預備數學

1 實數的性質

在微積分以前的數學中，**實數** (real number) 就已經使用得相當廣泛了．若**自然數** (natural number) (或稱為**正整數** (positive integer)) 全體所成的集合記為 $\boldsymbol{N}$，**整數** (integer) 全體所成的集合記為 $\boldsymbol{Z}$，**有理數** (rational number) 全體所成的集合記為 $\boldsymbol{Q}$，實數全體所成的集合記為 $\mathbb{R}$，則可知

$$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \mathbb{R}$$

今於直線上任取一點，以表實數 0，稱為**原點** (origin)，並另取一點以表實數 1，稱為**單位點** (point of unity)．直線上以原點為起點，我們規定指向單位點的方向稱為**正方向** (positive direction)，另一方向為**負方向** (negative direction)．以原點和單位點為基準，並取單位長度作為量測距離．對每一實數，我們能在直線上賦予一點如下：

- 對每一正數 r，在正方向賦予一點使它與原點的距離為 r 單位．
- 對每一負數 $-r$，在負方向賦予一點使它與原點的距離為 r 單位．

於是，直線上的每一點恰有一實數代表它，而每一實數亦恰有直線上的一點與之對應，這一佈滿實數的直線就稱為**數線** (real line)，或稱為**坐標線** (coordinate line)．很顯然地，從實數與坐標線上之點的關係，我們可知實數與坐標線上的點是一一對應．

設實數 $a<b$，則下面數線上的點集合 (或各實數的集合) 均稱爲**有限區間** (finite interval)，a，b 稱爲其**端點** (end-point).

閉區間 (closed interval)：$[a, b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$
開區間 (open interval)：$(a, b)=\{x|a<x<b\}$
右半開 (或**左半閉**) **區間** (right half-open (或 left half-closed) interval)：
$[a, b)=\{x|a\leqslant x<b\}$
左半開 (或**右半閉**) **區間** (left half-open (或 right half-closed) interval)：
$(a, b]=\{x|a<x\leqslant b\}$

同理，我們稱下面的集合爲**無限區間** (infinite interval).
設 $a\in\mathbb{R}$，則

$$[a, \infty)=\{x|x\geqslant a\}$$
$$(a, \infty)=\{x|x>a\}$$
$$(-\infty, a]=\{x|x\leqslant a\}$$
$$(-\infty, a)=\{x|x<a\}$$
$$(-\infty, \infty)=\{x|x\in\mathbb{R}\}$$

例如，$(1, \infty)$ 表示所有大於 1 的實數，符號 ∞ 表示“無限大”，僅爲一符號而已，並非一個實數.

實數是有大小次序的，關於實數的次序關係，有下述重要的基本性質：

定理 1

設 a、b、c 與 d 均爲實數.
(1) 若 $a<b$ 且 $b<c$，則 $a<c$.
(2) 若 $a<b$ 則 $a+c<b+c$.
(3) 若 $a<b$ 則 $a-c<b-c$.
(4) 若 $a<b$ 且 $c<d$，則 $a+c<b+d$.
(5) 若 $a<b$ 且 $c>0$，則 $ac<bc$.
(6) 若 $a<b$ 且 $c<0$，則 $ac>bc$.

現在，定義 a 的**絕對值** (absolute value)，記爲 $|a|$，如下：

$$|a|=\begin{cases} a，當\ a\geqslant 0 \\ -a，當\ a<0 \end{cases}$$

並由此定義得知，對任意 $a\in\mathbb{R}$ 而言，恒有

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

由幾何的觀點而言，$|a|$ 表數線上坐標爲 a 之點與原點的**距離** (distance)。一般而言，數線上任意二點 a，b 之距離爲 $|a-b|$。

定理 2 絕對值的性質

設 a，$b\in\mathbb{R}$，則

(1) $|a|=|-a|$

(2) $|ab|=|a||b|$

(3) $|a^2|=|a|^2$

(4) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$，$b\neq 0$

(5) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$

(6) $|a|\leqslant r\Leftrightarrow -r\leqslant a\leqslant r$ $(r\geqslant 0)$

(7) $|a|>r\Leftrightarrow a>r$ 或 $a<-r$ $(r\geqslant 0)$

(8) $|a+b|\leqslant |a|+|b|$ (三角不等式)

(9) $|a-b|\geqslant \big||a|-|b|\big|$

2 坐標平面

正如直線上的點與實數構成一一對應一樣，平面上的點也與利用交於原點的兩垂直坐標線所成實數對構成一一對應。通常，其中一條直線爲水平而向右爲正方向，另一條直線爲垂直而向上爲正方向；兩直線稱爲**坐標軸** (coordinate axis)，其中水平線稱爲 ***x*-軸** (x-axis)，垂直線稱爲 ***y*-軸** (y-axis)，兩坐標軸合併形成所謂的**直角坐標系** (retangular coordinate system) 或**笛卡兒坐標系** (Cartesian coordinate system)，兩坐標軸的交點記爲 O 而稱爲坐標系的**原點** (origin)。

引進直角坐標系的平面稱爲**坐標平面** (coordinate plane) 或**笛卡兒平面** (Cartesian plane)，而分別使用 x 與 y 標記水平軸與垂直軸的坐標平面稱爲 ***xy*-平面** (xy-plane)。若 P 是坐標平面上的點，則我們畫出通過 P 的兩條直線，一條垂直於 x-軸，而另一條垂直於 y-軸。若第一條直線交 x-軸於具有坐標 a 的點而第二條直線交 y-軸於具有坐標 b 的點，則我們對於 P 賦予有序數對 $(a，b)$。數 a 稱爲 P 的 ***x*-坐標** (x-coordinate) 或**橫坐標** (abscissa)，而數 b 稱爲 P 的 ***y*-坐標** (y-coordinate) 或**縱坐標** (ordinate)；我們稱 P 爲具有坐標 (a, b) 的點而記爲 $P(a, b)$，如圖 1 所示.

在坐標平面上的每一點決定唯一的有序數對. 反之，我們以一對實數 (a, b) 開始，作出垂直 x-軸於具有坐標 a 之點的直線，垂直 y-軸於具有坐標 b 之點的直線；這兩條直線的交點決定了在坐標平面上具有坐標 (a, b) 的唯一點 P. 於是，在有序數對與坐標平面上之點間有一個一一對應.

兩坐標軸將平面分成四個部分，稱爲**象限** (quadrant)，分別爲第一象限、第二象限、第三象限與第四象限. x-坐標與 y-坐標均爲正的點位於第一象限，具有負的 x-坐標與正的 y-坐標的點位於第二象限，x-坐標與 y-坐標均爲負的點位於第三象，具有正的 x-坐標與負的 y-坐標的點位於第四象限，如圖 2 所示.

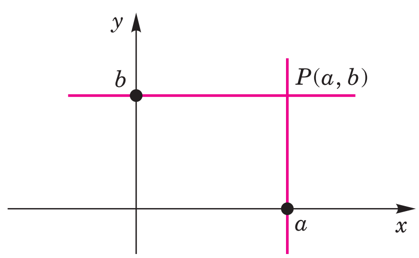


圖 1

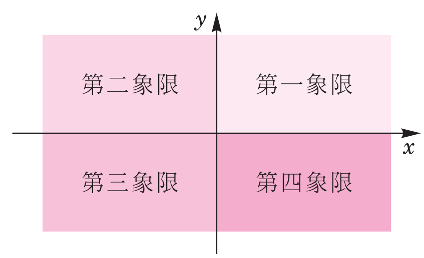


圖 2

一個僅含兩變數 x 與 y 的方程式的圖形 (或稱**平面曲線** (plane curve)) 爲滿足該方程式的所有有序數對 (x, y) 所組成的集合. 若圖形具有某對稱性質，則作方程式圖形所需的工作可簡化. 今提出下面的對稱性判別法.

