quad y(3) = \frac{43}{3}$$

使用  $N = 20$ 、 $M = 10$  及  $TOL = 10^{-5}$ ，並將結果與其確解  $y(x) = x^2 + 16/x$  做比較。

**解** 在每一步迭代，我們須要求初值問題

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy') \quad , \quad 1 \leq x \leq 3 \quad , \quad y(1) = 17 \quad , \quad y'(1) = t_k$$

及

$$z'' = \frac{\partial f}{\partial y}z + \frac{\partial f}{\partial y'}z' = -\frac{1}{8}(y'z + yz') \quad , \quad 1 \leq x \leq 3 \quad , \quad z(1) = 0 \quad , \quad z'(1) = 1$$

的近似解。如果算則 11.2 的停止條件為

$$|w_{1,N}(t_k) - y(3)| \leq 10^{-5}$$

我們須要 4 次迭代及  $t_4 = -14.000203$ 。用此  $t$  值獲得之結果列於表 11.2。

表 11.2

| $x_i$ | $w_{1,i}$ | $y(x_i)$  | $ w_{1,i} - y(x_i) $  |
|-------|-----------|-----------|-----------------------|
| 1.0   | 17.000000 | 17.000000 |                       |
| 1.1   | 15.755495 | 15.755455 | $4.06 \times 10^{-5}$ |
| 1.2   | 14.773389 | 14.773333 | $5.60 \times 10^{-5}$ |
| 1.3   | 13.997752 | 13.997692 | $5.94 \times 10^{-5}$ |
| 1.4   | 13.388629 | 13.388571 | $5.71 \times 10^{-5}$ |
| 1.5   | 12.916719 | 12.916667 | $5.23 \times 10^{-5}$ |
| 1.6   | 12.560046 | 12.560000 | $4.64 \times 10^{-5}$ |
| 1.7   | 12.301805 | 12.301765 | $4.02 \times 10^{-5}$ |
| 1.8   | 12.128923 | 12.128889 | $3.14 \times 10^{-5}$ |
| 1.9   | 12.031081 | 12.031053 | $2.84 \times 10^{-5}$ |
| 2.0   | 12.000023 | 12.000000 | $2.32 \times 10^{-5}$ |
| 2.1   | 12.029066 | 12.029048 | $1.84 \times 10^{-5}$ |
| 2.2   | 12.112741 | 12.112727 | $1.40 \times 10^{-5}$ |
| 2.3   | 12.246532 | 12.246522 | $1.01 \times 10^{-5}$ |
| 2.4   | 12.426673 | 12.426667 | $6.68 \times 10^{-6}$ |
| 2.5   | 12.650004 | 12.650000 | $3.61 \times 10^{-6}$ |
| 2.6   | 12.913847 | 12.913845 | $9.17 \times 10^{-7}$ |
| 2.7   | 13.215924 | 13.215926 | $1.43 \times 10^{-6}$ |
| 2.8   | 13.554282 | 13.554286 | $3.46 \times 10^{-6}$ |
| 2.9   | 13.927236 | 13.927241 | $5.21 \times 10^{-6}$ |
| 3.0   | 14.333327 | 14.333333 | $6.69 \times 10^{-6}$ |

雖然射擊法配合牛頓法使用，每次迭代須要多解一個初值問題，但它通常收斂的比正割法快。不過 2 種方法都只是局部收斂，因為它們須要夠好的初始近似值。

關於非線性問題射擊法之收斂性的一般性討論，讀者可參考 Keller 的傑出著作 [Keller, H]。在該書中討論了更多的邊界條件。要注意的是，用於非線性問題的射擊法對捨入誤差敏感，尤其是當  $y(x)$  及  $z(x,t)$  為在  $[a, b]$  間隨  $x$  快速增加的函數。

## 習題組 11.2 完整習題請見隨書光碟

1. 用非線性射擊算則及  $h=0.5$  求邊界值問題

$$y'' = -(y')^2 - y + \ln x, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = \ln 2$$

之近似解。將結果與確解  $y = \ln x$  做比較。

2. 用非線性射擊算則及  $h=0.25$  求邊界值問題

$$y'' = 2y^3, \quad -1 \leq x \leq 0, \quad y(-1) = \frac{1}{2}, \quad y(0) = \frac{1}{3}$$

之近似解。將結果與確解  $y(x) = 1/(x+3)$  做比較。

3. 用非線性射擊算則及  $TOL = 10^{-4}$  求下列邊界值問題之近似解。將結果與所提供之確解做比較。

a.  $y'' = -e^{-2y}$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ,  $y(1) = 0$ ,  $y(2) = \ln 2$ ; 使用  $N = 10$ ; 確解為  $y(x) = \ln x$ 。

b.  $y'' = y' \cos x - y \ln y$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y(\frac{\pi}{2}) = e$ ; 使用  $N = 10$ ; 確解為  $y(x) = e^{\sin x}$ 。

c.  $y'' = -(2(y')^3 + y^2 y') \sec x$ ,  $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ ,  $y(\frac{\pi}{4}) = 2^{-1/4}$ ,  $y(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \sqrt[4]{12}$ ; 使用  $N = 5$ ; 確解為  $y(x) = \sqrt{\sin x}$ 。

d.  $y'' = \frac{1}{2}(1 - (y')^2 - y \sin x)$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y(\pi) = 2$ ; 使用  $N = 20$ ; 確解為  $y(x) = 2 + \sin x$ 。

4. 用非線性射擊算則及  $TOL = 10^{-4}$  求下列邊界值問題之近似解。將結果與所提供之確解做比較。

a.  $y'' = y^3 - yy'$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ,  $y(1) = \frac{1}{2}$ ,  $y(2) = \frac{1}{3}$ ; 使用  $h = 0.1$ ; 確解為  $y(x) = (x+1)^{-1}$ 。

b.  $y'' = 2y^3 - 6y - 2x^3$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ,  $y(1) = 2$ ,  $y(2) = \frac{5}{2}$ ; 使用  $h = 0.1$ ; 確解為  $y(x) = x + x^{-1}$ 。

c.  $y'' = y' + 2(y - \ln x)^3 - x^{-1}$ ,  $2 \leq x \leq 3$ ,  $y(2) = \frac{1}{2} + \ln 2$ ,  $y(3) = \frac{1}{3} + \ln 3$ ; 使用  $h = 0.1$ ; 確解為  $y(x) = x^{-1} + \ln x$ 。

d.  $y'' = 2(y')^2 x^{-3} - 9y^2 x^{-5} + 4x$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ,  $y(1) = 0$ ,  $y(2) = \ln 256$ ; 使用  $h = 0.05$ ; 確解為  $y(x) = x^3 \ln x$ 。

5. a. 修改算則 11.2, 用正割法取代牛頓法。使用  $t_0 = (\beta - \alpha)/(b - a)$  及  $t_1 = t_0 + (\beta - y(b, t_0))/(b - a)$ 。

b. 用 (a) 小題推導出的正割算則, 重做習題 4(a) 及 4(c), 並比較 2 種方法所須的迭代次數。

6. Van der Pol 方程式

$$y'' - \mu(y^2 - 1)y' + y = 0, \quad \mu > 0$$

為 3 元件真空管內部電流的統御方程式。令  $\mu = \frac{1}{2}$ 、 $y(0) = 0$  及  $y(2) = 1$ 。求  $t = 0.2i$ ,  $1 \leq i \leq 9$  時  $y(t)$  的近似解。



## 11.3 解線性問題之有限差分法

求解邊界值問題的線性及非線性射擊法，都可能會有不穩定的問題。在本節中所要探討的方法，其穩定性較佳，但要達到指定的準確度，所用的計算量通常也較大。

解邊界值問題的有限差分法，基本上是用 4.1 節所介紹的差分式，取代微分方程中的所有導數項。至於使用那種差分式及步進距離  $h$ ，則取決於所希望的截尾誤差階數。但是因為近似導數的不穩定性，所以  $h$  不能太小。

### ■ 離散近似

將有限差分法用於線性二階邊界值問題

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \quad (11.14)$$

須要用差分式取代  $y'$  及  $y''$  兩者。首先選擇一個整數  $N > 0$  將區間  $[a, b]$  分成  $(N + 1)$  個次區段，每個次區段的端點為  $x_i = a + ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, N + 1$ ，其中  $h = (b - a)/(N + 1)$ 。這樣子決定步進距離，有助於使用第 6 章所介紹的矩陣算則，以求解包含  $N \times N$  矩陣的線性方程組。

對於  $i = 1, 2, \dots, N$  的內部網格點  $x_i$ ，我們要近似的微分方程為

$$y''(x_i) = p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) + r(x_i) \quad (11.15)$$

假設  $y \in C^4[x_{i-1}, x_{i+1}]$ ，將  $y$  在  $x_i$  以三次泰勒多項式展開，寫出它在  $x_{i+1}$  及  $x_{i-1}$  的多項式

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_i^+)$$

$\xi_i^+$  在  $(x_i, x_{i+1})$  之間，及

$$y(x_{i-1}) = y(x_i - h) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) - \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_i^-)$$

$\xi_i^-$  在  $(x_{i-1}, x_i)$  之間。將這兩式相加可得

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + h^2y''(x_i) + \frac{h^4}{24}[y^{(4)}(\xi_i^+) + y^{(4)}(\xi_i^-)]$$

由此可得  $y''(x_i)$  為

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2}[y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] - \frac{h^2}{24}[y^{(4)}(\xi_i^+) + y^{(4)}(\xi_i^-)]$$

可用中間值定理 (Intermediate Value Theorem) 1.11 簡化誤差項以得到

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2}[y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] - \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i) \quad (11.16)$$

$\xi_i$  在  $(x_{i-1}, x_{i+1})$  之間。這叫做  $y''(x_i)$  的**中央差分公式** (centered- difference formula)。

以類似的方法 (細節可參見 4.1 節) 可得  $y'(x_i)$  的中央差分公式為

$$y'(x_i) = \frac{1}{2h}[y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})] - \frac{h^2}{6}y'''(\eta_i) \quad (11.17)$$

$\eta_i$  在  $(x_{i-1}, x_{i+1})$  之間。

將這 2 個中央差分公式代入 (11.15) 式可得

$$\begin{aligned} \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} &= p(x_i) \left[ \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} \right] + q(x_i)y(x_i) \\ &\quad + r(x_i) - \frac{h^2}{12} [2p(x_i)y'''(\eta_i) - y^{(4)}(\xi_i)] \end{aligned}$$

利用此公式及邊界條件  $y(a) = \alpha$  及  $y(b) = \beta$ ，我們可定義出截尾誤差為  $O(h^2)$  的有限差分法

$$w_0 = \alpha, \quad w_{N+1} = \beta$$

及

$$\left( \frac{-w_{i+1} + 2w_i - w_{i-1}}{h^2} \right) + p(x_i) \left( \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} \right) + q(x_i)w_i = -r(x_i) \quad (11.18)$$

$i = 1, 2, \dots, N$ 。

我們可將 (11.18) 式改寫為

$$-\left(1 + \frac{h}{2}p(x_i)\right)w_{i-1} + (2 + h^2q(x_i))w_i - \left(1 - \frac{h}{2}p(x_i)\right)w_{i+1} = -h^2r(x_i)$$

