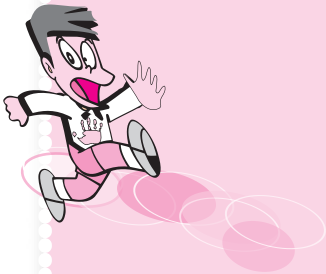
第 19 章

無窮級數



⇦ 本章摘要 ⇨

1. 無窮數列的極限定理：若 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ 且 $\lim_{n\to\infty} b_n = B$，其中 A、B 均為實數，則

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n = cA,\ c \text{ 為常數}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = A - B$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_nb_n) = AB$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}\ (B \neq 0).$$

2. 無窮數列的夾擠定理：設 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 與 $\{c_n\}$ 均為無窮數列，且對所有正整數 $n \geq n_0$ (n_0 為某固定正整數) 恆有 $a_n \leq b_n \leq c_n$. 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$，則 $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

3. (1) 對數列 $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots$，若存在一常數 M 使得對所有 n 恆有 $a_n \leq M$，則數列收斂到 L，其中 $L \leq M$.

(2) 對數列 $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots$，若存在一常數 M 使得對所有 n 恆有 $a_n \geq M$，則數列收斂到 L，其中 $L \geq M$.

4. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和數列 $\{S_n\}$ 收斂到 S，即，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = S$$

則稱級數收斂且其和為 S. 若 $\{S_n\}$ 發散，則級數發散，發散的級數沒有和.

5. 若 $\sum a_n$ 收斂，則 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

6. 發散檢驗法：若 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$，則 $\sum a_n$ 發散.

7. 積分檢驗法：已知 $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ 為正項級數，令 $f(n) = a_n$，$n = N$ (N 為某正整數)，$N+1$，$N+2$，$\cdots$. 若 f 為定義在 $[N, \infty)$ 上之連續且正值的遞減函數，則無窮級數

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ 收斂} \Leftrightarrow \text{瑕積分} \int_N^{\infty} f(x)\,dx \text{ 收斂.}$$

8. p-級數檢驗法：若 $p>1$，則 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 收斂；若 $p \le 1$，則 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 發散.

9. 比值檢驗法：設 $\sum a_n$ 為正項級數且令

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

(1) 若 $L<1$，則級數收斂.

(2) 若 $L>1$，或若 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\infty$，則級數發散.

(3) 若 $L=1$，則無法判斷斂散性.

10. 交錯級數檢驗法：

若對每一正整數 n，$a_n \ge a_{n+1} > 0$，且 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，則 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收斂.

11. (1) 若 $\sum |a_n|$ 收斂，則級數 $\sum a_n$ 稱為**絕對收斂**.

(2) 若 $\sum |a_n|$ 發散且 $\sum a_n$ 收斂，則級數 $\sum a_n$ 稱為**條件收斂**.

12. 比值檢驗法：設 $\sum a_n$ 為各項均不為零的無窮級數.

(1) 當 $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$ 時，$\sum a_n$ 絕對收斂.

(2) 當 $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$，或 $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$ 時，$\sum a_n$ 發散.

(3) 當 $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ 時，無法判斷斂散性.

13. 若函數 f 可寫為 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$，$x \in (a-r, a+r)$ (r 為收斂半徑)，則其係數為

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

且 $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^3+\cdots$$

上式右邊級數稱為 $f(x)$ 在 $x=a$ 處的**泰勒級數**.

14. 若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

$$=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(0)}{2!}x^3+\cdots,$$

上式右邊級數稱為 $f(x)$ 的**麥克勞林級數**.

§ 19-1　無窮數列

無窮級數的理論是建立在無窮數列上，所以，我們先討論無窮數列的觀念，再來討論無窮級數.

定義 19-1-1

無窮數列 (infinite sequence of numbers) 是一個函數，其定義域為所有大於或等於某正整數 n_0 的正整數所成的集合.

通常，n_0 取為 1，因而無窮數列的定義域為所有正整數的集合，即 $\mathbb{N}$. 然而，有時候，為了使數列有定義，其定義域不一定從 1 開始.

設 f 為一無窮數列，對每一正整數 n，恰有一實數 $f(n)$ 與其對應.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & \cdots, & & n & , & \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ f(1) & , & f(2) & , & f(3) & , & f(4) & , & \cdots, & & f(n) & , & \cdots \end{array}$$

若令 $a_n=f(n)$，則上式可寫成

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ \cdots, \ a_n, \ \cdots$$

記為 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$，其中 a_1 稱為無窮數列的**首項** (first term)，a_2 稱為**第二項** (second term)，a_n 稱為**第 n 項** (nth term). 有時候，我們將該數列表成 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 或 $\{a_n\}$. 例如，$\{3^n\}$ 表示第 n 項為 $a_n=3^n$ 的數列，由定義 19-1-1 知，數列 $\{3^n\}$ 為對每一正整數 n 滿足 $f(n)=3^n$ 的函數 f.

因數列是函數，故我們可以作出它的圖形，方法有兩種：一者是在數線上描出數 a_n 的位置，另一者是在坐標平面上描出點 (n, a_n) 的位置. 例如，數列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 的圖形如圖 19-1-1 所示.

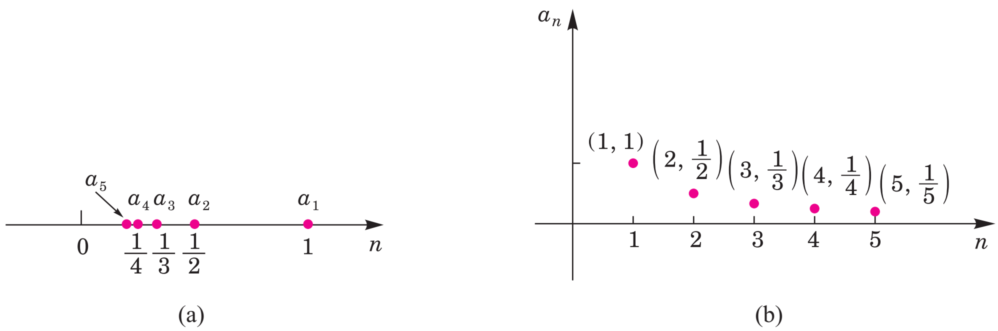


圖 19-1-1

定義 19-1-2 直觀的定義

給予數列 $\{a_n\}$，L 為一實數，當 n 充分大時，數 a_n 任意地靠近 L，則稱 L 為數列 $\{a_n\}$ 的**極限** (limit)，以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ 表示，或記為：當 $n \to \infty$ 時，$a_n \to L$.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ 成立，則稱數列 $\{a_n\}$ 收斂到 L. 倘若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在，則稱此數列 $\{a_n\}$ 無極限，或稱 $\{a_n\}$ 發散.