定理 3 對稱性判別法 (symmetry test)

(1) 若在平面曲線的方程式中以 $-x$ 代 x，可得同樣的方程式，則曲線對稱於 y-軸.

(2) 若在平面曲線的方程式中以 $-y$ 代 y，可得同樣的方程式，則曲線對稱於 x-軸.

(3) 若在平面曲線的方程式中，以 $-x$ 代 x 且 $-y$ 代 y，可得同樣的方程式，則曲線對稱於原點.

定義 1

通過兩點 $P_1(x_1, y_1)$ 與 $P_2(x_2, y_2)$ 的非垂直線的斜率 m 定義爲

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

註： 垂直線的斜率沒有定義.

如果 $y_1=y_2$，且 $x_1\neq x_2$，則通過 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) 之直線與 x-軸平行，其斜率爲零. 如直線向右上方傾斜，則其斜率爲正；如直線向左上方傾斜，則其斜率爲負.

已知一直線的斜率 m 且通過點 (x_0, y_0)，則其方程式爲

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

此稱爲直線的**點斜式** (point-slope form).

已知一直線的斜率 m 且通過點 $(0, b)$，則其方程式爲

$$y=mx+b$$

此處 b 稱爲直線的 y-截距. 稱爲直線的**斜截式** (slope-intercept form)，其圖形如圖 3 所示.

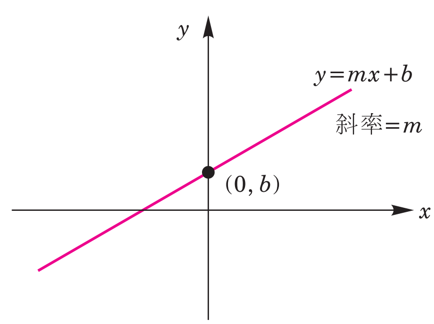


圖 3

直線方程式的**一般式** (general equation) 爲

$$ax+by+c=0$$

其中 a、b 與 c 均爲常數，a、b 不全爲零. 如 $b=0$，則 $ax+c=0$，$x=-\frac{c}{a}$，此爲與 y-軸平行的直線. 如 $a=0$，則 $by+c=0$，$y=-\frac{c}{b}$，此爲與 x-軸平行的直線. 如 $a\neq 0$，$b\neq 0$，則 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$，此表示斜率爲 $-\frac{a}{b}$ 且 y-截距爲 $-\frac{c}{b}$ 的直線方程式.

定理 4

兩條非垂直線互相平行，若且唯若它們有相同的斜率。

定理 5

斜率分別爲 m_1 與 m_2 的兩條非垂直線互相垂直，若且唯若 $m_1m_2=-1$。

3 圓錐曲線

設 L 與 M 是兩相交但不垂直的直線，將 L 固定而 M 繞 L 旋轉一周，則直線 M 旋轉所成的曲面，就是一個**正圓錐面** (cone)，如圖 4 所示。

令 S 表示 M 繞 L 旋轉一周所成的正圓錐面，又設 E 是一個平面，則 E 與 S 的截痕形成各種不同的圖形，至於是哪一種圖形，我們分別討論如下：

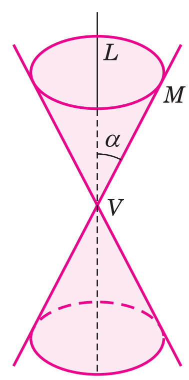


圖 4

情況 1：若 E 與 L 垂直，但不通過 L 與 M 的交點 V (V 稱爲正圓錐面 S 的頂點)，則 E 與 S 的截痕是一個**圓** (circle)，如圖 5 所示。

情況 2：若將 E 稍作轉動，使呈傾斜，且與 L 不垂直，也不通過頂點 V，將 S 分成兩部分，則 E 與 S 的截痕是一個**橢圓** (ellipse)，如圖 6 所示。

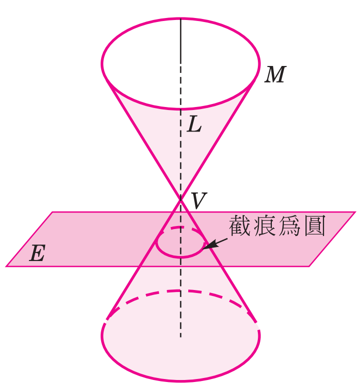


圖 5

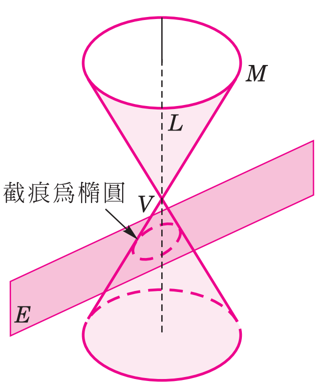


圖 6

情況 3：將平面 E 繼續轉動，使 E 與直線 M 平行，則 E 與 S 的截痕是一個**拋物線** (parabola)，如圖 7 所示。

情況 4：將平面 E 再繼續轉動，使 E 與正圓錐面 S 的上下兩部分都相交且不通過頂點 V，則 E 與 S 的截痕是一個**雙曲線** (hyperbola)，如圖 8 所示。

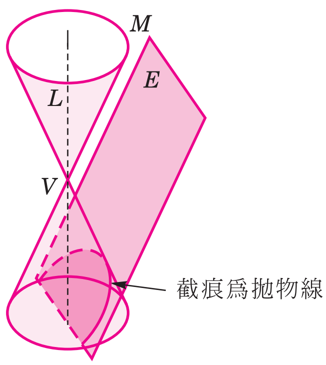


圖 7

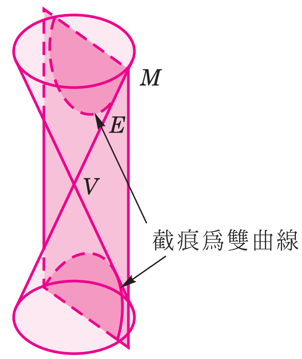


圖 8

圓、橢圓、拋物線及雙曲線的圖形，都可由一個平面與一個正圓錐面相截而得，因此合稱爲**圓錐曲線** (conic section (或 conic))，或簡稱爲**錐線**，或稱爲**二次曲線**。

定義 2

在坐標平面上，與一定點等距離的所有點所成的軌跡稱爲**圓**，此定點稱爲**圓心**，圓心與圓上各點的距離稱爲**半徑** (radius)。

圓心爲 (h, k) 且半徑爲 r 之圓的方程式爲

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

圖形如圖 9 所示。

若令 $h=0$，$k=0$，則上式可化成

$$x^2+y^2=r^2$$

此爲圓心在原點且半徑爲 r 的圓方程式爲，它們均稱爲**圓的標準式** (standard equation)。

註：圓心在原點且半徑爲 1 的圓 $x^2+y^2=1$ 稱爲**單位圓** (unit circle)。

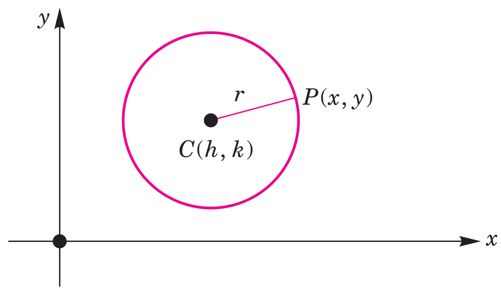


圖 9

定義 3

在同一個平面上，與兩個定點的距離和等於定數 $2a$ $(a>0)$ 的所有點所成的軌跡，稱爲**橢圓**，此兩個定點稱爲橢圓的**焦點** (focus).