而此方程組可表示成  $N \times N$  的三對角線矩陣型式

$$\begin{aligned} &Aw = \mathbf{b}, \text{ 其中} \quad (11.19) \\ A = &\begin{bmatrix} 2 + h^2q(x_1) & -1 + \frac{h}{2}p(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ -1 - \frac{h}{2}p(x_2) & 2 + h^2q(x_2) & -1 + \frac{h}{2}p(x_2) & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 + \frac{h}{2}p(x_{N-1}) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 - \frac{h}{2}p(x_N) & 2 + h^2q(x_N) \end{bmatrix}, \\ w = &\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{N-1} \\ w_N \end{bmatrix}, \quad \text{及} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -h^2r(x_1) + \left(1 + \frac{h}{2}p(x_1)\right)w_0 \\ -h^2r(x_2) \\ \vdots \\ -h^2r(x_{N-1}) \\ -h^2r(x_N) + \left(1 - \frac{h}{2}p(x_N)\right)w_{N+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

下面定理則給出了三對角線線性方程組 (11.19) 式有唯一解的條件。它的證明來自定理 6.31，將留在習題 9。

### 定理 11.3

設  $p$ 、 $q$  及  $r$  在  $[a, b]$  上為連續。如果在  $[a, b]$  上  $q(x) \geq 0$ ，則在  $h < 2/L$  之條件下，三對角線線性方程組 (11.19) 式有唯一解，其中  $L = \max_{a \leq x \leq b} |p(x)|$ 。 ■

我們必須要注意到，定理 11.3 的假設條件保證了 (11.14) 式的邊界值問題有唯一解，但並不保證  $y \in C^4[a, b]$ 。必須  $y^{(4)}$  在  $[a, b]$  上為連續，截尾誤差的階數才是  $O(h^2)$ 。

算則 11.3 即為線性有限差分法。

### 算則 11.3 線性有限差分法

求邊界值問題

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x) \quad , \quad a \leq x \leq b \quad , \quad y(a) = \alpha \quad , \quad y(b) = \beta$$

之近似解：

**INPUT** 端點  $a$ 、 $b$ ；邊界條件  $\alpha$ 、 $\beta$ ；整數  $N \geq 2$ 。

**OUTPUT** 每個  $i = 0, 1, \dots, N+1$  處  $y(x_i)$  的近似值  $w_i$ 。

**Step 1** Set  $h = (b - a)/(N + 1)$ ;

$$\begin{aligned} x &= a + h; \\ a_1 &= 2 + h^2 q(x); \\ b_1 &= -1 + (h/2)p(x); \\ d_1 &= -h^2 r(x) + (1 + (h/2)p(x))\alpha. \end{aligned}$$

**Step 2** For  $i = 2, \dots, N - 1$

$$\begin{aligned} \text{set } x &= a + ih; \\ a_i &= 2 + h^2 q(x); \\ b_i &= -1 + (h/2)p(x); \\ c_i &= -1 - (h/2)p(x); \\ d_i &= -h^2 r(x). \end{aligned}$$

**Step 3** Set  $x = b - h$ ;

$$\begin{aligned} a_N &= 2 + h^2 q(x); \\ c_N &= -1 - (h/2)p(x); \\ d_N &= -h^2 r(x) + (1 - (h/2)p(x))\beta. \end{aligned}$$

**Step 4** Set  $l_1 = a_1$ ; (Step 4-8 用算則 6.7 解三對角線線性方程組)

$$\begin{aligned} u_1 &= b_1/l_1; \\ z_1 &= d_1/l_1. \end{aligned}$$

**Step 5** For  $i = 2, \dots, N - 1$  set  $l_i = a_i - c_i u_{i-1}$ ;

$$\begin{aligned} u_i &= b_i/l_i; \\ z_i &= (d_i - c_i z_{i-1})/l_i. \end{aligned}$$

**Step 6** Set  $l_N = a_N - c_N u_{N-1}$ ;

$$z_N = (d_N - c_N z_{N-1})/l_N.$$

**Step 7** Set  $w_0 = \alpha$ ;  
 $w_{N+1} = \beta$ .  
 $w_N = z_N$ .

**Step 8** For  $i = N - 1, \dots, 1$  set  $w_i = z_i - u_i w_{i+1}$ .

**Step 9** For  $i = 0, \dots, N + 1$  set  $x = a + ih$ ;  
 OUTPUT  $(x, w_i)$ .

**Step 10** STOP. (程序完成) ■

**例題 1** 用算則 11.3 及  $N=9$  求線性邊界值問題

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 2$$

的近似解，並將結果與 11.1 節的例題 2 用射擊法所得的結果做比較。

**解** 在此問題中我們用  $N=9$ ，所以  $h=0.1$ ，和 11.1 節例題 2 所用的一樣。完整的結果列於表 11.3。

**表 11.3**

| $x_i$ | $w_i$      | $y(x_i)$   | $ w_i - y(x_i) $      |
|-------|------------|------------|-----------------------|
| 1.0   | 1.00000000 | 1.00000000 |                       |
| 1.1   | 1.09260052 | 1.09262930 | $2.88 \times 10^{-5}$ |
| 1.2   | 1.18704313 | 1.18708484 | $4.17 \times 10^{-5}$ |
| 1.3   | 1.28333687 | 1.28338236 | $4.55 \times 10^{-5}$ |
| 1.4   | 1.38140205 | 1.38144595 | $4.39 \times 10^{-5}$ |
| 1.5   | 1.48112026 | 1.48115942 | $3.92 \times 10^{-5}$ |
| 1.6   | 1.58235990 | 1.58239246 | $3.26 \times 10^{-5}$ |
| 1.7   | 1.68498902 | 1.68501396 | $2.49 \times 10^{-5}$ |
| 1.8   | 1.78888175 | 1.78889853 | $1.68 \times 10^{-5}$ |
| 1.9   | 1.89392110 | 1.89392951 | $8.41 \times 10^{-6}$ |
| 2.0   | 2.00000000 | 2.00000000 |                       |

此處結果的準確度明顯比在 11.1 節例題 2 的結果差。這是因為在之前我們用四階 Runge-Kutta 法，其局部截尾誤差為  $O(h^4)$ ，而此處所用有限差分法的局部截尾誤差為  $O(h^2)$ 。 ■

有幾種方法可提昇有限差分法的準確性。我們可以用五階泰勒級數以近似  $y''(x_i)$  與  $y'(x_i)$ ，以獲得  $h^4$  的截尾誤差項。但是這樣所得到的近似公式中，不只有  $y(x_{i+1})$  和  $y(x_{i-1})$ ，也包含了  $y(x_{i+2})$  和  $y(x_{i-2})$ 。這樣在  $i=0$  與  $i=N$  的地方就有困難了，因為我們沒有  $w_{-1}$  與  $w_{N+2}$ 。同時，這樣得到的方程組也不是三對角線型式，求解過程所須的計算量多很多。

## ■ 運用 Richardson 外推

在這種情形下使用高階截尾誤差的有限差分法，不如減小步進距離更容易獲得滿意的結果。此外，只要  $y$  的可微程度足夠，理察森外推法 (Richardson extrapolation) 可以很有效的用於此處，因為誤差項是  $h$  的偶數次方，且其係數與  $h$  無關 (見，例如，[Keller, H], p. 81)。

### 例題 2 用理察森外推法求邊界值問題

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 2$$

之近似解，使用  $h = 0.1$ 、 $0.05$  及  $0.025$ 。

**解** 結果如表 11.4 所列。第一次外推為

$$\text{Ext}_{1i} = \frac{4w_i(h = 0.05) - w_i(h = 0.1)}{3}$$

第二次外推為

$$\text{Ext}_{2i} = \frac{4w_i(h = 0.025) - w_i(h = 0.05)}{3}$$

最後一次為

$$\text{Ext}_{3i} = \frac{16\text{Ext}_{2i} - \text{Ext}_{1i}}{15}$$

表 11.4

| $x_i$ | $w_i(h = 0.05)$ | $w_i(h = 0.025)$ | $\text{Ext}_{1i}$ | $\text{Ext}_{2i}$ | $\text{Ext}_{3i}$ |
|-------|-----------------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1.0   | 1.00000000      | 1.00000000       | 1.00000000        | 1.00000000        | 1.00000000        |
| 1.1   | 1.09262207      | 1.09262749       | 1.09262925        | 1.09262930        | 1.09262930        |
| 1.2   | 1.18707436      | 1.18708222       | 1.18708477        | 1.18708484        | 1.18708484        |
| 1.3   | 1.28337094      | 1.28337950       | 1.28338230        | 1.28338236        | 1.28338236        |
| 1.4   | 1.38143493      | 1.38144319       | 1.38144589        | 1.38144595        | 1.38144595        |
| 1.5   | 1.48114959      | 1.48115696       | 1.48115937        | 1.48115941        | 1.48115962        |
| 1.6   | 1.58238429      | 1.58239042       | 1.58239242        | 1.58239246        | 1.58239246        |
| 1.7   | 1.68500770      | 1.68501240       | 1.68501393        | 1.68501396        | 1.68501396        |
| 1.8   | 1.78889432      | 1.78889748       | 1.78889852        | 1.78889853        | 1.78889853        |
| 1.9   | 1.89392740      | 1.89392898       | 1.89392950        | 1.89392951        | 1.89392951        |
| 2.0   | 2.00000000      | 2.00000000       | 2.00000000        | 2.00000000        | 2.00000000        |

為節省空間，在表中省略了  $w_i(h=0.1)$  的值，它們已列於表 11.3。 $w_i(h=0.025)$  的值準確到約  $3 \times 10^{-6}$ 。但所有  $\text{Ext}_{3i}$  的結果都準確到所示的位數。事實上，如果使用的位數足夠的話，網格點上的近似解與確解的最大誤差為  $6.3 \times 10^{-11}$ ，這是很大的改進。 ■

### 習題組 11.3

完整習題請見隨書光碟

#### 1. 邊界值問題

$$y'' = 4(y - x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2$$

的確解為  $y(x) = e^2(e^4 - 1)^{-1}(e^{2x} - e^{-2x}) + x$ 。用線性有限差分法求其近似解，並與確解做比較。

- 用  $h = 1/2$ ；
- 用  $h = 1/4$ ；
- 用外推法求  $y(1/2)$  的近似值。

#### 2. 邊界值問題

$$y'' = y' + 2y + \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad y(0) = -0.3, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0.1$$

的確解為  $y(x) = -\frac{1}{10}(\sin x + 3 \cos x)$  用線性有限差分法求其近似解，並與確解做比較。

- 用  $h = \frac{\pi}{4}$ ；
- 用  $h = \frac{\pi}{8}$ ；
- 用外推法求  $y(\pi/4)$  的近似值。

#### 3. 用線性有限差分法求下列邊界值問題的近似解。

- $y'' = -3y' + 2y + 2x + 3, 0 \leq x \leq 1, y(0) = 2, y(1) = 1$ ；用  $h = 0.1$ 。
- $y'' = -4x^{-1}y' + 2x^{-2}y - 2x^{-2} \ln x, 1 \leq x \leq 2, y(1) = -\frac{1}{2}, y(2) = \ln 2$ ；用  $h = 0.05$ 。
- $y'' = -(x+1)y' + 2y + (1-x^2)e^{-x}, 0 \leq x \leq 1, y(0) = -1, y(1) = 0$ ；用  $h = 0.1$ 。
- $y'' = x^{-1}y' + 3x^{-2}y + x^{-1} \ln x - 1, 1 \leq x \leq 2, y(1) = y(2) = 0$ ；用  $h = 0.1$ 。