定理 19-1-1 唯一性

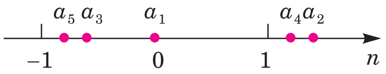
若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = M$，則 $L = M$.

例如，$a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$，

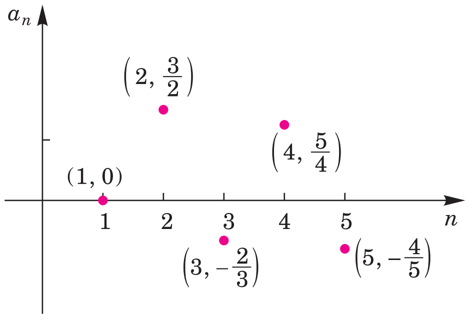
而

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 1, & \text{當 } n \text{ 為正偶數} \\ -1, & \text{當 } n \text{ 為正奇數} \end{cases}$$

圖形如圖 19-1-2 所示. 因 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 未能趨近某定數 L，故 $\{a_n\}$ 發散.



(a)



(b)

圖 19-1-2

若選取的 n 足夠大時，a_n 能夠隨心所欲的變大，則數列 $\{a_n\}$ 沒有極限，此時可記為 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$. 例如，數列 $\{n^2+n\}$ 為發散數列，因為 $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2+n)=\infty$.

定理 19-1-2

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$ (若 $|r|<1$).

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} |r^n|=\infty$ (若 $|r|>1$).

有關無窮數列的極限定理與函數在無限大處的極限定理相類似，故下面的定理只敘述而不予以證明.

定理 19-1-3

令 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 均為收斂數列. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=B$，則

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} k\ a_n=k \lim\limits_{n\to\infty} a_n=kA$，$k$ 為常數

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty} b_n=A\pm B$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n\, b_n)=(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)=AB$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}=\dfrac{A}{B}$, $B\neq 0$

例 1 數列 $\left\{\dfrac{n}{9n+4}\right\}$ 是收斂抑或發散?

解答 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{9n+4}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{9+\dfrac{4}{n}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} 9+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n}}$

$$=\frac{1}{9+0}=\frac{1}{9}$$

故數列收斂.

例 2 求數列 $\left\{\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \cdots\right\}$ 的極限.

解答 $a_1=2^{1/2}$, $a_2=2^{1/2}\cdot 2^{1/4}=2^{3/4}$, $a_3=2^{1/2}\cdot 2^{1/4}\cdot 2^{1/8}=2^{7/8}$, $\cdots$,

$a_n=2^{1-1/2^n}$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} 2^{1-1/2^n}=2$.

定理 19-1-4

設 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=L$, a_n 均在函數 f 的定義域內, 又 f 在 $x=L$ 為連續, 則

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f(L).$$

即,

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f(\lim_{n\to\infty} a_n).$$

例 3 試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\dfrac{n\pi+5}{2n+3}\right)$.

因 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,\ \infty)$ 為連續, 故

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{n\pi+5}{2n+3}\right)=\sin\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n\pi+5}{2n+3}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

定理 19-1-5 無窮數列的夾擠定理

設 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 與 $\{c_n\}$ 均為無窮數列，且對所有正整數 $n \geq n_0$ (n_0 為某固定正整數) 恆有 $a_n \leq b_n \leq c_n$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} c_n=L$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=L$.

例 4 求數列 $\left\{\dfrac{\sin^2 n}{2^n}\right\}$ 的極限.

解答 因對每一正整數 n 均有 $0<\sin^2 n<1$，故 $0<\dfrac{\sin^2 n}{2^n}<\dfrac{1}{2^n}$.

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$，可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin^2 n}{2^n}=0$，

故數列的極限為 0.

註：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n|=0$.

下面的定理對於求數列的極限非常有用.

定理 19-1-6

若 f 為定義在 $x \geq n_0$ 的函數，n_0 為某固定正整數，$a_n=f(n)$ $(n \geq n_0)$，

(1) 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=L$.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ (或 $-\infty$)，則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ (或 $-\infty$).

註：定理 19-1-6 的逆敘述不一定成立. 例如：$\lim\limits_{n\to\infty} \sin \pi n=0$.

定理 19-1-6 告訴我們能夠應用函數的極限定理 (當 $x \to \infty$) 求數列的極限. 最重要的是羅必達法則的應用，說明如下：

若 $a_n = f(n)$、$b_n = g(n)$，當 $x \to \infty$ 時，$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 為不定型 $\dfrac{\infty}{\infty}$，則

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$，倘若右端的極限存在.

例 5 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$.

解答 設 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$，$x \geq 1$，則

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

故 $$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

當我們在使用羅必達法則去求數列的極限時，往往視 n 為變數，而對 n 直接微分.

例 6 求下列各數列的極限.

(1) $\left\{ \dfrac{\ln n}{n^2} \right\}$　　(2) $\left\{ \dfrac{e^n}{n+3e^n} \right\}$

解答 (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n^2} = 0.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^n}{n+3e^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^n}{1+3e^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^n}{3e^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}.$

表 19-1-1 中的極限非常重要，在求數列的極限時常常會用到.

表 19-1-1

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\ n}{n}=0$	**2.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}x^{1/n}=1\ \ (x>0)$	**4.** $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0\ \ (\lvert x\rvert<1)$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n=e^x$	**6.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{n!}=0$

定義 19-1-3

若 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<\cdots$，則數列 $\{a_n\}$ 稱為遞增 (increasing).

若 $a_1\le a_2\le a_3\le\cdots\le a_n\le\cdots$，則數列 $\{a_n\}$ 稱為非遞減 (nondecreasing).

若 $a_1>a_2>a_3>\cdots>a_n>\cdots$，則數列 $\{a_n\}$ 稱為遞減 (decreasing).

若 $a_1\ge a_2\ge a_3\ge\cdots\ge a_n\ge\cdots$，則數列 $\{a_n\}$ 稱為非遞增 (nonincreasing).

遞增數列是非遞減，但反之未必；遞減數列是非遞增，但反之未必.

我們經常可能在寫出數列的最初幾項後，猜測數列是遞增、遞減、非遞增或非遞減. 然而，為了確定猜測是正確的，我們可利用表 19-1-2 所列情形加以判斷.