橢圓方程式	中心	焦點	長軸的長	短軸的長
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$(0,\ 0)$	$(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$	$2a$	$2b$
$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	$(0,\ 0)$	$(0,\ c)$, $(0,\ -c)$	$2a$	$2b$
$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$(h,\ k)$	$(h+c,\ k)$, $(h-c,\ k)$	$2a$	$2b$
$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$	$(h,\ k)$	$(h,\ k+c)$, $(h,\ k-c)$	$2a$	$2b$

註：$c^2=a^2-b^2$.

設 $a>b>0$.

(1) 在橢圓方程式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中以 $-y$ 代 y，所得方程式不變，可知橢圓對稱於 x-軸.

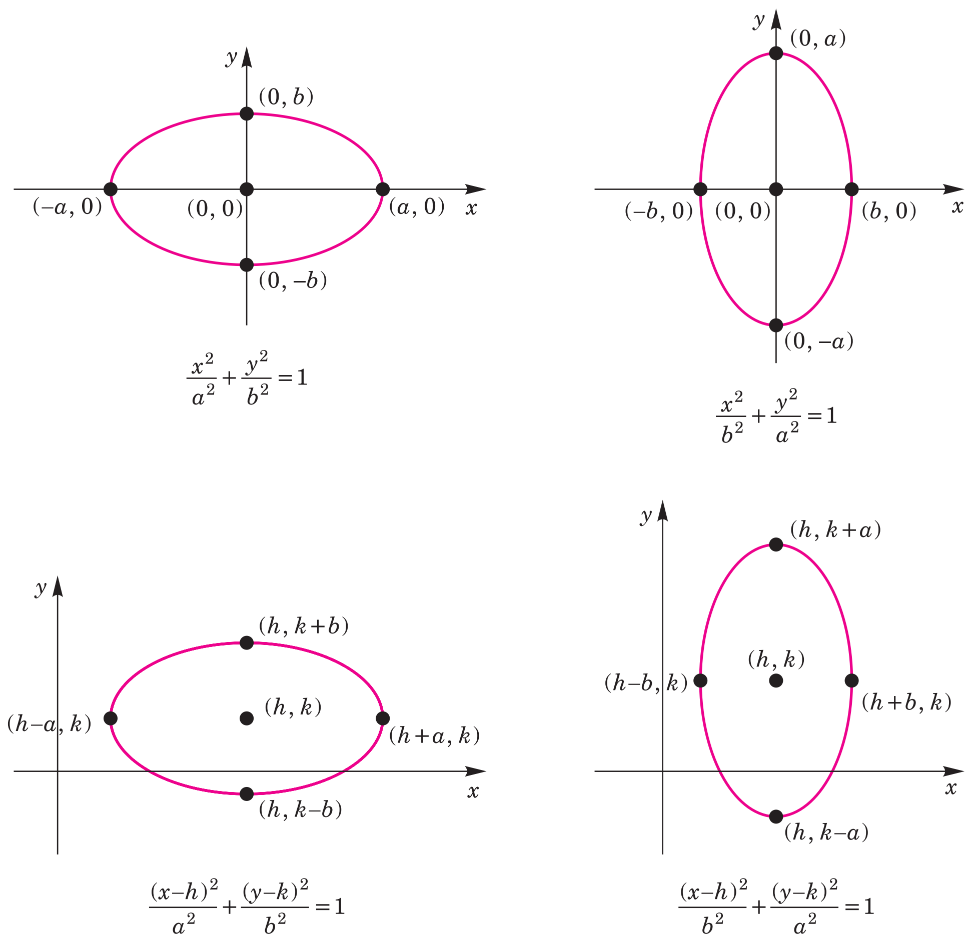


圖 10

(2) 在橢圓方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中以 $-x$ 代 x，所得方程式不變，可知橢圓對稱於 y-軸。

(3) 在橢圓方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中以 $-x$ 代 x，以 $-y$ 代 y，所得方程式不變，可知橢圓對稱於原點。

定義 4

在同一個平面上，與一個定點及一條定直線的距離相等之所有點所成的軌跡，稱爲**拋物線**，定點稱爲**焦點**，定直線稱爲**準線** (directrix)。

拋物線方程式	頂點	焦點	對稱軸	準線	開口
$x^2=4cy$	$(0,\ 0)$	$(0,\ c)$	$x=0$	$y=-a$	向上 $(c>0)$，向下 $(c<0)$
$y^2=4cx$	$(0,\ 0)$	$(c,\ 0)$	$y=0$	$x=-a$	向右 $(c>0)$，向左 $(c<0)$
$(x-h)^2=4c(y-k)$	$(h,\ k)$	$(h,\ k+c)$	$x=h$	$y=k-a$	向上 $(c>0)$，向下 $(c<0)$
$(y-k)^2=4c(x-h)$	$(h,\ k)$	$(h+c,\ k)$	$y=k$	$x=h-a$	向右 $(c>0)$，向左 $(c<0)$