#### 4. 雖然在下列邊界值問題中 $q(x) < 0$ ，但都存在有唯一解各如所示。用線性有限差分法求其近似解，並與確解做比較。

- $y'' + y = 0, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, y(0) = 1, y(\frac{\pi}{4}) = 1$ ；用  $h = \frac{\pi}{20}$ ；確解為  $y(x) = \cos x + (\sqrt{2} - 1) \sin x$ 。
- $y'' + 4y = \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, y(0) = 0, y(\frac{\pi}{4}) = 0$ ；用  $h = \frac{\pi}{20}$ ；確解為  $y(x) = -\frac{1}{3} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{6} \sin 2x + \frac{1}{3} \cos x$ 。
- $y'' = -4x^{-1}y' + 2x^{-2}y - 2x^{-2} \ln x, y(1) = \frac{1}{2}, y(2) = \ln 2$ ；用  $h = 0.05$ ；確解為  $y(x) = 4x^{-1} - 2x^{-2} + \ln x - 3/2$ 。
- $y'' = 2y' - y + xe^x - x, 0 \leq x \leq 2, y(0) = 0, y(2) = -4$ ；用  $h = 0.2$ ；確解為  $y(x) = \frac{1}{6}x^3e^x - \frac{5}{3}xe^x + 2e^x - x - 2$ 。

#### 5. 用線性射擊算則求邊界值問題

$$y'' = 100y, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e^{-10}.$$

之近似解，已知其確解為  $y = e^{-10x}$ 。分別使用  $h = 0.1$  及  $0.05$ 。能否解釋其結果？

6. 用例題 2 中的外推法重複習題 3(a) 及 3(b)。
7. 在本章開始處的例題，考慮一根 2 端固定的梁承受均勻荷重時的變形量。此物理現象的邊界值問題為

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{S}{EI} w + \frac{qx}{2EI}(x-l), \quad 0 < x < l,$$

其邊界條件為  $w(0) = 0$  及  $w(l) = 0$ 。

假設此梁是 W10 型鋼的工字梁，其特性如下：長度  $l = 10$  in、均勻荷重  $q = 100$  lb/ft、彈性模數  $E = 3.0 \times 10^7$  lb/in.<sup>2</sup>、端點應力  $S = 1000$  lb 及中央慣性矩  $I = 625$  in<sup>4</sup>。

- a. 求梁上每隔 6 in 處變形量  $w(x)$  的近似值。
- b. 實際的關係已知為

$$w(x) = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax} + b(x-l)x + c,$$

其中  $c_1 = 7.7042537 \times 10^4$ 、 $c_2 = 7.9207462 \times 10^4$ 、 $a = 2.3094010 \times 10^{-4}$ 、 $b = -4.1666666 \times 10^{-3}$  及  $c = -1.5625 \times 10^5$ 。區間中的最大誤差是否小於 0.2 in？

- c. 州法律規定  $\max_{0 < x < l} w(x) < l/300$ 。此梁是否符合規定？
8. 一塊受到均勻荷重的長矩形平板，在軸向張力下的統御方程式為二階微分方程。令  $S$  為軸向力， $q$  為均勻荷重。單位長度的變形量為

$$W''(x) - \frac{S}{D} W(x) = \frac{-ql}{2D} x + \frac{q}{2D} x^2, \quad 0 \leq x \leq l, \quad W(0) = W(l) = 0$$

其中  $l$  為平板長度， $D$  為撓屈剛性。令  $q = 200$  lb/in<sup>2</sup>、 $S = 100$  lb/in、 $D = 8.8 \times 10^7$  lb/in。及  $l = 50$  in。以每時間隔求變形量的近似解。

9. 證明定理 11.3。[提示：利用定理 6.31，先證明由  $|\frac{h}{2}p(x_i)| < 1$  可得  $|-1 - \frac{h}{2}p(x_i)| + |-1 + \frac{h}{2}p(x_i)| = 2$ ]
10. 證明，若  $y \in C^6[a, b]$  且  $w_0, w_1, \dots, w_{N+1}$  滿足 (11.18) 式，則

$$w_i - y(x_i) = Ah^2 + O(h^4)$$

其中  $A$  與  $h$  無關，前提為對某個  $w$ ，在  $[a, b]$  間  $q(x) \geq w > 0$ 。



## 11.4 解非線性問題之有限差分法

非線性邊界值問題的通式為

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad \text{且 } y(a) = \alpha \text{ 及 } y(b) = \beta$$

其有限差分法，與 11.3 節解線性問題所用的類似。但因為此處方程組不是線性的，必須用迭代的方式求解。

為推導求解程序，我們假設在後續討論中  $f$  滿足以下條件：

- $f$  及其偏導數  $f_y$  和  $f_{y'}$  在

$$D = \{(x, y, y') \mid a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty \text{ 及 } -\infty < y' < \infty\}$$

上為連續；

- 對某  $\delta > 0$ ，在  $D$  上有  $f_y(x, y, y') \geq \delta$ ；
- 存在有常數  $k$  及  $L$  使得

$$k = \max_{(x, y, y') \in D} |f_y(x, y, y')| \text{ 及 } L = \max_{(x, y, y') \in D} |f_{y'}(x, y, y')|$$

由定理 11.1，這樣可確保存在有唯一解。

與線性時的做法相同，我們將區間  $[a, b]$  分成  $(N+1)$  個相等次區段，每個次區段的端點為  $x_i = a + ih$ ， $i=0, 1, \dots, N+1$ 。假設其確解的四階導數為有界，故我們可以將每個方程式

$$y''(x_i) = f(x_i, y(x_i), y'(x_i))$$

中的  $y''(x_i)$  及  $y'(x_i)$ ，換成 (11.16) 及 (11.17) 式的中央差分公式。對每個  $i=1, 2, \dots, N$ ，可得

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} = f\left(x_i, y(x_i), \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} - \frac{h^2}{6}y'''(\eta_i)\right) + \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i)$$

其中  $\xi_i$  及  $\eta_i$  在  $(x_{i-1}, x_{i+1})$  之間。

與線性的情況一樣，我們刪去誤差項，再加入邊界條件，可得有限差分法：

$$w_0 = \alpha, \quad w_{N+1} = \beta$$

及

$$-\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} + f\left(x_i, w_i, \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}\right) = 0$$

$i=1, 2, \dots, N$ 。

由此所得的  $N \times N$  非線性方程組

$$\begin{aligned} 2w_1 - w_2 + h^2 f\left(x_1, w_1, \frac{w_2 - \alpha}{2h}\right) - \alpha &= 0 \\ -w_1 + 2w_2 - w_3 + h^2 f\left(x_2, w_2, \frac{w_3 - w_1}{2h}\right) &= 0 \\ &\vdots \\ -w_{N-2} + 2w_{N-1} - w_N + h^2 f\left(x_{N-1}, w_{N-1}, \frac{w_N - w_{N-2}}{2h}\right) &= 0, \\ -w_{N-1} + 2w_N + h^2 f\left(x_N, w_N, \frac{\beta - w_{N-1}}{2h}\right) - \beta &= 0 \end{aligned} \tag{11.20}$$

在  $h < 2/L$  時有唯一解，其證明見 [Keller, H], p. 86。

## ■ 牛頓法迭代

我們用 10.2 節所介紹的，適用於非線性方程的牛頓法，求此非線性方程組的近似解。經由一序列的迭代可得到  $\{(w_1^{(k)}, w_2^{(k)}, \dots, w_N^{(k)})^t\}$ ，最後收斂到 (11.20) 式的解，其條件為初始近似值  $(w_1^{(0)}, w_2^{(0)}, \dots, w_N^{(0)})^t$  與真實的解  $(w_1, w_2, \dots, w_N)^t$  夠接近，且此方程組的 Jacobian 矩陣為非奇異。方程組 (11.20) 式的 Jacobian 矩陣  $J(w_1, \dots, w_N)$  為三對角線型式，其第  $ij$  個元素為

$$J(w_1, \dots, w_N)_{ij} = \begin{cases} -1 + \frac{h}{2} f_{y'} \left( x_i, w_i, \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} \right), & i = j-1 \text{ 及 } j = 2, \dots, N, \\ 2 + h^2 f_y \left( x_i, w_i, \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} \right), & i = j \text{ 及 } j = 1, \dots, N, \\ -1 - \frac{h}{2} f_{y'} \left( x_i, w_i, \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} \right), & i = j+1 \text{ 及 } j = 1, \dots, N-1, \end{cases}$$

其中  $w_0 = \alpha$  且  $w_{N+1} = \beta$ 。

用於非線性方程組的牛頓法，在每次迭代時要解  $N \times N$  的線性方程組

$$\begin{aligned} & J(w_1, \dots, w_N)(v_1, \dots, v_N)^t \\ &= - \left( 2w_1 - w_2 - \alpha + h^2 f \left( x_1, w_1, \frac{w_2 - \alpha}{2h} \right), \right. \\ & \quad \left. -w_1 + 2w_2 - w_3 + h^2 f \left( x_2, w_2, \frac{w_3 - w_1}{2h} \right), \dots, \right. \\ & \quad \left. -w_{N-2} + 2w_{N-1} - w_N + h^2 f \left( x_{N-1}, w_{N-1}, \frac{w_N - w_{N-2}}{2h} \right), \right. \\ & \quad \left. -w_{N-1} + 2w_N + h^2 f \left( x_N, w_N, \frac{\beta - w_{N-1}}{2h} \right) - \beta \right)^t \end{aligned}$$

以獲得  $v_1, v_2, \dots, v_N$ ，因為

$$w_i^{(k)} = w_i^{(k-1)} + v_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

由於  $J$  為三對角線矩陣，所以問題並不如乍看的嚴重。可以用 Crout 因式分解算則 (6.7) 來求解。其程序詳述於算則 11.4。

### 算則 11.4 非線性有限差分法 (Nonlinear Finite-Difference)

求非線性邊界值問題

$$y'' = f(x, y, y') \quad , \quad a \leq x \leq b \quad , \quad y(a) = \alpha \quad , \quad y(b) = \beta$$