表 19-1-2

連續兩項的差	類　型
$a_n-a_{n+1}<0$	遞增
$a_n-a_{n+1}>0$	遞減
$a_n-a_{n+1}\le 0$	非遞減
$a_n-a_{n+1}\ge 0$	非遞增

例 7　試證：數列 $\left\{\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{4},\ \cdots,\ \dfrac{n}{n+1},\ \cdots\right\}$ 為遞增.

解答　令 $a_n=\dfrac{n}{n+1}$，則

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= -\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 0,\quad n \geq 1.$$

故證得數列為遞增.

另外，對各項均為正的數列，我們可利用表 19-1-3 判斷該數列是屬哪一種類型.

表 19-1-3

連續兩項的比	類　型
$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$	遞增
$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$	遞減
$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$	非遞減
$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$	非遞增

例 8　試證：數列 $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots\right\}$ 為遞增.

解答　令 $a_n = \frac{n}{n+1}$，則

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1,\quad n \geq 1.$$

故證得數列為遞增.

例 9　試證：數列 $\left\{\frac{e}{2!}, \frac{e^2}{3!}, \frac{e^3}{4!}, \cdots, \frac{e^n}{(n+1)!}, \cdots\right\}$ 為遞減.

解答　令 $a_n = \frac{e^n}{(n+1)!}$，則

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{e^{n+1}}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{e^n}=\frac{e}{n+2}<1,\ n\geq 1.$$

故證得數列為遞減.

最後，若 $f(n)=a_n$ 為數列的第 n 項，又對 $x\geq 1$，f 為可微分，則我們可利用表 19-1-4 確定該數列是屬哪一種類型.

表 19-1-4

f 的導數 $(x\geq 1)$	具有第 n 項 $a_n=f(n)$ 的數列的類型
$f'(x)>0$	遞增
$f'(x)<0$	遞減
$f'(x)\geq 0$	非遞減
$f'(x)\leq 0$	非遞增

例10　在例題 7 與 8 中，我們考慮連續兩項的差與比，已證得數列

$\left\{\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \cdots,\ \frac{n}{n+1},\ \cdots\right\}$ 為遞增. 另外，我們可以處理如下：

令 $f(x)=\frac{x}{x+1}$ (因 $a_n=f(n)$)，則

$$f'(x)=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}>0,\ x\geq 1$$

故證得數列為遞增.

定理 19-1-7

(1) 對數列 $a_1\leq a_2\leq a_3\leq\cdots\leq a_n\leq a_{n+1}\leq\cdots$，若存在一常數 M 使得對所有 n 恆有 $a_n\leq M$，則數列收斂到極限 L，其中 $L\leq M$.

(2) 對數列 $a_1\geq a_2\geq a_3\geq\cdots\geq a_n\geq a_{n+1}\geq\cdots$，若存在一常數 M 使得對所有 n 恆有 $a_n\geq M$，則數列收斂到極限 L，其中 $L\geq M$.

例11 如例題 7 所示，$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\cdots<\frac{n}{n+1}<\cdots$. 因 $a_n=\frac{n}{n+1}<1$，$n=1$，2，3，…，故令 $M=1$，可知數列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 必定收斂到極限 $L\,(=1)\leq M$. 確實就是這種情形，因為

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1.$$

因數列 $\{a_n\}$ 的極限是在 n 變大時描述相當後面之項的情形，故可以改變或甚至刪掉數列中的有限項，而不影響斂散性或極限值.

例12 試證：數列 $\left\{6,\ \frac{6^2}{2!},\ \frac{6^3}{3!},\ \cdots,\ \frac{6^n}{n!},\ \cdots\right\}$ 收斂.

解答 令 $a_n=\frac{6^n}{n!}$，則 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{6^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{6^n}=\frac{6}{n+1}$

對 $n=1$，2，3，4 而言，$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$，故 $a_{n+1}>a_n$. 於是，

$$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$$

對 $n=5$ 而言，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$，故 $a_5=a_6$.

對 $n\geq 6$ 而言，$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$，故 $a_6>a_7>a_8>a_9>\cdots$.

於是，若捨去所予數列的前五項 (不影響斂散性)，則所得數列為遞減，因而數列收斂到某極限，其中該極限大於或等於 0 (因數列的每一項均為正).

習　題 19-1

在 1～8 題中，求各數列的極限.

1. $\left\{\dfrac{n^2(n+4)}{2n^3+n^2+n-3}\right\}$

2. $\left\{\dfrac{n^2}{2n-1}-\dfrac{n^2}{2n+1}\right\}$

3. $\left\{\dfrac{100n}{n^{3/2}+1}\right\}$

4. $\left\{\sqrt[n]{3^n+5^n}\right\}$

5. $\left\{e^{-n}\ \ln n\right\}$

6. $\left\{n\sin\dfrac{\pi}{n}\right\}$

7. $\left\{\dfrac{n}{2^n}\right\}$

8. $\left\{\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n\right\}$

在 9～11 題中，求每一數列的第 n 項. 數列是收斂抑或發散？若收斂，則求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

9. $\left\{\left(1-\dfrac{1}{2}\right),\ \left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right),\ \left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right),\ \left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}\right),\ \cdots\right\}$

10. $\left\{(\sqrt{2}-\sqrt{3}),\ (\sqrt{3}-\sqrt{4}),\ (\sqrt{4}-\sqrt{5}),\ \cdots\right\}$

11. $\left\{1,\ \dfrac{2}{2^2-1^2},\ \dfrac{3}{3^2-2^2},\ \dfrac{4}{4^2-3^2},\ \cdots\right\}$

12. (1) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^2}+\dfrac{2^2}{n^2}+\dfrac{3^2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^2}\right)$.

13. 利用“若 $\{a_n\}$ 為收斂數列，則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.”的事實求下列各數列的極限.

(1) $\left\{\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \cdots\right\}$　(2) $\left\{\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \cdots\right\}$

14. (1) 試證：半徑為 r 的圓內接正 n 邊形的周長為 $P_n = 2rn\sin\dfrac{\pi}{n}$.

(2) 利用數列 $\{P_n\}$ 的極限求法，試證：當 n 增加時，其周長趨近圓周長.