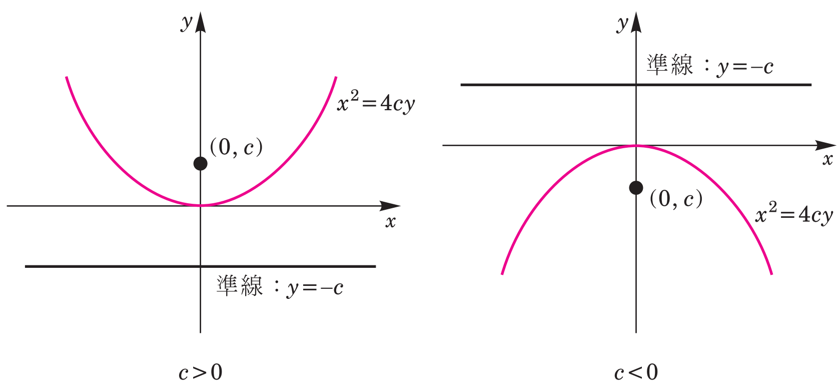


圖 11

定義 5

在同一個平面上，與兩定點之距離的差等於定數 $2a$ $(a>0)$ 的所有點所成的軌跡，稱爲 **雙曲線**，此兩定點稱爲雙曲線的 **焦點**。

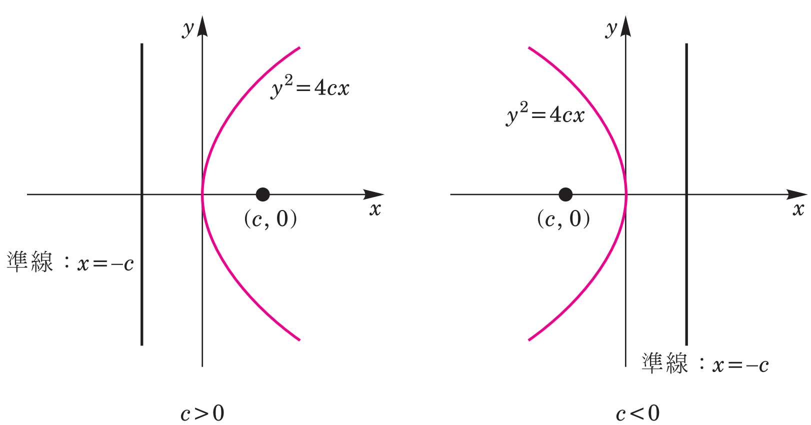


圖 12

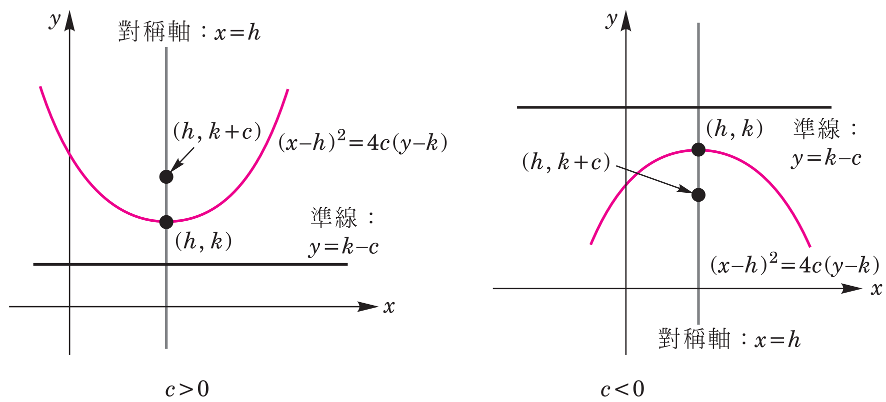


圖 13

雙曲線方程式	頂點	中心	焦點	漸近線
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$(a，0)，(-a，0)$	$(0，0)$	$(c，0)，(-c，0)$	$y=\pm\frac{b}{a}x$
$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$	$(0，a)，(0，-a)$	$(0，0)$	$(0，c)，(0，-c)$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$(h+a，k)，(h-a，k)$	$(h，k)$	$(h+c，k)，(h-c，k)$	$y=k\pm\frac{b}{a}(x-h)$
$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	$(h，k+a)，(h，k-a)$	$(h，k)$	$(h，k+c)，(h，k-c)$	$y=k\pm\frac{a}{b}(x-h)$

註：$c^2=a^2+b^2$.

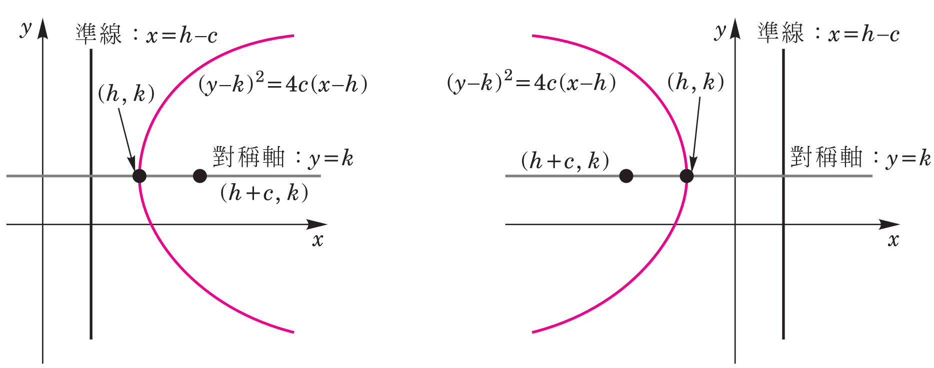
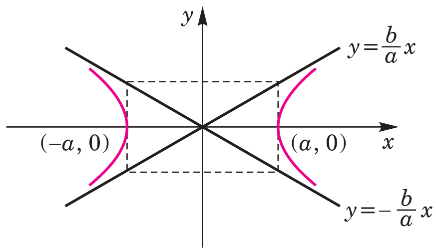
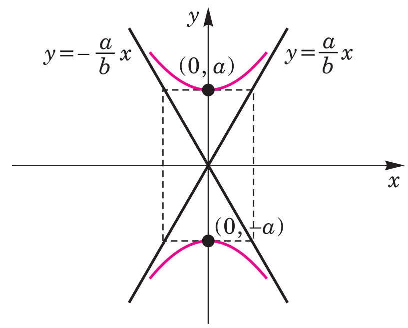


圖 14



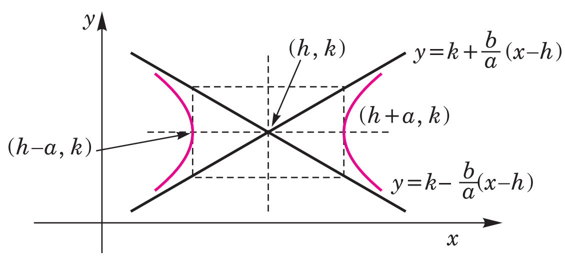
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

圖 15



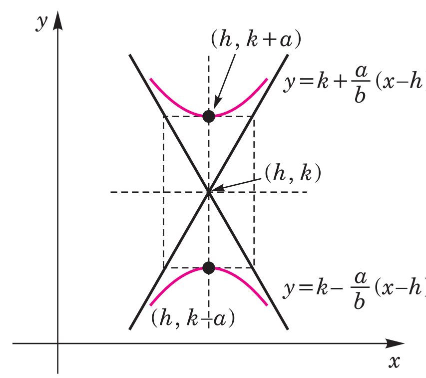
$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

圖 16



$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

圖 17



$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

圖 18

4 函　數

函數在數學上是一個非常重要的觀念，也是學習微積分的基礎，許多數學理論均需要用到函數的觀念。函數可以想成是兩個集合之間元素的對應。

定義 6

設 A、B 是兩個非空集合，若對每一個 $x \in A$，恰有一個 $y \in B$ 與它對應，將此對應方式表爲

$$f: A \to B$$

則稱 f 爲由 A 映到 B 的**函數** (function). 集合 A 稱爲函數 f 的**定義域** (domain)，記爲 D_f，元素 y 稱爲 x 在 f 之下的**像** (image) 或 f 在 x 的**值** (value)，以 $f(x)$ 表示之，即，$y=f(x)$；f 在定義域 A 中所有 x 的值所成的集合稱爲 f 的**值域** (range)，記爲 R_f，即，

$$R_f = f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

x 稱爲**自變數** (independent variable)，而 y 稱爲**因變數** (dependent variable).

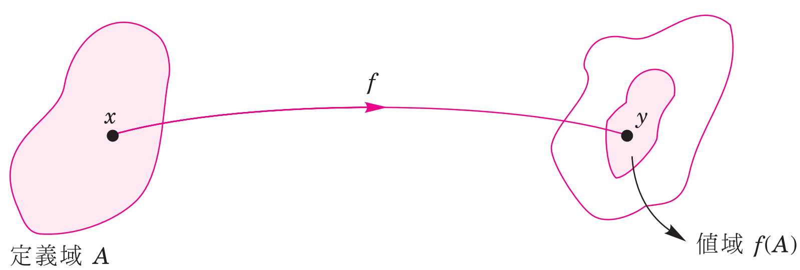


圖 19

此定義的說明如圖 19 所示.