之近似解：

**INPUT** 端點  $a, b$ ；邊界條件  $\alpha, \beta$ ；整數  $N \geq 2$ ；容許誤差  $TOL$ ；最大迭代次數  $M$ 。

**OUTPUT** 每個  $i = 0, 1, \dots, N+1$  處  $y(x_i)$  的近似值  $w_i$ ，或超過最大迭代次數的訊息。

**Step 1** Set  $h = (b - a)/(N + 1)$ ;

$$w_0 = \alpha;$$

$$w_{N+1} = \beta.$$

**Step 2** For  $i = 1, \dots, N$  set  $w_i = \alpha + i \left( \frac{\beta - \alpha}{b - a} \right) h$ .

**Step 3** Set  $k = 1$ .

**Step 4** While  $k \leq M$  do Steps 5–16.

**Step 5** Set  $x = a + h$ ;

$$t = (w_2 - \alpha)/(2h);$$

$$a_1 = 2 + h^2 f_y(x, w_1, t);$$

$$b_1 = -1 + (h/2) f_{y'}(x, w_1, t);$$

$$d_1 = -(2w_1 - w_2 - \alpha + h^2 f(x, w_1, t)).$$

**Step 6** For  $i = 2, \dots, N - 1$

$$\text{set } x = a + ih;$$

$$t = (w_{i+1} - w_{i-1})/(2h);$$

$$a_i = 2 + h^2 f_y(x, w_i, t);$$

$$b_i = -1 + (h/2) f_{y'}(x, w_i, t);$$

$$c_i = -1 - (h/2) f_{y'}(x, w_i, t);$$

$$d_i = -(2w_i - w_{i+1} - w_{i-1} + h^2 f(x, w_i, t)).$$

**Step 7** Set  $x = b - h$ ;

$$t = (\beta - w_{N-1})/(2h);$$

$$a_N = 2 + h^2 f_y(x, w_N, t);$$

$$c_N = -1 - (h/2) f_{y'}(x, w_N, t);$$

$$d_N = -(2w_N - w_{N-1} - \beta + h^2 f(x, w_N, t)).$$

**Step 8** Set  $l_1 = a_1$ ; (Steps 8-12 用算則 6.7 解三對角線線性方程組)

$$u_1 = b_1/l_1;$$

$$z_1 = d_1/l_1.$$

**Step 9** For  $i = 2, \dots, N - 1$  set  $l_i = a_i - c_i u_{i-1}$ ;

$$u_i = b_i/l_i;$$

$$z_i = (d_i - c_i z_{i-1})/l_i.$$

**Step 10** Set  $l_N = a_N - c_N u_{N-1}$ ;

$$z_N = (d_N - c_N z_{N-1})/l_N.$$

**Step 11** Set  $v_N = z_N$ ;

$$w_N = w_N + v_N.$$

**Step 12** For  $i = N - 1, \dots, 1$  set  $v_i = z_i - u_i v_{i+1}$ ;

$$w_i = w_i + v_i.$$

**Step 13** If  $\|v\| \leq TOL$  then do Steps 14 and 15.

**Step 14** For  $i = 0, \dots, N + 1$  set  $x = a + ih$ ;

OUTPUT  $(x, w_i)$ .

**Step 15** STOP. (程式成功)

**Step 16** Set  $k = k + 1$ .

**Step 17** OUTPUT ('Maximum number of iterations exceeded');

(程式失敗)

STOP.

此一非線性有限差分法之精度為  $O(h^2)$ ，(見 [IK], p. 433)。

如果無法確定一個問題是否滿足本節開始時所列的條件，我們應該指定一個迭代次數的上限，如果超過了此上限，就應該考慮換用別的初始近似值，或減小步進距離。在程序開始時可合理的假設解為線性，除非已知它們不是。在算則的 Step 2 中所用的初始近似值，是利用通過  $(a, \alpha)$  及  $(b, \beta)$  兩點的直線，求得每一個  $x_i, i = 1, 2, \dots, N$ ，的函數值做為初始近似值  $w_i^{(0)}$ 。

**例題 1** 我們將算則 11.4 及  $h = 0.1$  用於邊界值問題

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy') \quad , \text{ 其中 } 1 \leq x \leq 3 \quad , \text{ 且 } y(1) = 17 \quad , \quad y(3) = \frac{43}{3}$$

並將結果與 11.2 節例題 1 的做比較。

**解** 算則 11.4 所用的終止條件，是迭代到連續的兩個近似解的差小於  $10^{-8}$  為止。這須要 4 次迭代，所得結果列於表 11.5。它們不如之前用非線性射擊法所得的準確，之前結果在表的中間部分準確到  $10^{-5}$ 。 ■

**表 11.5**

| $x_i$ | $w_i$     | $y(x_i)$  | $ w_i - y(x_i) $       |
|-------|-----------|-----------|------------------------|
| 1.0   | 17.000000 | 17.000000 |                        |
| 1.1   | 15.754503 | 15.755455 | $9.520 \times 10^{-4}$ |
| 1.2   | 14.771740 | 14.773333 | $1.594 \times 10^{-3}$ |
| 1.3   | 13.995677 | 13.997692 | $2.015 \times 10^{-3}$ |
| 1.4   | 13.386297 | 13.388571 | $2.275 \times 10^{-3}$ |
| 1.5   | 12.914252 | 12.916667 | $2.414 \times 10^{-3}$ |
| 1.6   | 12.557538 | 12.560000 | $2.462 \times 10^{-3}$ |
| 1.7   | 12.299326 | 12.301765 | $2.438 \times 10^{-3}$ |
| 1.8   | 12.126529 | 12.128889 | $2.360 \times 10^{-3}$ |
| 1.9   | 12.028814 | 12.031053 | $2.239 \times 10^{-3}$ |
| 2.0   | 11.997915 | 12.000000 | $2.085 \times 10^{-3}$ |
| 2.1   | 12.027142 | 12.029048 | $1.905 \times 10^{-3}$ |
| 2.2   | 12.111020 | 12.112727 | $1.707 \times 10^{-3}$ |
| 2.3   | 12.245025 | 12.246522 | $1.497 \times 10^{-3}$ |
| 2.4   | 12.425388 | 12.426667 | $1.278 \times 10^{-3}$ |
| 2.5   | 12.648944 | 12.650000 | $1.056 \times 10^{-3}$ |
| 2.6   | 12.913013 | 12.913846 | $8.335 \times 10^{-4}$ |
| 2.7   | 13.215312 | 13.215926 | $6.142 \times 10^{-4}$ |
| 2.8   | 13.553885 | 13.554286 | $4.006 \times 10^{-4}$ |
| 2.9   | 13.927046 | 13.927241 | $1.953 \times 10^{-4}$ |
| 3.0   | 14.333333 | 14.333333 |                        |

## ■ 使用理察森外推

理察森外推法同樣可用於非線性有限差分法。對於以上例題，使用  $h = 0.1$ 、 $0.05$  及  $0.025$  的外推結果列於表 11.6，每種條件迭代 4 次。為節省空間，在表中省略了  $w_i(h = 0.1)$  的值，它們已列於表 11.5。 $w_i(h = 0.025)$  的值準確到約  $1.5 \times 10^{-4}$ 。但所有的  $\text{Ext}_{3i}$  都準確至所示位數，其實際的最大誤差為  $3.68 \times 10^{-10}$ 。

表 11.6

| $x_i$ | $w_i(h = 0.05)$ | $w_i(h = 0.025)$ | $\text{Ext}_{1i}$ | $\text{Ext}_{2i}$ | $\text{Ext}_{3i}$ |
|-------|-----------------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1.0   | 17.00000000     | 17.00000000      | 17.00000000       | 17.00000000       | 17.00000000       |
| 1.1   | 15.75521721     | 15.75539525      | 15.75545543       | 15.75545460       | 15.75545455       |
| 1.2   | 14.77293601     | 14.77323407      | 14.77333479       | 14.77333342       | 14.77333333       |
| 1.3   | 13.99718996     | 13.99756690      | 13.99769413       | 13.99769242       | 13.99769231       |
| 1.4   | 13.38800424     | 13.38842973      | 13.38857346       | 13.38857156       | 13.38857143       |
| 1.5   | 12.91606471     | 12.91651628      | 12.91666881       | 12.91666680       | 12.91666667       |
| 1.6   | 12.55938618     | 12.55984665      | 12.56000217       | 12.56000014       | 12.56000000       |
| 1.7   | 12.30115670     | 12.30161280      | 12.30176684       | 12.30176484       | 12.30176471       |
| 1.8   | 12.12830042     | 12.12874287      | 12.12899094       | 12.12888902       | 12.12888889       |
| 1.9   | 12.03049438     | 12.03091316      | 12.03105457       | 12.03105275       | 12.03105263       |
| 2.0   | 11.99948020     | 11.99987013      | 12.00000179       | 12.00000011       | 12.00000000       |
| 2.1   | 12.02857252     | 12.02892892      | 12.02902924       | 12.02904772       | 12.02904762       |
| 2.2   | 12.11230149     | 12.11262089      | 12.11272872       | 12.11272736       | 12.11272727       |
| 2.3   | 12.24614846     | 12.24642848      | 12.24652299       | 12.24652182       | 12.24652174       |
| 2.4   | 12.42634789     | 12.42658702      | 12.42666773       | 12.42666673       | 12.42666667       |
| 2.5   | 12.64973666     | 12.64993420      | 12.65000086       | 12.65000005       | 12.65000000       |
| 2.6   | 12.91362828     | 12.91379422      | 12.91384683       | 12.91384620       | 12.91384615       |
| 2.7   | 13.21577275     | 13.21588765      | 13.21592641       | 13.21592596       | 13.21592593       |
| 2.8   | 13.55418579     | 13.55426075      | 13.55428603       | 13.55428573       | 13.55428571       |
| 2.9   | 13.92719268     | 13.92722921      | 13.92724153       | 13.92724139       | 13.92724138       |
| 3.0   | 14.33333333     | 14.33333333      | 14.33333333       | 14.33333333       | 14.33333333       |

## 習題組 11.4

完整習題請見隨書光碟

1. 用非線性有限差分法及  $h=0.5$ ，求邊界值問題

$$y'' = -(y')^2 - y + \ln x, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = \ln 2$$

的近似解。將結果與確解  $y = \ln x$  相比較。

2. 用非線性有限差分法及  $h=0.25$ ，求邊界值問題

$$y'' = 2y^3, \quad -1 \leq x \leq 0, \quad y(-1) = \frac{1}{2}, \quad y(0) = \frac{1}{3}$$

的近似解。將結果與確解  $y(x) = 1/(x+3)$  相比較。

3. 用非線性有限差分法及  $TOL = 10^{-4}$  求下列邊界值問題之近似解。與各小題列出的確解做比較。

a.  $y'' = -e^{-2y}$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ,  $y(1) = 0$ ,  $y(2) = \ln 2$ ; 用  $N = 9$ ; 確解  $y(x) = \ln x$ 。

b.  $y'' = y' \cos x - y \ln y$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y(\frac{\pi}{2}) = e$ ; 用  $N = 9$ ; 確解  $y(x) = e^{\sin x}$ 。

c.  $y'' = -(2(y')^3 + y^2 y') \sec x$ ,  $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ ,  $y(\frac{\pi}{4}) = 2^{-1/4}$ ,  $y(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \sqrt[4]{12}$ ; 用  $N = 4$ ; 確解  $y(x) = \sqrt{\sin x}$ 。

d.  $y'' = \frac{1}{2}(1 - (y')^2 - y \sin x)$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y(\pi) = 2$ ; 用  $N = 19$ ; 確解  $y(x) = 2 + \sin x$ 。