§ 19-2 無窮級數

若 $\{a_n\}$ 為無窮數列，則形如

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

的式子稱為**無窮級數** (infinite series)，或簡稱為**級數**. 級數可用求和記號表之，寫成

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{或} \quad \sum a_n$$

而後一個和的求和變數為 n. 每一數 a_n，$n=1$，2，3，⋯，稱為級數的**項** (term)，a_n 稱為**通項** (general term). 現在我們考慮一級數的前 n 項部分和 S_n：

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

故

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{aligned}$$

等等，無窮數列

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots$$

稱為無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的**部分和數列** (sequence of partial sums).

這觀念引導出下面的定義.

定義 19-2-1

若存在一實數 S 使得無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和數列 $\{S_n\}$ 收斂，即，

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} a_i=S$$

則稱 S 為級數的**和** (sum)，而稱級數收斂. 若 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在，則稱級數**發散**，發散級數不能求和.

例 1 證明級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ 收斂，並求其和.

解答 因 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$,

故

$$\begin{aligned} S_n &=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

又 $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$，所以，級數收斂且其和為 1.

例 2 判斷級數 $1-1+1-1+1-1+\cdots$ 的斂散性.

解答 部分和為 $S_1=1$，$S_2=1-1=0$，$S_3=1-1+1=1$，$S_4=1-1+1-1=0$. 於是，部分和數列為 $\{1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \cdots\}$. 因這是發散數列，故所予級數發散.

例 3 試證：**調和級數** (harmonic series) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots$ 發散.

解答 部分和為：

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$$

$$S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= S_2 + \frac{1}{2} > \frac{3}{2}$$

$$S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)$$

$$= S_4 + \frac{1}{2} > \frac{4}{2}$$

$$S_{16} = S_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}$$

$$> S_8 + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right)$$

$$= S_8 + \frac{1}{2} > \frac{5}{2}$$

$$\vdots$$

$$S_{2^n} > \frac{n+1}{2}$$

可得 $\lim_{n\to\infty} S_{2^n} = \infty$，故證得級數發散.

定理 19-2-1

若 $\sum a_n$ 收斂，則 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

讀者應注意 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 為級數收斂的必要條件，但非充分條件. 也就是說，即使

若第 n 項趨近零，級數也未必收斂. 例如，調和級數為 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 發散，雖然 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

利用定理 19-2-1，很容易得到下面的結果.

定理 19-2-2　發散檢驗法 (divergence test)

若 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$，則級數 $\sum a_n$ 發散.

例如，級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$ 發散，因為 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}\neq 0$.

形如 $\sum_{n=0}^{\infty}ar^n=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots$ (此處 $a\neq 0$) 的級數稱為**幾何級數** (geometric series)，而 r 稱為**公比** (common ratio).

定理 19-2-3

已知幾何級數 $\sum_{n=0}^{\infty}ar^n$，其中 $a\neq 0$.

(1) 若 $|r|<1$，則級數收斂，其和為 $\frac{a}{1-r}$.

(2) 若 $|r|\geq 1$，則級數發散.

例 4　試證幾何級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots$ 收斂，並求其和.

解答　因 $\left|-\frac{1}{3}\right|<1$，故級數收斂，其和為 $S=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{4}$.

例 5 化循環小數 0.785785785⋯ 為有理數.

解答 我們可以寫成 $0.785785785\cdots=0.785+0.000785+0.000000785+\cdots$

故所予小數為幾何級數 (其中 $a=0.785$，$r=0.001$) 的和.

於是，$0.785785785\cdots=\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{0.785}{1-0.001}=\dfrac{0.785}{0.999}=\dfrac{785}{999}$.

例 6 求級數 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^{n-1}$ 的和.

解答 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^{2}\left(\frac{e}{\pi}\right)^{n-1}$，此為幾何級數，其中 $a=\left(\dfrac{e}{\pi}\right)^{2}$

$r=\dfrac{e}{\pi}$. 因 $|r|=\dfrac{e}{\pi}<1$，故級數收斂，其和為

$$S=\frac{\left(\frac{e}{\pi}\right)^{2}}{1-\frac{e}{\pi}}=\frac{e^{2}}{\pi(\pi-e)}.$$

定理 19-2-4

若 $\sum a_n$ 與 $\sum b_n$ 均為收斂級數，其和分別為 A 與 B，則

(1) $\sum(a_n+b_n)$ 收斂且和為 $A+B$.

(2) 若 c 為常數，則 $\sum ca_n$ 收斂且和為 cA.

(3) $\sum(a_n-b_n)$ 收斂且和為 $A-B$.

定理 19-2-5

若 $\sum a_n$ 發散且 $c\neq 0$，則 $\sum ca_n$ 也發散.

定理 19-2-6

若 $\sum a_n$ 收斂且 $\sum b_n$ 發散，則 $\sum (a_n+b_n)$ 發散.

例 7 試證 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2}{n(n+1)}$ 發散.

解答 $\dfrac{n+2}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n(n+1)}+\dfrac{1}{n}$

由例題 1 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ 收斂，又，調和級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 發散，

故可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{1}{n(n+1)}+\dfrac{1}{n}\right]$ 發散.

習 題 19-2

判斷 1～8 題中各級數的斂散性. 若收斂，則求其和.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{5}{n+2}-\dfrac{5}{n+3}\right)$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{(3n+1)(3n-2)}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{n+1}}{5^{n-1}}$

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+3\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\right]$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{9n^2+3n-2}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n}{n+1}$

8. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{3}{n-2}$

9. 化循環小數 0.782178217821⋯ 為有理數.

10. 已知一級數的前 n 項和為 $S_n=\dfrac{2n}{n+2}$，則 (1) 此級數是否收斂？(2) 求此級數.

11. 利用幾何級數證明：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n=\dfrac{1}{1+x}$ $(-1<x<1)$

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n=\dfrac{1}{1+x}$ $(-1<x<1)$

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x-3)^n=\dfrac{1}{4-x}$ $(2<x<4)$

(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}=\dfrac{1}{1+x^2}$ $(-1<x<1)$

12. 當 p 的值為多少時，級數 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln\ p)^n}$ 會收斂？

13. 某球從 8 公尺高處落下，它每一次撞擊地面後垂直向上反彈的高度為前一次高度的四分之三，若該球無限地反彈，求它經過的總距離.

§ 19-3　正項級數

若一級數的每一項均為正，則稱為**正項級數** (series with positive terms). 我們可藉由下面的定理檢驗其斂散性.

定理 19-3-1　積分檢驗法 (integral test)

已知 $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ 為正項級數，令 $f(n)=a_n$、$n=N$ (N 為某正整數)，$N+1$，$N+2$，…. 若 f 在區間 $[N, \infty)$ 為正值且連續的遞減函數，則 $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ 與 $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ 同時收斂抑或同時發散.