若兩函數 f 與 g 的定義域相同且值域也相同，則稱這兩函數**相等** (equal)，記爲 $f=g$，即，

$$f=g \Leftrightarrow D_f = D_g \text{ 且 } R_f = R_g.$$

定義 7

設 f 爲由 A 映到 B 的函數，若對 A 中任意兩相異元素 a 與 b，恆有 $f(a) \neq f(b)$，則稱 f 爲**一對一函數** (one-to-one function).

註：在定義 7 中，"$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$" 可改寫成 "$f(a)=f(b) \Rightarrow a=b$".

若 f 爲一對一，則值域中每一 $f(x)$ 恰好是 A 中唯一元素的像，又，若 f 的值域爲 B，且 f 爲一對一，則集合 A 與 B 稱爲**一一對應** (one-to-one correspondence)．實數與數線上之點的對應，就是一個一一對應的例子．

微積分中所討論的函數的定義域及值域都是實數系 $\mathbb{R}$ 的子集，這種函數稱爲**實函數** (real-valued function)．如果以 $y=f(x)$ 定義的函數的定義域沒有明確說明，則一般是指 $\mathbb{R}$ 的子集，而這集合中的每一個元素 x 都使 $f(x)$ 爲一確定的實數．

一些常在微積分課程裡出現的實函數如下：

1. 常數函數：$f(x)=c$，其中 c 爲常數．
2. 恒等函數：$f(x)=x$．
3. 多項式函數：$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，$n$ 爲正整數．
4. 冪函數：$f(x)=cx^r$，其中 c 爲非零常數且 r 爲實數．
5. 有理函數：$R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 均爲多項式函數，$Q(x)\neq 0$．
6. 高斯函數：$f(x)=[\![x]\!]$，其中 $[\![x]\!]$ 表示小於或等於 x 的最大整數．換句話說，

$$f(x)=[\![x]\!]=\begin{cases} n-1, & \text{若 } n-1\leqslant x<n \\ n, & \text{若 } n\leqslant x<n+1 \end{cases},\quad n\in \mathbb{Z}.$$

我們從高斯函數的定義，可得下列的高斯不等式：

(1) 對任意 $x\in\mathbb{R}$，$[\![x]\!]\leqslant x<[\![x]\!]+1$．

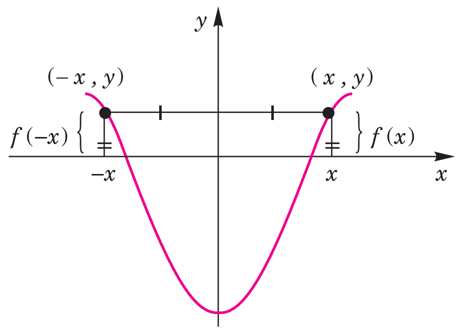
(2) 對任意 $x\in\mathbb{R}$，$x-1<[\![x]\!]\leqslant x$．

7. 超越函數：三角函數、反三角函數、指數函數與對數函數．

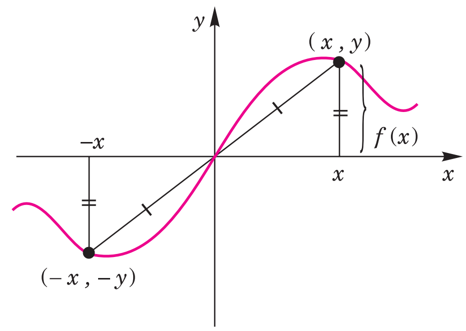
註：若一函數僅由常數函數與恒等函數透過加法、減法、乘法、除法與開方等五種運算中的任意運算而獲得，則稱爲**代數函數** (algebraic function)．例如，上面 1～5 所述的函數皆爲代數函數，又 $f(x)=3x^{2/5}$，$g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt[3]{x^2-2}}$ 亦爲代數函數．非代數函數者稱爲**超越函數** (transcendental function)．

定義 8

對任意 $x\in D_f$，若 $f(-x)=f(x)$，則稱 f 爲**偶函數** (even function)；又若 $f(-x)=-f(x)$，則稱 f 爲**奇函數** (odd function)．



偶函數圖形對稱於 y- 軸



奇函數圖形對稱於原點

圖 20

圖 20 分別表示偶函數與奇函數的圖形，偶函數的圖形對稱於 y-軸，奇函數的圖形對稱於原點.

定義 9

設 $f: A \to B$ 爲一從 $\mathbb{R}$ 的子集 A 映到 $\mathbb{R}$ 的子集 B 的函數，則坐標平面上一切以 $(x, f(x))$ 爲坐標的點所構成的集合

$$\{(x, f(x)) | x \in A\}$$

稱爲函數 f 的**圖形** (graph)，而函數 f 的圖形也叫做方程式 $y=f(x)$ 的圖形.

若 x 在 f 的定義域中，我們稱 f 在 x 有定義，或稱 $f(x)$ 存在；反之，“f 在 x 無定義”意指 x 不在 f 的定義域中. 如以 $(x, f(x))$ 作爲一有序數對，即可在坐標平面上描出若干點 $P(x, f(x))$，然後再適當地連接之，則可得函數的概略圖形.

某些較複雜的函數圖形可由較簡單的函數圖形，利用平移的方法而得之.

一般而言，垂直平移 $(c>0)$ 敍述如下：

$y=f(x)+c$ 的圖形位於 $y=f(x)$ 的圖形上方 c 個單位.
$y=f(x)-c$ 的圖形位於 $y=f(x)$ 的圖形下方 c 個單位.

一般而言，水平平移 $(c>0)$ 敍述如下：

$y=f(x-c)$ 的圖形是在 $y=f(x)$ 的圖形右邊 c 個單位.
$y=f(x+c)$ 的圖形是在 $y=f(x)$ 的圖形左邊 c 個單位.

兩函數 f 與 g 的和、差、積、商函數，分別記作 $f+g$，$f-g$，fg，$\dfrac{f}{g}$，其意義如下：

設 f 是由 $\mathbb{R}$ 的子集 A 映至 $\mathbb{R}$ 的子集 C，g 是由 $\mathbb{R}$ 的子集 B 映至 $\mathbb{R}$ 的子集 D，且 $A\cap B\neq\phi$，則

$$
\begin{aligned}
&(f+g)(x)=f(x)+g(x), && x\in A\cap B\\
&(f-g)(x)=f(x)-g(x), && x\in A\cap B\\
&(fg)(x)=f(x)g(x), && x\in A\cap B\\
&\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, && x\in A\cap B,\ g(x)\neq 0
\end{aligned}
$$