4. 用非線性有限差分法及  $TOL = 10^{-4}$  求下列邊界值問題之近似解。與各小題列出的確解做比較。

a.  $y'' = y^3 - yy'$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ,  $y(1) = \frac{1}{2}$ ,  $y(2) = \frac{1}{3}$ ; 用  $h = 0.1$ ; 確解  $y(x) = (x+1)^{-1}$ 。

b.  $y'' = 2y^3 - 6y - 2x^3$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ,  $y(1) = 2$ ,  $y(2) = \frac{5}{2}$ ; 用  $h = 0.1$ ; 確解  $y(x) = x + x^{-1}$ 。

c.  $y'' = y' + 2(y - \ln x)^3 - x^{-1}$ ,  $2 \leq x \leq 3$ ,  $y(2) = \frac{1}{2} + \ln 2$ ,  $y(3) = \frac{1}{3} + \ln 3$ ; 用  $h = 0.1$ ; 確解  $y(x) = x^{-1} + \ln x$ 。

d.  $y'' = (y')^2 x^{-3} - 9y^2 x^{-5} + 4x$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ,  $y(1) = 0$ ,  $y(2) = \ln 256$ ; 用  $h = 0.05$ ; 確解  $y(x) = x^3 \ln x$ 。

5. 用外推法重做習題 4(a) 及 4(b)。

6. 在 11.3 節的習題 7 中，我們考慮一根兩端固定的梁承受均勻荷重時的變形量。用更準確的方式來表示弧度，微分方程改寫為

$$[1 + (w'(x))^2]^{-3/2} w''(x) = \frac{S}{EI} w(x) + \frac{qx}{2EI} (x-l), \quad 0 < x < l$$

以每 6 in 間隔求變形量  $w(x)$  的近似值，與 11.3 節習題 7 之結果做比較。

7. 證明，在本節開始處所列的假設條件，可保證在  $h < 2/L$  時，Jacobian 矩陣為非奇異。



## 11.5 Rayleigh-Ritz 法

用射擊法求解邊界值問題時，我們將邊界值問題換成一對初值問題來求解。有限差分法則是將連續的微分，換成離散的差分運算。而 Rayleigh-Ritz 法則是第 3 種求解的方式，它是一種變分法。首先要改寫邊界值問題，將其表示成，在一個滿足邊界條件並充份可微的函數集合中，選出可使特定積分式有最小值的函數。然後逐步縮小此候選函數的集合，最後得到最小化問題的近似解，也就是邊界值問題的近似解。

為說明 Rayleigh-Ritz 法，我們考慮一個對應於梁的應力分析的，線性 2 點邊界值問題。其微分方程為

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = f(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (11.21)$$

其邊界條件為

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (11.22)$$

此方程式描述長度為 1 的梁之變形量  $y(x)$ ，其截面積  $q(x)$  不為常數。其變形來自外力  $p(x)$  及  $f(x)$ 。在習題 6 及 9 中則納入了更一般化的邊界條件。

在接下來的討論中，我們假設  $p \in C^1[0, 1]$  且  $q, f \in C[0, 1]$ 。此外，我們假設存在有常數  $\delta > 0$ ，使得對每個  $[0, 1]$  間的  $x$  都有

$$p(x) \geq \delta \quad \text{且} \quad q(x) \geq 0$$

這些假設足以確保 (11.21) 及 (11.22) 式的邊界值問題有唯一解 (見 [BSW])。

### ■ 變分問題

與許多描述物理現象的邊界值問題一樣，描述梁的變形的公式之解，滿足一個積分式最小化之變分(variational)性質。梁方程式的變分原則是推導 Rayleigh-Ritz 法的基礎。對於所有屬於  $C_0^2[0, 1]$  且滿足  $C^2[0, 1]$  的函數  $u$ ，梁方程式的解成為在所有此種函數集合  $u(0) = u(1) = 0$  中選取可使得特定積分為最小的函數。以下定理即為此一特性。

### 定理 11.4

令  $p \in C^1[0, 1]$ ， $q, f \in C[0, 1]$ ，且

$$\text{在 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 時， } p(x) \geq \delta > 0 \quad , \quad q(x) \geq 0$$

函數  $y \in C_0^2[0, 1]$  是微分方程

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = f(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (11.23)$$

的唯一解，若且唯若  $y$  是屬於  $C_0^2[0, 1]$  並可使積分式

$$I[u] = \int_0^1 \{p(x)[u'(x)]^2 + q(x)[u(x)]^2 - 2f(x)u(x)\} dx \quad (11.24)$$

為最小的函數。 ■

此定理的詳細證明可參考 [Shul], pp. 88-89。其證明分成 3 步。首先證明 (11.23) 式的任一解  $y$  同時滿足方程式

$$\bullet \quad \int_0^1 f(x)u(x)dx = \int_0^1 p(x)\frac{dy}{dx}(x)\frac{du}{dx}(x) + q(x)y(x)u(x)dx \quad (11.25)$$

對所有  $u \in C_0^2[0,1]$ 。

- 第二步則要證明，若且唯若對所有的  $u \in C_0^2[0,1]$ ，(11.25) 式都成立，則  $y \in C_0^2[0,1]$  是 (11.24) 式的解。
- 最後一步則證明 (11.25) 式有唯一解。此唯一解將同時也是 (11.24) 及 (11.23) 式的解，所以 (11.23) 式與 (11.24) 式具有相同的解。

Rayleigh-Ritz 法以積分最小化求  $y$  的近似解時，並非針對所有屬於  $C_0^2[0,1]$  的函數，而是在一個較小的函數集合中尋找，此集合是由一組特定的基底函數  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  的線性組合所構成。這些基底函數為線性獨立，並滿足

$$\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

然後找出能夠使積分式  $I[\sum_{i=1}^n c_i \phi_i]$  為最小的常數  $c_1, c_2, \dots, c_n$ ，以得到 (11.23) 式的解  $y(x)$  的近似值  $\phi(x) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x)$ 。

由 (11.24) 式

$$\begin{aligned} I[\phi] &= I\left[\sum_{i=1}^n c_i \phi_i\right] \\ &= \int_0^1 \left\{ p(x) \left[ \sum_{i=1}^n c_i \phi_i'(x) \right]^2 + q(x) \left[ \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) \right]^2 - 2f(x) \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) \right\} dx \end{aligned} \quad (11.26)$$

若考慮  $I$  為  $c_1, c_2, \dots, c_n$  的函數，要有最小值則必須

$$\frac{\partial I}{\partial c_j} = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (11.27)$$

將 (11.26) 式微分得

$$\frac{\partial I}{\partial c_j} = \int_0^1 \left\{ 2p(x) \sum_{i=1}^n c_i \phi_i'(x) \phi_j'(x) + 2q(x) \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) \phi_j(x) - 2f(x) \phi_j(x) \right\} dx$$

代入 (11.27) 式得

$$0 = \sum_{i=1}^n \left[ \int_0^1 \{p(x) \phi_i'(x) \phi_j'(x) + q(x) \phi_i(x) \phi_j(x)\} dx \right] c_i - \int_0^1 f(x) \phi_j(x) dx \quad (11.28)$$

$j = 1, 2, \dots, n$ 。

(11.28) 式的正交方程式 (normal equations) 可寫成變數  $c_1, c_2, \dots, c_n$  的  $n \times n$  線性方程組  $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b}$ ，其中對稱矩陣  $\mathbf{A}$  為

$$a_{ij} = \int_0^1 [p(x)\phi_i'(x)\phi_j'(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x)] dx$$

而  $\mathbf{b}$  定義為

$$b_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x) dx$$

### ■ 分段線性基底

可選用的基底函數中，最簡單的是分段線性 (piecewise-linear) 多項式。第一步是將  $[0, 1]$  分段，選擇點  $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ ，使得

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$$

對每個  $i = 0, 1, \dots, n$ ，令  $h_i = x_{i+1} - x_i$ ，我們定義基底函數  $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)$  為

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } 0 \leq x \leq x_{i-1}, \\ \frac{1}{h_{i-1}}(x - x_{i-1}), & \text{若 } x_{i-1} < x \leq x_i, \\ \frac{1}{h_i}(x_{i+1} - x), & \text{若 } x_i < x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{若 } x_{i+1} < x \leq 1, \end{cases} \quad (11.29)$$

$i = 1, 2, \dots, n$ 。(見圖 11.4)

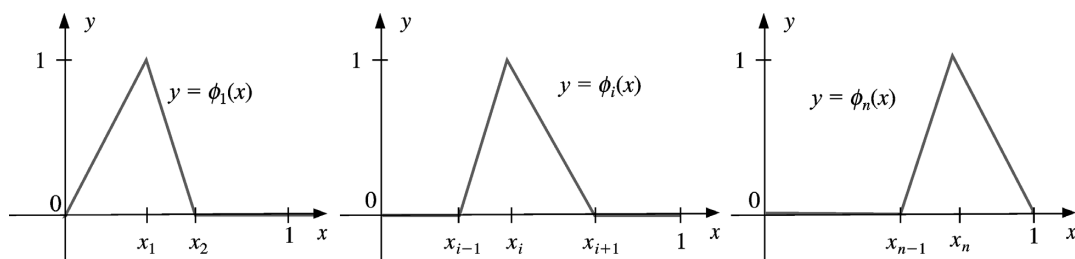


圖 11.4

因為函數  $\phi_i$  為分段線性，所以  $\phi_i'$  不連續，在  $(x_j, x_{j+1})$  間為常數，而  $j = 0, 1, \dots, n$ ，且

$$\phi'_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } 0 < x < x_{i-1}, \\ \frac{1}{h_{i-1}}, & \text{若 } x_{i-1} < x < x_i, \\ -\frac{1}{h_i}, & \text{若 } x_i < x < x_{i+1}, \\ 0, & \text{若 } x_{i+1} < x < 1, \end{cases} \quad (11.30)$$

$i = 1, 2, \dots, n$ 。

因為  $\phi_i$  與  $\phi'_i$  只有在  $(x_{i-1}, x_{i+1})$  間不為零，所以除了在  $j$  等於  $i-1$ 、 $i$  或  $i+1$  之外，我們有

$$\phi_i(x)\phi_j(x) \equiv 0 \quad \text{及} \quad \phi'_i(x)\phi'_j(x) \equiv 0$$

所以 (11.28) 式所代表的線性方程組，可簡化為  $n \times n$  三對角線性方程組。而  $A$  的非 0 元素為

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \int_0^1 \{p(x)[\phi'_i(x)]^2 + q(x)[\phi_i(x)]^2\} dx \\ &= \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) dx + \left(\frac{-1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx \\ &\quad + \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})^2 q(x) dx + \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)^2 q(x) dx \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, n$ ；及

$$\begin{aligned} a_{i,i+1} &= \int_0^1 \{p(x)\phi'_i(x)\phi'_{i+1}(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_{i+1}(x)\} dx \\ &= -\left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx + \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)(x - x_i)q(x) dx \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, n-1$ 。和

$$\begin{aligned} a_{i,i-1} &= \int_0^1 \{p(x)\phi'_i(x)\phi'_{i-1}(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_{i-1}(x)\} dx \\ &= -\left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) dx + \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - x)(x - x_{i-1})q(x) dx \end{aligned}$$

$i = 2, \dots, n$ 。而  $\mathbf{b}$  的元素為

$$b_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x) dx = \frac{1}{h_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})f(x) dx + \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)f(x) dx$$

$i = 1, 2, \dots, n$ 。

總共有六種積分式要求值：

$$Q_{1,i} = \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)(x - x_i)q(x) dx \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$Q_{2,i} = \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})^2 q(x) dx \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$Q_{3,i} = \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)^2 q(x) dx \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$Q_{4,i} = \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) dx \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n+1$$

$$Q_{5,i} = \frac{1}{h_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})f(x) dx \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

及

$$Q_{6,i} = \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)f(x) dx \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