例 1　判斷級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的斂散性.

解答　函數 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $[1,\infty)$ 為正值且連續的遞減函數，因為 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ $(x \geq 1)$.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left(\ln x \Big|_1^t \right)$$

$$= \lim_{t\to\infty} (\ln t - \ln 1) = \infty$$

因積分發散，故可知級數發散.

例 2　判斷級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的斂散性.

解答　函數 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 在 $[1,\infty)$ 為正值且連續的遞減函數，因為 $f'(x)=-\frac{2}{x^3}<0$ $(x \geq 1)$.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^t \right)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{t} + 1 \right) = 1$$

因積分收斂，故可知級數收斂.

註：在例題 2 中，不可從 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$ 錯誤地推斷 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1$. (欲知這是錯誤的，我們將級數寫成：$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$；它的和顯然超過 1)

例 3　判斷級數 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ 的斂散性.

解答　函數 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在 $[3,\infty)$ 為正值且連續的遞減函數，因為 $f'(x)=$

$\frac{1-\ln x}{x^2}<0\ (x\geq 3).$

$$\begin{aligned}\int_3^{\infty}\frac{\ln x}{x}\,dx&=\lim_{t\to\infty}\int_3^{t}\frac{\ln x}{x}\,dx\\&=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\Big|_3^t\right]\\&=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left[(\ln t)^2-(\ln 3)^2\right]=\infty.\end{aligned}$$

故可知級數 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ 發散.

形如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$ （$p>0$）的級數稱為 ***p*-級數** (p-series). 當 $p=1$ 時，則為**調和級數**.

定理 19-3-2　p-級數檢驗法（p-series test)

(1) 若 $p>1$，則 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收斂.

(2) 若 $p\leq 1$，則 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 發散.

例 4　判斷下列各級數的斂散性.

(1) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$

(2) $2+\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{2}{\sqrt{n}}+\cdots$

解答　(1) 因級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 為 p-級數且 $p=2>1$，故收斂.

(2) 因級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 為 p-級數且 $p=\frac{1}{2}<1$，故發散，因而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$ 也發散.

定理 19-3-3　比較檢驗法 (comparison test)

假設 $\sum a_n$ 與 $\sum b_n$ 均為正項級數.

(1) 若 $\sum b_n$ 收斂且對每一正整數 n，$a_n \le b_n$，則 $\sum a_n$ 收斂.

(2) 若 $\sum b_n$ 發散且對每一正整數 n，$a_n \ge b_n$，則 $\sum a_n$ 發散.

例 5　判斷下列各級數的斂散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+2)}{n}$

解答　(1) 對每一 $n \ge 1$，

$$\frac{n}{n^3+1} \le \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 為收斂的 p-級數，故級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ 收斂.

(2) 對每一 $n \ge 1$，

$$\ln(n+2) > 1$$

可得

$$\frac{\ln(n+2)}{n} > \frac{1}{n}$$

因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 發散，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+2)}{n}$ 發散.

定理 19-3-4 比值檢驗法 (ratio test)

設 $\sum a_n$ 為正項級數且令

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$$

(1) 若 $L<1$，則級數收斂.

(2) 若 $L>1$，或若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\infty$，則級數發散.

(3) 若 $L=1$，則無法判斷斂散性.

註：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$，則定理 19-3-4 失效，而必須利用其他的檢驗法. 例如，我們知道 $\sum\dfrac{1}{n}$ 發散，但 $\sum\dfrac{1}{n^2}$ 收斂. 對前者而言，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

對後者而言，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{(n+1)^2}=1.$

例 6 判斷下列各級數的斂散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$　　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^2}$

解答 (1) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\dfrac{n^n}{n!}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1$$

故級數收斂.

(2) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\dfrac{n^2}{2^n}\right]=2\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2=2>1$

故級數發散.

習 題 19-3

1. 利用積分檢驗法判斷下列各級數的斂散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$　　(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ \ln\ n}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{e^n}$　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n^3+2}$

2. 利用比較檢驗法判斷下列各級數的斂散性.

(1) $1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{8}}+\dfrac{1}{\sqrt{15}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\cdots,\quad n\geq 2$

(2) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\cdots$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n^3+2}$

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+\cos\ n}{n^2}$

3. 利用比值檢驗法判斷下列各級數的斂散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}$　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3^n}$　　(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n}{n!}$　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^3}$

§ 19-4　交錯級數，絕對收斂，條件收斂

形如

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n-1}a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$$

或

$$-a_1+a_2-a_3+a_4+\cdots+(-1)^n a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$$

(此處 $a_n>0$，$n=1$，2，3，$\cdots$) 的級數稱為**交錯級數** (alternating series).

定理 19-4-1　交錯級數檢驗法 (alternating series test)

若對每一正整數 n，$a_n \geq a_{n+1}>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，則 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收斂.

例 1　試證交錯調和級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 收斂.

解答　若欲應用交錯級數檢驗法，則必須證明：

(i) 對每一正整數 n 均有 $a_{n+1}\leq a_n$，

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

現在，$a_n=\dfrac{1}{n}$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$，可知 $0<\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}$ 對所有 $n\geq 1$ 成立.

又

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

故證得此交錯級數收斂.

例 2　交錯級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$ 是收斂抑或發散？

解答　令 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$，使得 $f(n)=a_n$，

則
$$f'(x)=-\frac{x-1}{2\sqrt{x}\,(x+1)^2}<0,\quad x>1$$

故函數 f 在 $[1,\ \infty)$ 為遞減函數．因此，對所有 $n\geq 1$，$a_{n+1}\leq a_n$ 恆成立．

又
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{1}{n}}}{1+\dfrac{1}{n}}=0$$

因此，所予交錯級數收斂．

定義 19-4-1

若 $\sum|a_n|$ 收斂，則級數 $\sum a_n$ 稱為**絕對收斂** (absolutely convergent).

例 3　交錯級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 為絕對收斂，因為

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

為一收斂的 p-級數（$p=2>1$).

定義 19-4-2

若 $\sum|a_n|$ 發散且 $\sum a_n$ 收斂，則級數 $\sum a_n$ 稱為**條件收斂** (conditionally convergent).

例 4 (1) 交錯調和級數 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$ 為條件收斂.

(2) 級數 $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$ 為條件收斂.

定理 19-4-2

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收斂，則 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收斂.