一般而言，如果有二函數 $g: A\rightarrow B$，$f: B\rightarrow C$，且假設 x 爲 g 函數定義域中之一元素，則可找到 x 在 g 之下的像 $g(x)$。若 $g(x)$ 在 f 的定義域內，我們又可在 f 之下找到 C 中的**像** $f(g(x))$。因此，就存在一個從 A 到 C 的函數：

$$f\circ g: A\rightarrow C$$

其對應於 $x\in A$ 的像爲

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

此一函數稱爲 g 與 f 的**合成函數** (composite function)。

定義 10

給予二函數 f 與 g，則合成函數 $f\circ g$ (讀作“f circle g”) 定義爲

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)).$$

此處 $f\circ g$ 的定義域是由可使得 $g(x)$ 在 f 的定義域中所有 x 組成。

合成函數 $f\circ g$ 的對應，可示於圖 21 中。

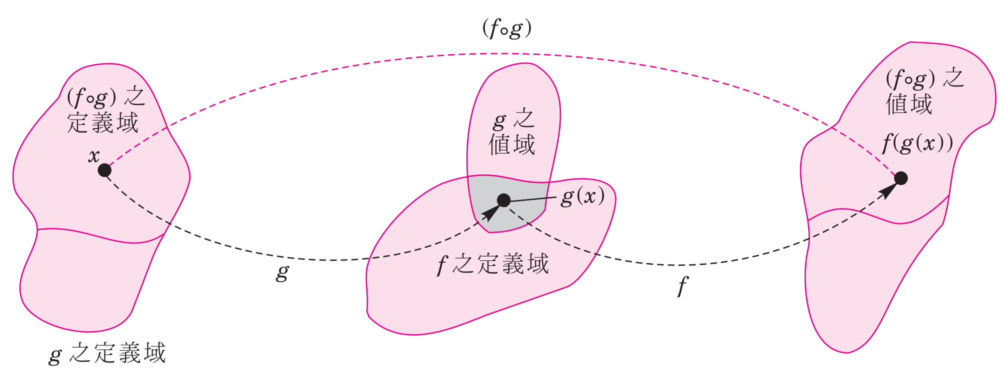


圖 21

5 反函數

依照函數的定義，若兩實數子集之間的逆對應如果能符合函數的關係，這就產生了下面定義所給出的觀念.

定義 11

若兩函數 f 與 g 滿足：
對 g 的定義域中的每一 x 恆有 $f(g(x))=x$，且對 f 的定義域中的每一 x 恆有 $g(f(x))=x$，則我們稱 f 為 g 的**反函數** (inverse function) 或 g 為 f 的**反函數**.

我們可證得一函數的反函數是唯一. 函數 f 的反函數通常記為 f^{-1} (唸成 "f inverse")；於是,

$$f(f^{-1}(x))=x,\ \forall\ x\in D_{f^{-1}},\ f^{-1}(f(x))=x,\ \forall\ x\in D_f.$$

注意：符號 f^{-1} 並不表示 $1/f$.

依定義 11，我們得知

f^{-1} 的定義域$=f$ 的值域
f^{-1} 的值域$=f$ 的定義域

已知函數 f，我們將對下面兩個問題感到興趣：

1. f 有反函數嗎？
2. 若有，我們如何求它？

欲回答第一個問題，我們必須瞭解在 f 有反函數時，f 與 f^{-1} 的圖形之間有何關係是很有用的.

定理 6 反函數的鏡射性質

f 的圖形包含 $(a,\ b)\Leftrightarrow f^{-1}$ 的圖形包含點 $(b,\ a)$.

定理 7 反函數存在定理

若 f 爲一對一函數，則 f 有反函數.

我們由定理可知具有反函數的函數恰爲那些是一對一的函數. 設 f 爲這種函數，則如何求 $f^{-1}(x)$ 呢？今列出三個步驟，如下：

步驟 1：寫成 $y=f(x)$.
步驟 2：求解方程式 $y=f(x)$ 的 x (以 y 表之).
步驟 3：x 與 y 互換，可得 $f^{-1}(x)$.

6 三角函數

正銳角 θ 的正弦、餘弦、正切、餘切、正割與餘割定義爲直角三角形之邊的比. 利用圖 22，這些三角函數之定義的形式爲：

正弦函數 $\sin\theta=\dfrac{\theta\text{ 的對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{y}{r}$

餘弦函數 $\cos\theta=\dfrac{\theta\text{ 的鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{x}{r}$

正切函數 $\tan\theta=\dfrac{\theta\text{ 的對邊}}{\theta\text{ 的鄰邊}}=\dfrac{y}{x}$

餘切函數 $\cot\theta=\dfrac{\theta\text{ 的鄰邊}}{\theta\text{ 的對邊}}=\dfrac{x}{y}$

正割函數 $\sec\theta=\dfrac{\text{斜邊}}{\theta\text{ 的鄰邊}}=\dfrac{r}{x}$

餘割函數 $\csc\theta=\dfrac{\text{斜邊}}{\theta\text{ 的對邊}}=\dfrac{r}{y}$

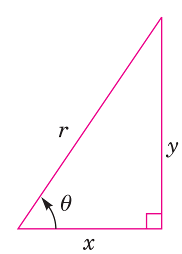


圖 22

註：三角函數的值僅僅與 θ 的大小有關，而與斜邊 r 的大小無關.

因直角三角形不可能有大於 90° 的角，故假使 θ 爲鈍角，則上述定義中的三角函數不適用. 欲獲得適合所有角 θ 的三角函數的定義，我們取下列的方法：在 xy-平面上讓 θ 角位於標準位置，然後作出圓心在原點且半徑爲 r 的圓，令該角的終邊與

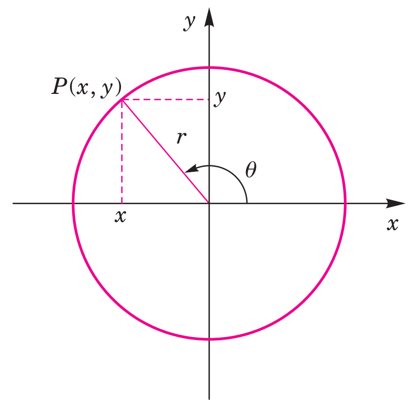


圖 23

圓的交點為 $P(x, y)$，如圖 23 所示。

因此，我們給出下面的定義：

定義 12

$$\sin\theta=\frac{y}{r}\qquad\cos\theta=\frac{x}{r}\qquad\tan\theta=\frac{y}{x}$$

$$\cot\theta=\frac{x}{y}\qquad\sec\theta=\frac{r}{x}\qquad\csc\theta=\frac{r}{y}$$

定義 12 適合所有的角——正角 (即，逆時鐘方向的角)、負角 (即，順時鐘方向的角)、銳角與鈍角。若 θ 的終邊在 y-軸上，則 $\tan\theta$ 與 $\sec\theta$ 無定義 (因 $x=0$)，而若 θ 的終邊在 x-軸上，則 $\cot\theta$ 與 $\csc\theta$ 無定義 (因 $y=0$)。

由於 r 恒為正，故 θ 角之三角函數的正、負號與 θ 所在象限有關，今列表如下：

函數 \ 象限	一	二	三	四
$\sin\theta$, $\csc\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$, $\sec\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$, $\cot\theta$	+	−	+	−

此外,

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta},\quad \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta},\quad \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta},$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

在微積分裡，角是用**弧度** (radian) (或**弳**) 來度量而不是用度、分與秒來度量，因它簡化了許多重要公式.

$$180^\circ=\pi \text{ 弧度}\approx 3.14159\cdots \text{ 弧度}$$

$$1^\circ=\frac{\pi}{180} \text{ 弧度}\approx 0.01745 \text{ 弧度}$$

$$1 \text{ 弧度}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ\approx 57^\circ 17' 44.8''$$

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

下面列舉一些常用的三角公式：

1. $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$，$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$.
2. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$，$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$，$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\csc\theta$.
3. $\sin(-\theta)=-\sin\theta$，$\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\tan(-\theta)=-\tan\theta$，
   $\cot(-\theta)=-\cot\theta$，$\sec(-\theta)=\sec\theta$，$\csc(-\theta)=-\csc\theta$.
4. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
   $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
   $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
   $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.
5. $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$，$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$.
6. $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