在線性方程組  $\mathbf{Ac} = \mathbf{b}$  中的矩陣  $A$  及向量  $\mathbf{b}$  的元素為

$$a_{i,i} = Q_{4,i} + Q_{4,i+1} + Q_{2,i} + Q_{3,i} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$a_{i,i+1} = -Q_{4,i+1} + Q_{1,i} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$a_{i,i-1} = -Q_{4,i} + Q_{1,i-1} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n$$

及

$$b_i = Q_{5,i} + Q_{6,i} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

而  $\mathbf{c}$  的元素則為未知數  $c_1, c_2, \dots, c_n$ ，利用這些未知數，由  $\phi(x) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x)$  可構建出

Rayleigh-Ritz 近似解  $\phi$ 。

但這個方法在使用上須要計算  $6n$  個積分式的值，這些積分式的值可以用直接積分，或是複合辛普森法則這類數值積分法來計算。

但另一種做法是，用分段線性內插多項式來近似函數  $p$ 、 $q$  及  $f$ ，然後積分這些近似式。以積分  $Q_{1,i}$  為例。函數  $q$  的分段線性內插為

$$P_q(x) = \sum_{i=0}^{n+1} q(x_i) \phi_i(x)$$

其中  $\phi_1, \dots, \phi_n$  已定義於 (11.30) 式，且

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1}, & \text{若 } 0 \leq x \leq x_1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \text{及} \quad \phi_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_n}{1 - x_n}, & \text{若 } x_n \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因為積分區間為  $[x_i, x_{i+1}]$ ，分段多項式  $P_q(x)$  簡化為

$$P_q(x) = q(x_i)\phi_i(x) + q(x_{i+1})\phi_{i+1}(x)$$

這就是我們在 3.1 節探討過的一次內插多項式。由定理 3.3，若  $q \in C^2[x_i, x_{i+1}]$  則

$$|q(x) - P_q(x)| = O(h_i^2) \quad , \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

在  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ，對被積函數的近似值進行積分，可得  $Q_{1,i}$  的近似值

$$\begin{aligned} Q_{1,i} &= \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)(x - x_i)q(x) dx \\ &\approx \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)(x - x_i) \left[ \frac{q(x_i)(x_{i+1} - x)}{h_i} + \frac{q(x_{i+1})(x - x_i)}{h_i} \right] dx \\ &= \frac{h_i}{12} [q(x_i) + q(x_{i+1})] \end{aligned}$$

另外，若  $q \in C^2[x_i, x_{i+1}]$  則

$$\left| Q_{1,i} - \frac{h_i}{12} [q(x_i) + q(x_{i+1})] \right| = O(h_i^3)$$

用同樣的方法，可得其他積分式的近似值為

$$\begin{aligned} Q_{2,i} &\approx \frac{h_{i-1}}{12} [3q(x_i) + q(x_{i-1})] & Q_{3,i} &\approx \frac{h_i}{12} [3q(x_i) + q(x_{i+1})] \\ Q_{4,i} &\approx \frac{h_{i-1}}{2} [p(x_i) + p(x_{i-1})] & Q_{5,i} &\approx \frac{h_{i-1}}{6} [2f(x_i) + f(x_{i-1})] \end{aligned}$$

及

$$Q_{6,i} \approx \frac{h_i}{6} [2f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

算則 11.5 建構出三對角線線性方程組，並使用算則 6.7，Crout 因式分解法，求解此方程組。積分式  $Q_{1,i}, \dots, Q_{6,i}$  可用之前所介紹的任一種方法求得。

#### 算則 11.5 分段線性 Rayleigh-Ritz 法

利用分段線性函數

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x)$$

求邊界值問題

$$-\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = f(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 0$$

的近似解：

**INPUT** 整數  $n \geq 1$ ; 點  $x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1$ 。

**OUTPUT** 係數  $c_1, \dots, c_n$ 。

**Step 1** For  $i = 0, \dots, n$  set  $h_i = x_{i+1} - x_i$ .

**Step 2** For  $i = 1, \dots, n$  define the piecewise linear basis  $\phi_i$  by

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_{i-1}, \\ \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}}, & x_{i-1} < x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_i}, & x_i < x \leq x_{i+1}, \\ 0, & x_{i+1} < x \leq 1. \end{cases}$$

**Step 3** For each  $i = 1, 2, \dots, n-1$  compute  $Q_{1,i}, Q_{2,i}, Q_{3,i}, Q_{4,i}, Q_{5,i}, Q_{6,i}$ ;

Compute  $Q_{2,n}, Q_{3,n}, Q_{4,n}, Q_{4,n+1}, Q_{5,n}, Q_{6,n}$ .

**Step 4** For each  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , set  $\alpha_i = Q_{4,i} + Q_{4,i+1} + Q_{2,i} + Q_{3,i}$ ;

$$\beta_i = Q_{1,i} - Q_{4,i+1};$$

$$b_i = Q_{5,i} + Q_{6,i}.$$

**Step 5** Set  $\alpha_n = Q_{4,n} + Q_{4,n+1} + Q_{2,n} + Q_{3,n}$ ;

$$b_n = Q_{5,n} + Q_{6,n}.$$

**Step 6** Set  $a_1 = \alpha_1$ ; (Steps 6-10 用算則 6.7 解對稱三對角線性方程組)

$$\zeta_1 = \beta_1 / \alpha_1;$$

$$z_1 = b_1 / a_1.$$

**Step 7** For  $i = 2, \dots, n-1$  set  $a_i = \alpha_i - \beta_{i-1} \zeta_{i-1}$ ;

$$\zeta_i = \beta_i / a_i;$$

$$z_i = (b_i - \beta_{i-1} \zeta_{i-1}) / a_i$$

**Step 8** Set  $a_n = \alpha_n - \beta_{n-1} \zeta_{n-1}$ ;

$$z_n = (b_n - \beta_{n-1} \zeta_{n-1}) / a_n.$$

**Step 9** Set  $c_n = z_n$ ;

OUTPUT ( $c_n$ ).

**Step 10** For  $i = n-1, \dots, 1$  set  $c_i = z_i - \zeta_i c_{i+1}$ ;

OUTPUT ( $c_i$ ).

**Step 11** STOP. (程式完成) ■

以下說明題使用算則 11.5。因為這個例題很簡單，所以在 Steps 3、4 及 5 中，我們直接積分以獲得積分式的值。

**說明題** 求解邊界值問題

$$-y'' + \pi^2 y = 2\pi^2 \sin(\pi x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \quad , \quad y(0) = y(1) = 0$$

令  $h_i = h = 0.1$ ，所以  $x_i = 0.1i$ ， $i = 0, 1, \dots, 9$ 。積分式為

$$\begin{aligned}
Q_{1,i} &= 100 \int_{0.1i}^{0.1i+0.1} (0.1i + 0.1 - x)(x - 0.1i)\pi^2 dx = \frac{\pi^2}{60} \\
Q_{2,i} &= 100 \int_{0.1i-0.1}^{0.1i} (x - 0.1i + 0.1)^2 \pi^2 dx = \frac{\pi^2}{30} \\
Q_{3,i} &= 100 \int_{0.1i}^{0.1i+0.1} (0.1i + 0.1 - x)^2 \pi^2 dx = \frac{\pi^2}{30} \\
Q_{4,i} &= 100 \int_{0.1i-0.1}^{0.1i} dx = 10 \\
Q_{5,i} &= 10 \int_{0.1i-0.1}^{0.1i} (x - 0.1i + 0.1)2\pi^2 \sin \pi x dx \\
&= -2\pi \cos 0.1\pi i + 20[\sin(0.1\pi i) - \sin((0.1i - 0.1)\pi)]
\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
Q_{6,i} &= 10 \int_{0.1i}^{0.1i+0.1} (0.1i + 0.1 - x)2\pi^2 \sin \pi x dx \\
&= 2\pi \cos 0.1\pi i - 20[\sin((0.1i + 0.1)\pi) - \sin(0.1\pi i)]
\end{aligned}$$

在線性方程組  $\mathbf{Ac} = \mathbf{b}$  中，

$$\begin{aligned}
a_{i,i} &= 20 + \frac{\pi^2}{15}, \quad i = 1, 2, \dots, 9 \\
a_{i,i+1} &= -10 + \frac{\pi^2}{60}, \quad i = 1, 2, \dots, 8 \\
a_{i,i-1} &= -10 + \frac{\pi^2}{60}, \quad i = 2, 3, \dots, 9
\end{aligned}$$

及

$$b_i = 40 \sin(0.1\pi i)[1 - \cos 0.1\pi], \quad i = 1, 2, \dots, 9$$

三對角線線性方程組的解為

$$\begin{aligned}
c_9 &= 0.3102866742, \quad c_8 = 0.5902003271, \quad c_7 = 0.8123410598 \\
c_6 &= 0.9549641893, \quad c_5 = 1.004108771, \quad c_4 = 0.9549641893 \\
c_3 &= 0.8123410598, \quad c_2 = 0.5902003271, \quad c_1 = 0.3102866742
\end{aligned}$$

分段線性近似為

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^9 c_i \phi_i(x)$$

而此邊界值問題之確解為  $y(x) = \sin \pi x$ 。表 11.7 列出了  $i = 1, \dots, 9$ ，在每個  $x_i$  處的近似值與其誤差。 ■

事實上我們可以證明，由分段線性基底函數所得的三對角線矩陣  $A$  是正定 (positive

表 11.7

| $i$ | $x_i$ | $\phi(x_i)$  | $y(x_i)$     | $ \phi(x_i) - y(x_i) $ |
|-----|-------|--------------|--------------|------------------------|
| 1   | 0.1   | 0.3102866742 | 0.3090169943 | 0.00127                |
| 2   | 0.2   | 0.5902003271 | 0.5877852522 | 0.00241                |
| 3   | 0.3   | 0.8123410598 | 0.8090169943 | 0.00332                |
| 4   | 0.4   | 0.9549641896 | 0.9510565162 | 0.00390                |
| 5   | 0.5   | 1.0041087710 | 1.0000000000 | 0.00411                |
| 6   | 0.6   | 0.9549641893 | 0.9510565162 | 0.00390                |
| 7   | 0.7   | 0.8123410598 | 0.8090169943 | 0.00332                |
| 8   | 0.8   | 0.5902003271 | 0.5877852522 | 0.00241                |
| 9   | 0.9   | 0.3102866742 | 0.3090169943 | 0.00127                |

definite) 矩陣 (見習題 12)，所以由定理 6.26 可知，此線性方程組對於捨入誤差為穩定。在本節一開始所述的假設條件下，我們有

$$|\phi(x) - y(x)| = O(h^2), \quad x \text{ 在 } [0, 1] \text{ 之間。}$$

以上結果之證明可參見 [Schul], pp. 103-104。

## ■ B-雲形線基底

使用分段線性的基底函數所得的 (11.22) 及 (11.23) 式的近似解在  $[0, 1]$  中是連續的但不可微。要獲得屬於  $C_0^2[0, 1]$  的近似解，必須使用更複雜的基底函數。此種基底函數類似於 3.5 節介紹的三次內插雲形線。