定理 19-4-3 比值檢驗法

令 $\sum a_n$ 為各項均不為零的無窮級數且 $L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

(1) 若 $L<1$，則 $\sum a_n$ 絕對收斂.

(2) 若 $L>1$，則 $\sum a_n$ 發散.

(3) 若 $L=1$，則無法判斷斂散性.

例 5 若 $|r|<1$，則幾何級數 $a+ar+ar^2+\cdots+ar^n+\cdots$ 收斂. 事實上，若 $|r|<1$，則它是絕對收斂，因為

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{ar^{n+1}}{ar^n}\right|=\lim_{n\to\infty}|r|<1.$$

例 6 判斷級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{n3^n}$ 的斂散性.

解答 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\,2^{2n+1}}{(n+1)\,3^{n+1}}\cdot\frac{n3^n}{(-1)^{n-1}\,2^{2n-1}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{3(n+1)}$$

$$=\frac{4}{3}$$

因 $L=\dfrac{4}{3}>1$，故知級數發散.

定理 19-4-4 重排定理 (rearrangement theorem)

絕對收斂級數的項可以重新排列而不會影響其收斂及和.

然而，條件收斂級數的項若重新排列，可能使得新級數收斂到其他值或發散. 例如，令 S 為條件收斂的交錯調和級數的和，即,

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

將此級數中的項重新排列成

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots$$

可得新的級數

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\right)$$

$$=\frac{S}{2}.$$

習 題 19-4

判斷下列各級數是絕對收斂、條件收斂或發散.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n^2+1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n^2}{e^n}$

4. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n\ \ln\ n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-100)^n}{n!}$

6. $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln\ n}{n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\ n}{n\sqrt{n}}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\ n\pi}{n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\ \cos\ n\pi}{n^2+2}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\ n}{n^2}$

§ 19-5 冪級數

在前面幾節中，我們研究常數項級數. 在本節中，我們將考慮含有變數項的級數，這種級數在許多數學分支與物理科學裡相當重要.

我們從定理 19-2-3 可知，若 $|x|<1$，則

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

此式等號右邊是一函數，其定義域為所有實數 $x \neq 1$ 的集合；而等號左邊是另一函數，其定義域為 $-1<x<1$. 等式僅在後者定義域 (即，$-1<x<1$) 成立，因它們同時在該範圍有定義. 在 $-1<x<1$ 中，左邊的幾何級數“代表”函數 $\dfrac{1}{1-x}$.

如今，我們將研究像 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 這種類型的“無窮多項式”，並探討代表它們的函數

的一些問題.

定義 19-5-1　冪級數 (power series)

若 c_0，c_1，c_2，$\cdots$ 均為常數且 x 為一變數，則形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

的級數稱為**中心在 $x=0$ 的冪級數** (power series centered at $x=0$)；形如 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$ 的級數稱為**中心在 $x=a$ 的冪級數** (power series centered at $x=a$)，常數 a 稱為**中心** (center).

若在冪級數 $\sum c_n x^n$ 中以數值代 x，則可得收斂抑或發散的常數項級數，因而，產生了一個基本的問題，即，所予冪級數對何種 x 值收斂的問題.

本節的主要目的是在決定使冪級數收斂的所有 x 值；通常，我們利用比值檢驗法以求得 x 的值.

例 1　冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ 為一幾何級數，其公比 $r=x$，因此，當 $|x| < 1$ 時，此冪級數收斂.

例 2　求所有 x 值使得冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 絕對收斂.

解答　令 $u_n = \frac{x^n}{n!}$，則

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

對所有實數 x 均成立. 所以，所予冪級數對所有實數絕對收斂.

例 3 求所有 x 值使得冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$ 收斂.

解答 令 $u_n = n!\,x^n$，若 $x \neq 0$，則

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |(n+1)x| = \infty$$

因此，只有 $x=0$ 才能使級數收斂.

由以上三個例子的結果，歸納出下面的定理，其證明可在高等微積分教本中找到.

定理 19-5-1

對冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ 而言，下列當中恰有一者成立：

(1) 級數僅對 $x=a$ 收斂.

(2) 級數對所有 x 絕對收斂.

(3) 存在一正數 r，使得級數在 $|x-a|<r$ 時絕對收斂，而在 $|x-a|>r$ 時發散. 在 $x=a-r$ 與 $x=a+r$，級數可能絕對收斂、或條件收斂、或發散.

在情形 (3) 中，我們稱 r 為**收斂半徑** (radius of convergence)；在情形 (1) 中，級數僅對 $x=a$ 收斂，我們定義收斂半徑為 $r=0$；在情形 (2) 中，級數對所有 x 絕對收斂，我們定義收斂半徑為 $r=\infty$. 使得冪級數收斂的所有 x 值所構成的區間稱為**收斂區間** (interval of convergence).

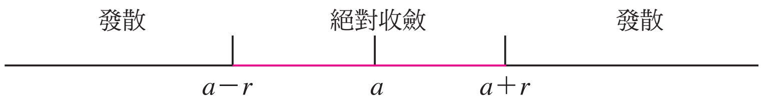


圖 19-5-1

例 4 求冪級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ 的收斂區間.

解答　令 $u_n=\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$，則

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{x^n}\right|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}x\right|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}|x|=|x|$$

可知級數在 $|x|<1$ 時絕對收斂. 令 $x=1$，代入可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，此為發散的 p-級數 $\left(p=\dfrac{1}{2}\right)$. 令 $x=-1$，代入可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，此為收斂的交錯級數. 於是，所予級數的收斂區間為 $[-1, 1)$.

冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ 的收斂半徑一般可用比值檢驗法求得. 例如，假設

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=L$$

則

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{|c_{n+1}(x-a)^{n+1}|}{|c_n(x-a)^n|}\right|=L|x-a|$$

對 $|x-a|<\dfrac{1}{L}$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ 絕對收斂.

對 $|x-a|>\dfrac{1}{L}$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ 發散.

收斂半徑

$$r=\frac{1}{L}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|. \tag{19-5-1}$$

例 5　求冪級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^n}{n^2}$ 的收斂區間與收斂半徑.

解答 收斂半徑為 $r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1.$

若 $|x-5|<1$，即，$4<x<6$，則級數絕對收斂. 若 $x=4$，則原級數變成

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\cdots$$

此為收斂級數. 若 $x=6$，則原級數變成

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

此為收斂 p-級數 $(p=2)$. 於是，所予級數的收斂區間為 $[4, 6]$.