在微積分裡，角的大小通常用弧度表示，例如，sin 3 表示 3 弧度的正弦函數值。因此，我們列出六個三角函數的定義域與值域及其圖形，如圖 24 所示。

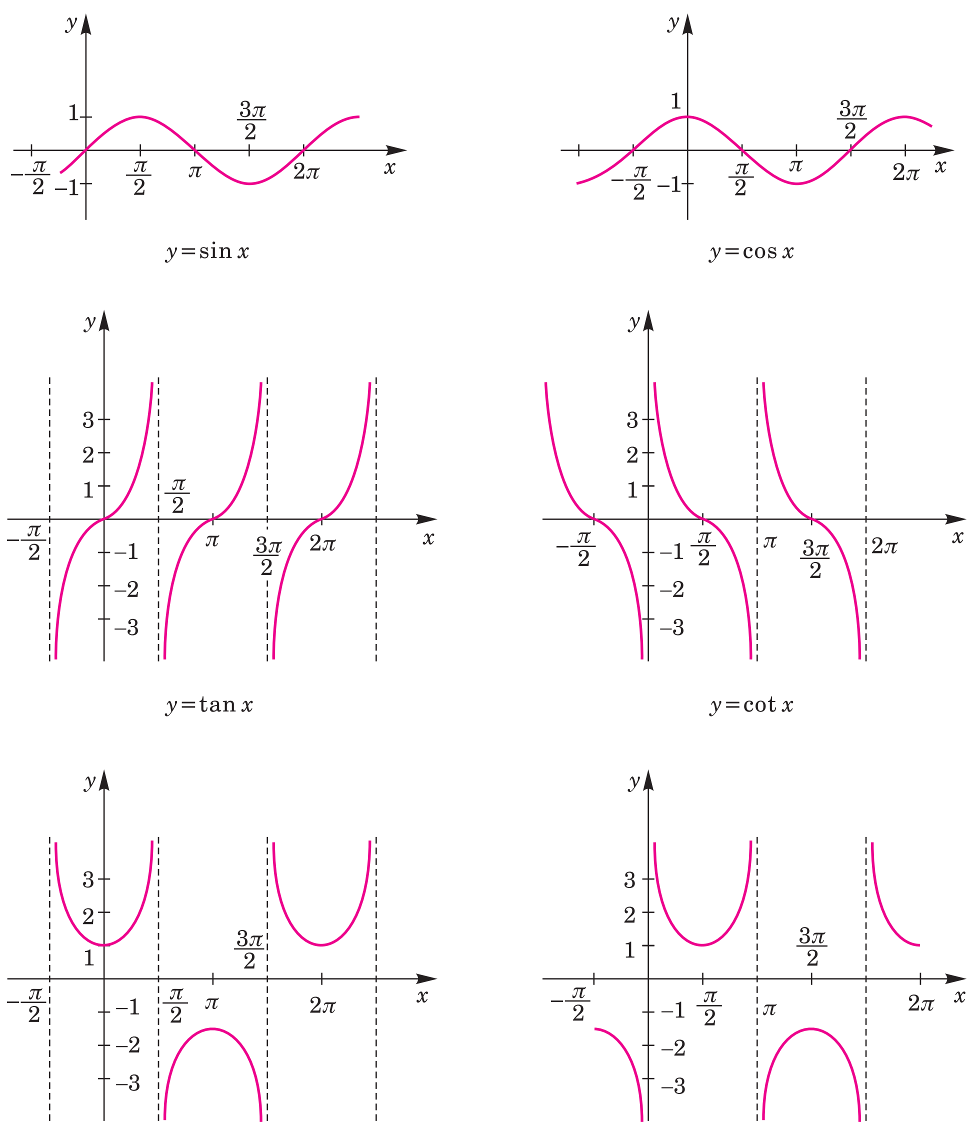


圖 24

函數	定義域	值　域
$y=\sin x$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$	$\{y \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\}$
$y=\cos x$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$	$\{y \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\}$
$y=\tan x$	$\left\{x \mid x \neq \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ n \in \mathbf{Z}\right\}$	$\{y \mid y \in \mathbb{R}\}$
$y=\cot x$	$\{x \mid x \neq n\pi,\ n \in \mathbf{Z}\}$	$\{y \mid y \in \mathbb{R}\}$
$y=\sec x$	$\left\{x \mid x \neq \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ n \in \mathbf{Z}\right\}$	$\{y \mid y \leqslant -1$ 或 $y \geqslant 1\}$
$y=\csc x$	$\{x \mid x \neq n\pi,\ n \in \mathbf{Z}\}$	$\{y \mid y \leqslant -1$ 或 $y \geqslant 1\}$

定義 13

設 f 爲定義於 $A \subset \mathbb{R}$ 的函數，且 $f(A) \subset \mathbb{R}$，若存在一正數 p，使得

$$f(x+p)=f(x)$$

對任一 $x \in A$ 均成立，則稱 f 爲**週期函數** (periodic function)，而使得上式成立的最小正數 p 稱爲函數 f 的**週期** (period).

定理 8

若 p 爲 $f(x)$ 所定義函數的週期，則 $f(kx)$ 所定義的函數亦爲週期函數，其週期爲 $\dfrac{p}{k}$ $(k>0)$.

7 反三角函數

因爲三角函數是週期函數，不是一對一函數，所以若想使三角函數的逆對應符合函數關係，我們須將三角函數的定義域加以限制，以使三角函數成爲一對一的函數關係，如此我們的逆對應就能符合一對一．我們在限制條件下建立三角函數的反函數，也就是反三角函數．

定義 14

反正弦函數 (arcsine function)，記爲 $\sin^{-1}$，定義如下：

$$\sin^{-1}x=y \Leftrightarrow \sin y=x$$

其中 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 且 $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$.

反餘弦函數 (arccosine function)，記爲 $\cos^{-1}$，定義如下：

$$\cos^{-1}x=y \Leftrightarrow \cos y=x$$

其中 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 且 $0\leqslant y\leqslant\pi$.

反正切函數 (arctangent function)，記爲 $\tan^{-1}$，定義如下：

$$\tan^{-1}x=y \Leftrightarrow \tan y=x$$

其中 $-\infty<x<\infty$ 且 $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$.

反餘切函數 (arccotangent function)，記爲 $\cot^{-1}$，定義如下：

$$\cot^{-1}x=y \Leftrightarrow \cot y=x$$

其中 $-\infty<x<\infty$，$0<y<\pi$.

反正割函數 (arcsecant function)，記爲 $\sec^{-1}$，定義如下：

$$\sec^{-1}x=y \Leftrightarrow \sec y=x$$

$$|x|\geqslant 1,\ 0\leqslant y<\frac{\pi}{2}\ \text{或}\ \pi\leqslant y<\frac{3\pi}{2}$$

反餘割函數 (arccosecant function)，記爲 $\csc^{-1}$，定義如下：

$$\csc^{-1}x=y \Leftrightarrow \csc y=x$$

$$|x|\geqslant 1,\ 0<y\leqslant\frac{\pi}{2}\ \text{或}\ \pi<y\leqslant\frac{3\pi}{2}.$$

六個反三角函數之圖形如圖 25 所示.