回憶一下，對函數  $f$ ，使用  $x_0, x_1, x_2, x_3$  及  $x_4$  5 個節點的三次內插雲形線  $S$  定義為：

- (a) 對  $j = 0, 1, 2, 3$ ， $S(x)$  為  $[x_j, x_{j+1}]$  間的三次多項式，記做  $S_j(x)$ ；
- (b) 對  $j = 0, 1, 2, 3$ ， $S_j(x_j) = f(x_j)$  且  $S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$ ；
- (c) 對  $j = 0, 1, 2$ ， $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$  (來自 (b))；
- (d) 對  $j = 0, 1, 2$ ， $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ ；
- (e) 對  $j = 0, 1, 2$ ， $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ ；
- (f) 滿足下列邊界條件之一：
  - (i)  $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$  (自然 (或自由) 邊界)；
  - (ii)  $S'(x_0) = f'(x_0)$  及  $S'(x_n) = f'(x_n)$  (固定邊界)。

為了要有唯一解，(a) 中常數的數目，16，必須等於 (b) 到 (f) 所有條件的總數，所以內插三次雲形線只能選取 (f) 中的一種邊界條件。

我們要用來做為基底函數的三次雲形線叫做 **B 雲形線** (B-splines)，或叫做鐘形雲形

線 (*bell-shaped splines*)。它們與內插雲形線不同的是，它們同時滿足 (f) 中的兩組邊界條件。所以必須在 (b) 到 (e) 中挑出 2 個條件不用。因為我們希望此雲形線在  $[x_0, x_4]$  間為二階連續，所以我們由內插條件中刪去兩個，也就是將 (b) 修改為

b. 對  $j = 0, 2, 4$ ,  $S(x_j) = f(x_j)$ 。

舉例來說，對定義如下，並顯示於圖 11.5 中的基本 B 雲形線，圖中使用等間隔節點  $x_0 = -2$ 、 $x_1 = -1$ 、 $x_2 = 0$ 、 $x_3 = 1$  及  $x_4 = 2$ 。它滿足內插條件

b.  $S(x_0) = 0$ ,  $S(x_2) = 1$ ,  $S(x_4) = 0$ ;

並同時滿足兩組條件

(i)  $S''(x_0) = S''(x_4) = 0$  及 (ii)  $S'(x_0) = S'(x_4) = 0$

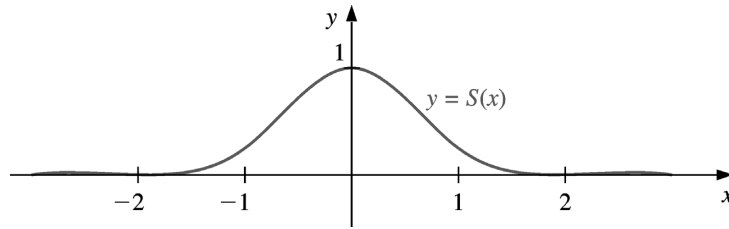


圖 11.5

因此， $S \in C_0^2(-\infty, \infty)$ ，且

$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \leq -2, \\ \frac{1}{4}(2+x)^3, & \text{若 } -2 \leq x \leq -1, \\ \frac{1}{4}[(2+x)^3 - 4(1+x)^3], & \text{若 } -1 < x \leq 0, \\ \frac{1}{4}[(2-x)^3 - 4(1-x)^3], & \text{若 } 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{4}(2-x)^3, & \text{若 } 1 < x \leq 2, \\ 0, & \text{若 } 2 < x. \end{cases} \quad (11.31)$$

我們現在用此基本 B 雲形線以建立屬於  $C_0^2[0, 1]$  的基底函數  $\phi_i$ 。我們首先選取正整數  $n$  並定義  $h = 1/(n+1)$  以劃分區間  $[0, 1]$ 。這樣可得等間隔分布之節點  $x_i = ih$ ， $i = 0, 1, \dots, n+1$ 。然後我們定義基底函數  $\{\phi_i\}_{i=0}^{n+1}$  為

$$\phi_i(x) = \begin{cases} S\left(\frac{x}{h}\right) - 4S\left(\frac{x+h}{h}\right), & \text{若 } i = 0, \\ S\left(\frac{x-h}{h}\right) - S\left(\frac{x+h}{h}\right), & \text{若 } i = 1, \\ S\left(\frac{x-ih}{h}\right), & \text{若 } 2 \leq i \leq n-1, \\ S\left(\frac{x-nh}{h}\right) - S\left(\frac{x-(n+2)h}{h}\right), & \text{若 } i = n, \\ S\left(\frac{x-(n+1)h}{h}\right) - 4S\left(\frac{x-(n+2)h}{h}\right), & \text{若 } i = n+1. \end{cases}$$

不難證明  $\{\phi_i\}_{i=0}^{n+1}$  是三次雲形線的線性獨立集合，並滿足  $\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0$ ， $i = 0, 1, \dots, n, n+1$  (見習題 11)。圖 11.6 顯示了  $2 \leq i \leq n-1$  時  $\phi_i$  的圖形，另外  $\phi_0$ 、 $\phi_1$ 、 $\phi_n$  及  $\phi_{n+1}$  的圖形顯示於圖 11.7。

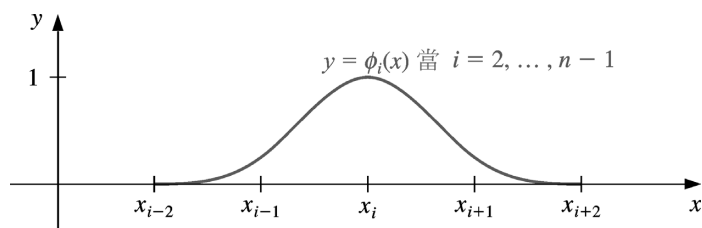


圖 11.6

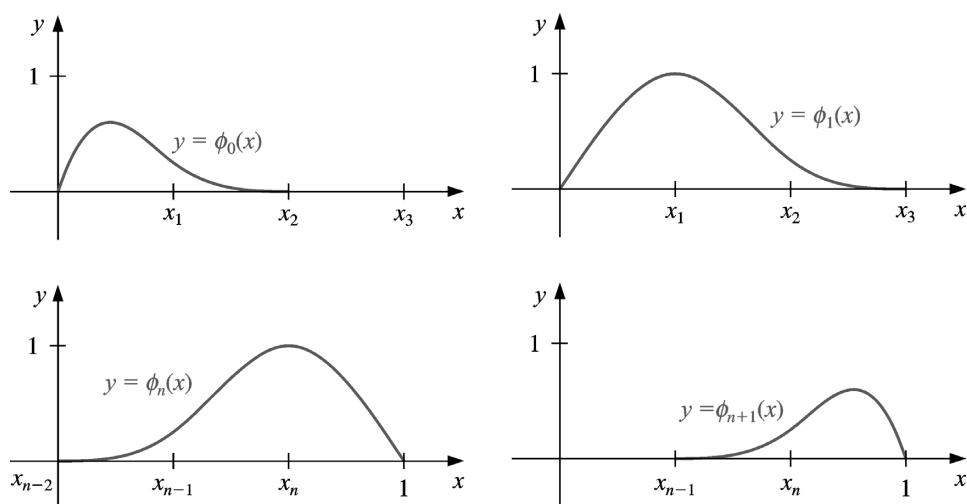


圖 11.7

因為  $\phi_i(x)$  與  $\phi'_i(x)$  只有在  $x \in [x_{i-2}, x_{i+2}]$  時不為 0，所以 Rayleigh-Ritz 法用到的矩陣是帶寬最大為 7 的帶狀矩陣：

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & 0 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \cdots & 0 \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \end{bmatrix} \quad (11.32)$$

其中

$$a_{ij} = \int_0^1 \{p(x)\phi_i'(x)\phi_j'(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x)\} dx$$

$i, j = 0, 1, \dots, n+1$ 。向量  $\mathbf{b}$  的分量為

$$b_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx$$

矩陣  $A$  為正定 (見習題 13)，所以線性方程組  $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$  可以用 Cholesky 算則 6.6 或高斯消去法求解。算則 11.6 則列出了如何建構三次雲形線  $\phi(x)$ ，以利用 Rayleigh-Ritz 法求解 (11.21) 及 (11.22) 式的邊界值問題。

**算則 11.6** 三次雲形線 Rayleigh-Ritz 法 (cubic Spline Rayleigh-Ritz)

利用三次雲形線  $\phi(x) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i \phi_i(x)$  之和，求邊界值問題

$$-\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = f(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \quad , \quad \text{給定 } y(0) = 0 \text{ 及 } y(1) = 0$$

的近似解。

**INPUT** 整數  $n \geq 1$ 。

**OUTPUT** 係數  $c_0, \dots, c_{n+1}$ 。

**Step 1** Set  $h = 1/(n+1)$ .

**Step 2** For  $i = 0, \dots, n+1$  set  $x_i = ih$ .  
Set  $x_{-2} = x_{-1} = 0$ ;  $x_{n+2} = x_{n+3} = 1$ .

**Step 3** Define the function  $S$  by

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{1}{4}(2+x)^3, & -2 < x \leq -1, \\ \frac{1}{4}[(2+x)^3 - 4(1+x)^3], & -1 < x \leq 0, \\ \frac{1}{4}[(2-x)^3 - 4(1-x)^3], & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{4}(2-x)^3, & 1 < x \leq 2, \\ 0, & 2 < x \end{cases}$$

**Step 4** Define the cubic spline basis  $\{\phi_i\}_{i=0}^{n+1}$  by

$$\phi_0(x) = S\left(\frac{x}{h}\right) - 4S\left(\frac{x+h}{h}\right),$$

$$\phi_1(x) = S\left(\frac{x-x_1}{h}\right) - S\left(\frac{x+h}{h}\right),$$

$$\phi_i(x) = S\left(\frac{x-x_i}{h}\right), \text{ for } i = 2, \dots, n-1,$$

$$\phi_n(x) = S\left(\frac{x-x_n}{h}\right) - S\left(\frac{x-(n+2)h}{h}\right),$$

$$\phi_{n+1}(x) = S\left(\frac{x - x_{n+1}}{h}\right) - 4S\left(\frac{x - (n+2)h}{h}\right).$$

**Step 5** For  $i = 0, \dots, n+1$  do Steps 6–9.

(註：可以用數值積分法求 Steps 6 和 9 中積分式的值)

**Step 6** For  $j = i, i+1, \dots, \min\{i+3, n+1\}$

set  $L = \max\{x_{j-2}, 0\}$ ;

$U = \min\{x_{i+2}, 1\}$ ;

$$a_{ij} = \int_L^U \left[ p(x)\phi'_i(x)\phi'_j(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x) \right] dx;$$

if  $i \neq j$ , then set  $a_{ji} = a_{ij}$ . (因為  $A$  為對稱)

**Step 7** If  $i \geq 4$  then for  $j = 0, \dots, i-4$  set  $a_{ij} = 0$ .

**Step 8** If  $i \leq n-3$  then for  $j = i+4, \dots, n+1$  set  $a_{ij} = 0$ .

**Step 9** Set  $L = \max\{x_{i-2}, 0\}$ ;

$U = \min\{x_{i+2}, 1\}$ ;

$$b_i = \int_L^U f(x)\phi_i(x) dx.$$

**Step 10** Solve the linear system  $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ , where  $A = (a_{ij})$ ,  $\mathbf{b} = (b_0, \dots, b_{n+1})^t$  and  $\mathbf{c} = (c_0, \dots, c_{n+1})^t$ .