冪級數可以用來定義一函數，而其定義域為該級數的收斂區間. 明確地說，對收斂區間中每一 x，令

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$$

若由上式來定義函數 f，則稱 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ 為 $f(x)$ 的**冪級數表示式** (power series representation). 例如，$\frac{1}{1-x}$ 的冪級數表示式為幾何級數 $1+x+x^2+\cdots$ $(-1<x<1)$，即，

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots,\quad |x|<1$$

函數 $f(x)$ 的冪級數表示式可以用來求得 $f'(x)$ 與 $\int f(x)\,dx$ 等的冪級數表示式.

下面定理告訴我們，對 $f(x)$ 的冪級數表示式**逐項微分** (term-by-term differentiation) 或**逐項積分** (term-by-term integration) 可以求得 $f'(x)$ 或 $\int f(x)\,dx$ 等的冪級數表示式.

定理 19-5-2　冪級數的逐項微分與逐項積分

若冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 有非零的收斂半徑 r，又對區間 $(a-r,\ a+r)$ 中每一 x 恆有 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$，則

(1) 級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}[c_n(x-a)^n]=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$ 的收斂半徑為 r，且對區間 $(a-r,\ a+r)$ 中所有 x 恆有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-a)^{n-2}$$

$$\vdots$$

(2) 級數 $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int c_n(x-a)^n\ dx\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ 的收斂半徑為 r，且對區間 $(a-r,\ a+r)$ 中所有 x 恆有

$$\int f(x)\ dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}+C$$

(3) 對區間 $[a-r,\ a+r]$ 中所有 α 與 β，級數 $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{\alpha}^{\beta} c_n(x-a)^n\ dx\right]$ 絕對收斂且

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\ dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}\Big|_{\alpha}^{\beta}\right].$$

註：定理 19-5-2 告訴我們，雖然冪級數微分或積分後的收斂半徑保持不變，但是這並不表示收斂區間仍然一樣；有可能原冪級數在某端點收斂，而微分後的冪級數在該端點發散.

例 6 若 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，求 $f(x)$、$f'(x)$ 與 $f''(x)$ 的收斂區間.

解答 利用 (19-5-1) 式，$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 在 $x=1$ 發散而在 $x=-1$ 收斂，故其收斂區間為 $[-1,\ 1)$.

利用定理 19-5-2，$f'(x)$ 與 $f''(x)$ 的收斂半徑均為 1.

$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$ 在 $x=\pm 1$ 發散，故其收斂區間為 $(-1,\ 1)$.

$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)x^{n-2}$ 在 $x=\pm 1$ 發散，故其收斂區間為 $(-1,\ 1)$.

例 7 求 $\ln(1+x)$ 的冪級數表示式.

解答 因

$$\frac{d}{dx}\ln(1+x)=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}$$
$$=1+(-x)+(-x)^2+(-x)^3+(-x)^4+\cdots \quad \text{(利用幾何級數)}$$
$$=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots,\quad -1<x<1$$

故

$$\ln(1+x)=\int(1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots)\,dx$$
$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots+C$$

以 $x=0$ 代入上式，可得 $C=0$. 於是，

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots,\quad -1<x<1.$$

但此級數在 $x=1$ 收斂到 $\ln(1+1)=\ln 2$，所以，

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots,\quad -1<x\le 1.$$

例 8　求 $\tan^{-1} x$ 的冪級數表示式.

解答　因 $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1} x=\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1}{1-(-x^2)}$

$$=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\cdots,\quad -1<x<1 \qquad \text{(利用幾何級數)}$$

故

$$\tan^{-1} x=\int(1-x^2+x^4-x^6+x^8-\cdots)\,dx$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\cdots+C$$

以 $x=0$ 代入上式，可得 $C=0$. 於是，

$$\tan^{-1} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\cdots,\quad -1<x<1$$

但此級數在 $x=1$ 收斂到 $\tan^{-1} 1=\dfrac{\pi}{4}$，而在 $x=-1$ 收到 $\tan^{-1}(-1)=-\dfrac{\pi}{4}$，所以，

$$\tan^{-1} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\cdots,\quad -1\le x\le 1.$$

習 題 19-5

在 1～10 題中，求下列各冪級數的收斂區間.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n(n+2)}$

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{2^n}$

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$

5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{\ln n}$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n}$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!}$

8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n}$

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (x+5)^n$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)} x^n$

11. 試證：若冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 的收斂半徑為 r，則冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n}$ 的收斂半徑為 $\sqrt{r}$.

12. 試證：(1) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$

§ 19-6 泰勒級數與麥克勞林級數

若函數 $f(x)$ 是由冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ 所表示，即

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \quad |x-a| < r, \quad r > 0$$

則由定理 19-5-2(1) 知，f 的 n 階導函數在 $|x-a| < r$ 時存在. 於是，由連續微分可得

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n (x-a)^{n-1} = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n (x-a)^{n-2} = 2c_2 + 6c_3(x-a) + 12c_4(x-a)^2 + \cdots$$

$$f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)c_n (x-a)^{n-3} = 6c_3 + 24c_4(x-a) + \cdots$$

$$\vdots$$

對任何正整數 n，

$$f^{(n)}(x) = n!\, c_n + \text{含有因子 } (x-a) \text{ 之項的和}$$

現在，我們以 $x=a$ 代入上式可得

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n \geq 0$$

此即 $f(x)$ 的冪級數表示式之 n 次項的係數，於是，我們有下面的定理.

定理 19-6-1

若　$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$，$|x-a|<r$，則其係數為

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

且 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

$$=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots \qquad \textbf{(19-6-1)}$$

此定理所得到的冪級數稱為 $f(x)$ 在 $x=a$ 處的**泰勒級數** (Taylor series). 若 $a=0$，則變成

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad \textbf{(19-6-2)}$$

上式右邊的級數稱為**麥克勞林級數** (Maclaurin series).

例 1　求 $f(x)=\sin x$ 在 $x=\frac{\pi}{4}$ 處的泰勒級數.

解答

$f(x)=\sin x$，　　$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f'(x)=\cos x$，　　$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f''(x)=-\sin x$，　　$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f'''(x)=-\cos x$，　　$f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$f^{(4)}(x)=\sin x, \qquad f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

故泰勒級數為

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4+\cdots.$$

例 2 求 $f(x)=\ln x$ 在 $x=1$ 處的泰勒級數.

解答 對 $f(x)=\ln x$ 連續微分，可得

$$f(x)=\ln x\ , \qquad f(1)=0$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}, \qquad f'(1)=1$$

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}, \qquad f''(1)=-1$$

$$f'''(x)=\frac{1\cdot 2}{x^3}, \qquad f'''(1)=2!$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}, \qquad f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

於是，泰勒級數為

$$(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

由比值檢驗法可得知此級數的收斂區間為 $(0,\ 2]$. 但讀者應注意 $f(x)=\ln x$ 的麥克勞林級數的表示式並不存在. (何故？)

為了參考方便，我們在表 19-6-1 中列出一些重要函數的麥克勞林級數，並指出使級數收斂到該函數的區間.

表 19-6-1

麥克勞林級數	收斂區間
$\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots$	$(-1,\ 1)$
$e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots$	$(-\infty,\ \infty)$
$\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots$	$(-\infty,\ \infty)$
$\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots$	$(-\infty,\ \infty)$
$\ln(1+x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots$	$(-1,\ 1]$
$\tan^{-1} x=\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+\cdots$	$[-1,\ 1]$

例 3　利用 $\dfrac{1}{1-x}$ 的麥克勞林級數求下列各函數的麥克勞林級數.

(1) $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$

解答　(1) $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots,\quad -1<x<1$

以 x^2 代 x，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x^2}&=1+x^2+(x^2)^2+(x^2)^3+(x^2)^4+\cdots\\&=1+x^2+x^4+x^6+x^8+\cdots,\quad -1<x<1\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots,\quad -1<x<1$

以 $-x$ 代 x，可得

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=1+(-x)+(-x)^2+(-x)^3+(-x)^4+\cdots$$
$$=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots,\quad -1<x<1.$$

例 4 求下列各函數的麥克勞林級數.

(1) $f(x)=\dfrac{\sin\ x}{x}$ (2) $f(x)=\sin 2x$

解答 利用

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\cdots,\quad -\infty<x<\infty$$

可得

(1) $$\frac{\sin\ x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\cdots,\quad -\infty<x<\infty$$

(2) $$\sin 2x=2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}-\frac{(2x)^7}{7!}+\frac{(2x)^9}{9!}-\cdots$$
$$=2x-\frac{2^3}{3!}x^3+\frac{2^5}{5!}x^5-\frac{2^7}{7!}x^7+\frac{2^9}{9!}x^9-\cdots,\quad -\infty<x<\infty.$$

例 5 試計算

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin\ x}{x}$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \sin x^2\ dx$

解答 (1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\cdots\right)=1$$

(2) $$\int_0^1 \sin x^2\ dx=\int_0^1\left(x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\frac{x^{18}}{9!}-\cdots\right)dx$$
$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\frac{x^{11}}{11\cdot 5!}-\frac{x^{15}}{15\cdot 7!}+\frac{x^{19}}{19\cdot 9!}-\cdots\right)\Bigg|_0^1$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{11\cdot 5!}-\frac{1}{15\cdot 7!}+\frac{1}{19\cdot 9!}-\cdots$$

取此級數的前三項，可得

$$\int_0^1 \frac{\sin\ x^2}{x}\,dx \approx \frac{1}{3}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{11\cdot 5!}\approx 0.310.$$

例 6　試求 $f(x)=\sin^2 x$ 的麥克勞林級數.

解答　$\sin^2\ x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\left(1-\frac{2^2}{2!}x^2+\frac{2^4}{4!}x^3-\frac{2^6}{6!}x^6+\frac{2^8}{8!}x^8-\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2^2}{2!}x^2-\frac{2^4}{4!}x^4+\frac{2^6}{6!}x^6-\frac{2^8}{8!}x^8-\cdots\right)$$

$$=\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6-\frac{2^7}{8!}x^8+\cdots,\quad -\infty<x<\infty.$$

例 7　試計算

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{3x^2}$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

解答　(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\cdots\right)-x-1}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}}{3x^2}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}+\cdots\right)=\frac{1}{6}$$

(2) 欲求 e^{-x^2} 的麥克勞林級數的最簡單方法是將

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

中的 x 換成 $-x^2$，而得

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\cdots$$

所以，$\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx=\int_0^1\left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\cdots\right)dx$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\frac{x^9}{9\cdot 4!}-\cdots\right)\Bigg|_0^1$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5\cdot 2!}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{9\cdot 4!}-\cdots$$

取此級數的前三項，可得

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5\cdot 2!}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}$$

$$=\frac{23}{30}\approx 0.767.$$

例 8 試利用表 19-6-1 計算下列之值

(1) e　　(2) $\ln 2$　　(3) $\dfrac{\pi}{4}$

解答 (1) $e=1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\cdots\approx 2.71828$

(2) $\ln 2=\ln(1+1)=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\cdots$

(3) $\dfrac{\pi}{4}=\tan^{-1}1=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\cdots$

或 $\pi=4\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\cdots\right).$

習 題 19-6

在 1～2 題中，求各函數的泰勒級數 (以 a 為中心).

1. $f(x)=\sin x$，$a=\dfrac{\pi}{3}$　　**2.** $f(x)=e^{2x}$，$a=-1$

在 3～7 題中，求各函數的麥克勞林級數.

3. $f(x)=\dfrac{x^2}{1+3x}$

4. $f(x)=\dfrac{1}{3+x}$ $\left(提示：\dfrac{1}{3+x}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-(-x/3)}\right)$

5. $f(x)=\sin x\ \cos x$ $\left(提示：\sin x\ \cos x=\dfrac{1}{2}\ \sin 2x\right)$

6. $f(x)=\cos^2 x$ $\left(提示：\cos^2 x=\dfrac{1}{2}\ (1+\cos 2x)\right)$

7. $f(x)=xe^{-2x}$

在 8～11 題中，利用適當的麥克勞林級數，求所予級數的和.

8. $2+\dfrac{4}{2!}+\dfrac{8}{3!}+\dfrac{16}{4!}+\cdots$　　**9.** $1-\ln 3+\dfrac{(\ln 3)^2}{2!}-\dfrac{(\ln 3)^3}{3!}+\cdots$

10. $\pi-\dfrac{\pi^3}{3!}+\dfrac{\pi^5}{5!}-\dfrac{\pi^7}{7!}+\cdots$　　**11.** $1-\dfrac{e^2}{2!}+\dfrac{e^4}{4!}-\dfrac{e^6}{6!}+\cdots$

利用麥克勞林級數 (取前三項) 求下列積分的近似值.

12. $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{dx}{1+x^4}$　　**13.** $\displaystyle\int_0^1 \cos\sqrt{x}\ dx$