**Step 11** For  $i = 0, \dots, n+1$

OUTPUT  $(c_i)$ .

**Step 12** STOP. (程式完成)

### 說明題 求邊界值問題

$$-y'' + \pi^2 y = 2\pi^2 \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0$$

的近似解。在算則 11.5 後面的說明題中我們令  $h = 0.1$ ，並使用分段線性基底函數求得其近似解。在此我們用同樣的節點，以 B 雲形線求得之結果列於表 11.8。

表 11.8

| $i$ | $c_i$                       | $x_i$ | $\phi(x_i)$ | $y(x_i)$   | $ y(x_i) - \phi(x_i) $ |
|-----|-----------------------------|-------|-------------|------------|------------------------|
| 0   | $0.50964361 \times 10^{-5}$ | 0     | 0.00000000  | 0.00000000 | 0.00000000             |
| 1   | 0.20942608                  | 0.1   | 0.30901644  | 0.30901699 | 0.00000055             |
| 2   | 0.39835678                  | 0.2   | 0.58778549  | 0.58778525 | 0.00000024             |
| 3   | 0.54828946                  | 0.3   | 0.80901687  | 0.80901699 | 0.00000012             |
| 4   | 0.64455358                  | 0.4   | 0.95105667  | 0.95105652 | 0.00000015             |
| 5   | 0.67772340                  | 0.5   | 1.00000002  | 1.00000000 | 0.00000020             |
| 6   | 0.64455370                  | 0.6   | 0.95105713  | 0.95105652 | 0.00000061             |
| 7   | 0.54828951                  | 0.7   | 0.80901773  | 0.80901699 | 0.00000074             |
| 8   | 0.39835730                  | 0.8   | 0.58778690  | 0.58778525 | 0.00000165             |
| 9   | 0.20942593                  | 0.9   | 0.30901810  | 0.30901699 | 0.00000111             |
| 10  | $0.74931285 \times 10^{-5}$ | 1.0   | 0.00000000  | 0.00000000 | 0.00000000             |

我們建議，Steps 6 及 9 的積分可分成 2 步執行。首先，用 3.5 節所介紹的方法建立函數  $p$ 、 $q$  及  $f$  的三次雲形線內插多項式。然後用三次雲形線或其導數的乘積，以近似原被積函數。這樣被積函數就成為分段多項式，可以在每一個次區段做真實積分，然後再加總。這樣可準確的獲得原積分式的近似值。

本節開始處所列之前提假設足以確保

$$\left\{ \int_0^1 |y(x) - \phi(x)|^2 dx \right\}^{1/2} = O(h^4), \quad \text{若 } 0 \leq x \leq 1.$$

此結果之證明可參考 [Schul], pp. 107-108。

B 雲形線也可使用非均勻分布的節點，但較為複雜。在 [Schul], p. 73 中對此方法有說明。另一種常用的基底為分段三次 Hermite 多項式。同樣的，在 [Schul], pp. 24ff 有很清楚的說明。

另一種受到相當重視的方法為 Galerkin 法，或稱「弱式 (weak form)」法。對我們所考慮的邊界值問題

$$-\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

並滿足本節開始處所列的假設條件，Galerkin 法及 Rayleigh-Ritz 法均取決於 (11.29) 式。但這並非普遍成立。有關這 2 種方法之異同，及 Galerkin 法的廣泛應用，可參見 [Schul] 及 [SF]。

另一種廣被用於求解邊界值問題的方法是**共位法** (method of collocation)。

此種方法首先要選取一個基底函數的集合  $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ ，及  $[0, 1]$  間數的集合  $\{x_i, \dots, x_n\}$ ，並要求近似值

$$\sum_{i=1}^N c_i \phi_i(x)$$

在每個  $x_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ ，滿足原微分方程。如果我們同時要求  $\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0$ ,  $1 \leq i \leq N$ ，則可自動滿足邊界條件。在文獻中，對於基底函數  $\{\phi_i\}$  及節點  $\{x_j\}$  的選擇有許多探討。一種較常用的方式是令基底函數  $\phi_i$  為相對於  $[0, 1]$  間區段的雲形線函數，並使用高斯積分法的節點或其他正交多項式的根，轉換至適當之區間。

在 [Ru] 中比較了各種共位法與有限差分法。其結論為，使用較高階雲形線的共位法，其結果相當於有限差分法加外推法。關於共位法另外可參考 [DebS] 及 [LR]。

## 習題組 11.5 完整習題請見隨書光碟

### 1. 使用分段線性算則求邊界值問題

$$y'' + \frac{\pi^2}{4}y = \frac{\pi^2}{16} \cos \frac{\pi}{4}x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0$$

的近似解，給定  $x_0 = 0$ 、 $x_1 = 0.3$ 、 $x_2 = 0.7$  及  $x_3 = 1$ 。將結果與確解  $y(x) = -\frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{6} \sin \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{4}x$  做比較。

### 2. 使用分段線性算則求邊界值問題

$$-\frac{d}{dx}(xy') + 4y = 4x^2 - 8x + 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0$$

的近似解，給定  $x_0 = 0$ 、 $x_1 = 0.4$ 、 $x_2 = 0.8$  及  $x_3 = 1$ 。將結果與確解  $y(x) = x^2 - x$  做比較。

### 3. 使用分段線性算則求下列各邊界值問題的近似解，並將結果與確解做比較。

a.  $-x^2y'' - 2xy' + 2y = -4x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ ; 使用  $h = 0.1$ ; 確解為  $y(x) = x^2 - x$ 。

b.  $-\frac{d}{dx}(e^x y') + e^x y = x + (2-x)e^x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ ; 使用  $h = 0.1$ ; 確解為  $y(x) = (x-1)(e^{-x} - 1)$ 。

c.  $-\frac{d}{dx}(e^{-x} y') + e^{-x} y = (x-1) - (x+1)e^{-(x-1)}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ ; 使用  $h = 0.05$ ; 確解為  $y(x) = x(e^x - e)$ 。

d.  $-(x+1)y'' - y' + (x+2)y = [2 - (x+1)^2]e \ln 2 - 2e^x$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ; 使用  $h = 0.05$ ; 確解為  $y(x) = e^x \ln(x+1) - (e \ln 2)x$ 。

### 4. 用三次雲形線算則及 $n=3$ ，求下列各邊界值問題近似解，並將結果與習題 1 及 2 所列的確解做比較。

a.  $y'' + \frac{\pi^2}{4}y = \frac{\pi^2}{16} \cos \frac{\pi}{4}x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$

b.  $-\frac{d}{dx}(xy') + 4y = 4x^2 - 8x + 1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$

### 5. 用三次雲形線算則重做習題 3。

### 6. 證明，邊界值問題

$$-\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta,$$

可以經由變數代換

$$z = y - \beta x - (1-x)\alpha$$

轉換成

$$-\frac{d}{dx}(p(x)z') + q(x)z = F(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 0$$

的型式。

### 7. 利用習題 6 和分段線性算則及 $n=9$ ，求邊界值問題

$$-y'' + y = x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1 + e^{-1}$$

的近似解。

8. 用三次雲形線算則重做習題 7。

9. 證明，邊界值問題

$$-\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y = f(x) \quad , \quad a \leq x \leq b \quad , \quad y(a) = \alpha \quad , \quad y(b) = \beta \quad ,$$

可以用類似於習題 6 的方法轉換成

$$-\frac{d}{dw}(p(w)z') + q(w)z = F(w) \quad , \quad 0 \leq w \leq 1 \quad , \quad z(0) = 0 \quad , \quad z(1) = 0$$

的型式。

10. 證明分段線性基底函數  $\{\phi_i\}_{i=1}^n$  為線性獨立。

11. 證明三次雲形線基底函數  $\{\phi_i\}_{i=0}^{n+1}$  為線性獨立。

12. 證明，使用分段線性基底函數所得的矩陣為正定。

13. 證明，使用三次雲形線基底函數所得的矩陣為正定。



## 11.6 檢視方法與軟體

在本章中我們討論了求邊界值問題近似解的方法。對於線性邊界值問題

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

我們探討了以射擊法與有限差分法求近似解。射擊法使用解初值問題的方法，求解

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x) \quad , \quad a \leq x \leq b \quad , \quad y(a) = \alpha \quad , \quad y'(a) = 0$$

及

$$y'' = p(x)y' + q(x)y \quad , \quad a \leq x \leq b \quad , \quad y(a) = 0 \quad , \quad y'(a) = 1$$

將它們的解做加權平均，可得線性邊界值問題的解，不過在某些特例中會有捨入誤差的問題。

在有限差分法中，我們用差分式取代  $y''$  與  $y'$ ，然後求解線性方程組。雖然所得的近似值可能不如射擊法準確，但對捨入誤差較不敏感。要提高準確度，可使用高階差分法或用外推法。

對於非線性邊界值問題

$$y'' = f(x, y, y') \quad , \quad a \leq x \leq b \quad , \quad y(a) = \alpha \quad , \quad y(b) = \beta$$

我們也介紹了 2 種方法。非線性射擊法須要用一個初始估計值  $t$  解初值問題

$$y'' = f(x, y, y') \quad , \quad a \leq x \leq b \quad , \quad y(a) = \alpha \quad , \quad y'(a) = t$$

我們用牛頓法求  $y(b, t) = \beta$  的近似解，以改進  $t$  的估計值。此方法的每次迭代，必須解兩個初值問題。其準確度取決於解初值問題的準確度。

用於非線性方程式的有限差分法，則是用差分式取代  $y''$  與  $y'$ ，可得到非線性方程組。然後用牛頓法求解此方程組。可以用高階差分公式或外推法以提高其準確度。對捨入誤差，射擊法比有限差分法敏感。

我們介紹了以 Rayleigh-Ritz-Galerkin 法求邊界值問題

$$-\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0$$

的近似解。可以使用分段線性近似或三次雲形線近似。

大多數二階邊界值問題，可以擴展為具有

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \alpha \quad \text{及} \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \beta$$

型式邊界條件的問題，其中  $|\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0$  且  $|\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0$ ，但某些方法會變得非常複雜。對此類問題有興趣的讀者，最好是參考邊界值問題的專書，例如 [Keller, H]。

在 IMSL 程式庫中有多種求解邊界值問題的副程式，包括射擊法與有限差分法。其射擊法使用 Runge-Kutta- Verner 法解相對的初值問題。

在 NAG 程式庫中同樣也有很多求解邊界值問題的副程式。包括了，用 Runge-Kutta-Merson 法解初值問題再加上牛頓法、用有限差分法配合牛頓法解非線性方程組、以及使用共位法的線性有限差分法。

在 netlib 程式庫的 ODE 套件中，也有用於線性及非線性 2 點邊界值問題的副程式。這些副程式都使用多重射擊法。

在 Keller [Keller, H] 及 Baily、Shampine 和 Waltman [BSW] 的書中，對於求解兩點邊界值問題的一般性問題有更深入的說明。Roberts 和 Shipman [RS] 專注於兩點邊界值問題的射擊法，Pryce [Pr] 則專注於 Sturm-Liouville 問題。Ascher、Mattheij 和 Russell [AMR] 的書則對於多重射擊法與平行射擊法有完整的說明。