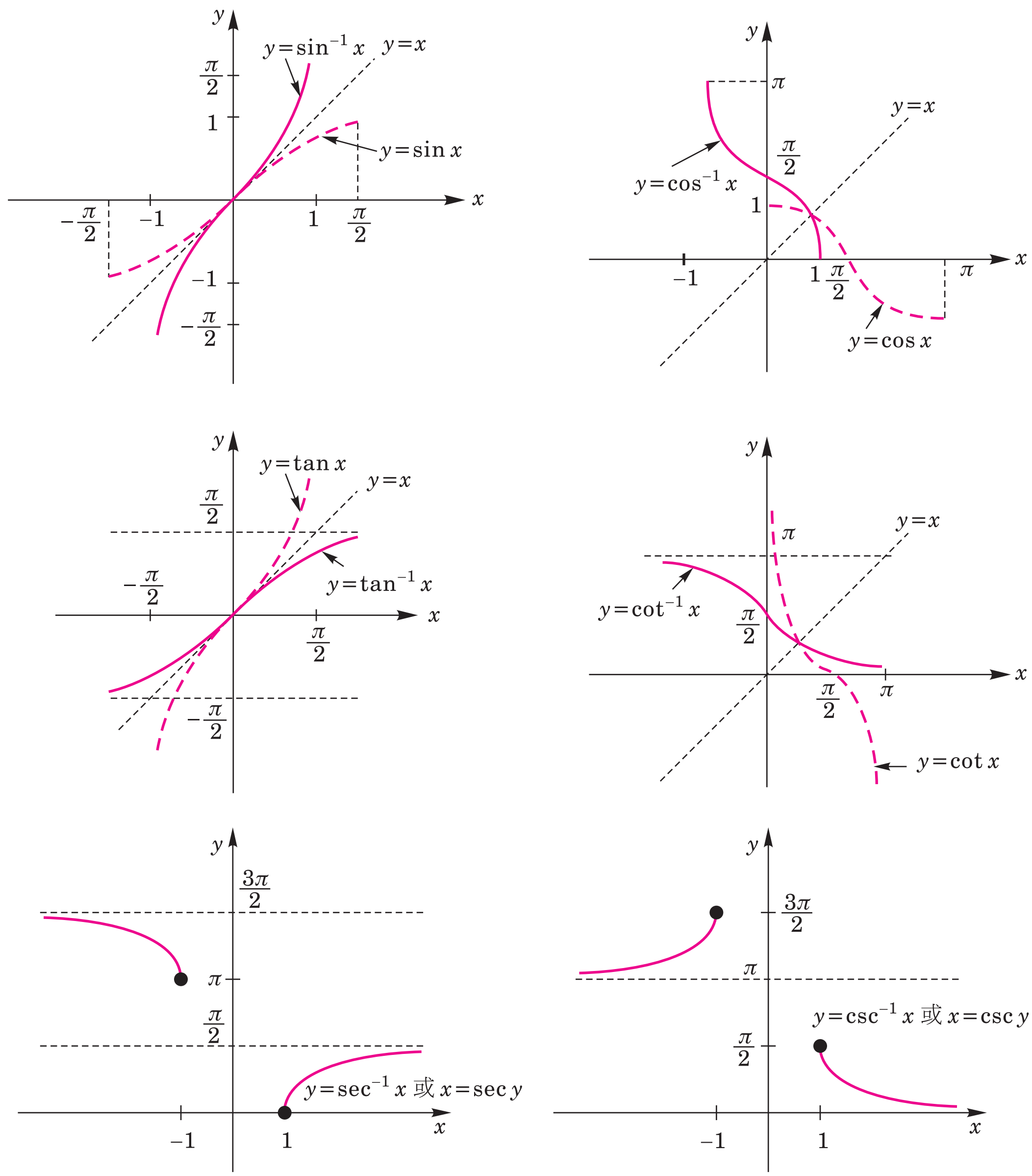

y=sin⁻¹x
y=x
y=sin x
y=cos⁻¹x
y=cos x
y=tan x
y=tan⁻¹x
y=cot⁻¹x
y=cot x
y=sec⁻¹x 或 x=sec y
y=csc⁻¹x 或 x=csc y

圖 25

定理 9

(1) $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$，$|x|\leqslant 1$

(2) $\sec^{-1}x+\csc^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$，$|x|\geqslant 1$

(3) $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$．$x\in\mathbb{R}$

8 指數函數

我們先回溯一下已學過的一般指數函數．

定義 15

若 $a>0$，且 $a\neq 1$，則函數 $y=a^x$ 稱爲以 a 爲底且 x 爲指數的**一般指數函數** (general exponential function)．

一般指數函數 $y=a^x$ 定義域爲 $(-\infty, \infty)$，值域爲 $(0, \infty)$，並具有下列的特性：

1. 它是一對一函數．
2. 它的圖形必通過點 $(0, 1)$．
3. 若 $a>1$，則函數在 $(-\infty, \infty)$ 上爲遞增；若 $0<a<1$，則函數在 $(-\infty, \infty)$ 上爲遞減．圖形如圖 26 所示．

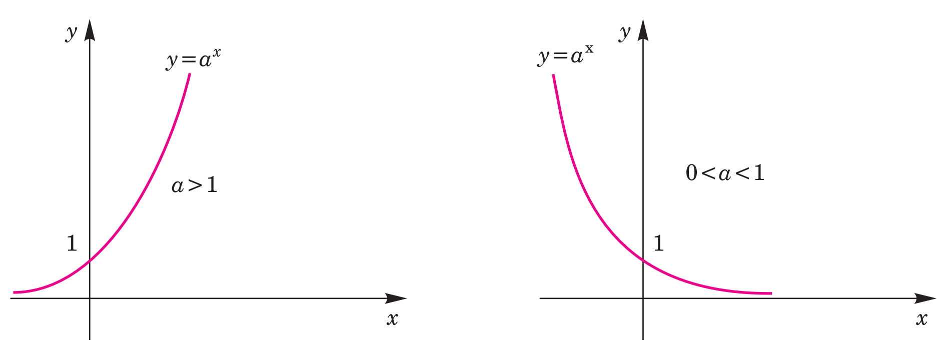


圖 26

定理 10　指數律 (laws of exponents)

設 a、$b>0$ 且 x、$y\in\mathbb{R}$，則

(1) $a^{x+y}=a^x a^y$　　(2) $a^{x-y}=\dfrac{a^x}{a^y}$

(3) $(a^x)^y=a^{xy}$　　(4) $(ab)^x=a^x b^x$.

定義 16

$$e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} \text{ 或 } e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

e 是一個無理數，稱爲**自然底數** (natural base)，其值約爲 2.71828⋯.

定義 17

以 e 爲底數的指數函數 $y=e^x=\exp(x)$ 稱爲**自然指數函數** (natural exponential function).

定理 11　指數律

(1) $e^{x+y}=e^x e^y$　　(2) $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$　　(3) $(e^x)^y=e^{xy}$.

9　對數函數

由於指數函數爲一對一函數，所以其反函數存在，如下：

定義 18

$$y=\log_a x \Leftrightarrow x=a^y,\ (a>0,\ a\neq 1)$$

y 稱爲以 a 爲底的**對數函數** (logarithmic function).

一般對數函數 $y=\log_a x$ 的定義域爲 $(0,\ \infty)$，值域爲 $(-\infty,\ \infty)$，並具有下列的特性：

1. 它是一對一函數.
2. 它的圖形必通過點 $(1,\ 0)$.
3. 若 $a>1$，則函數在 $(0,\ \infty)$ 上爲遞增；若 $0<a<1$，則函數在 $(0,\ \infty)$ 上爲遞減. 圖形如圖 27 所示.

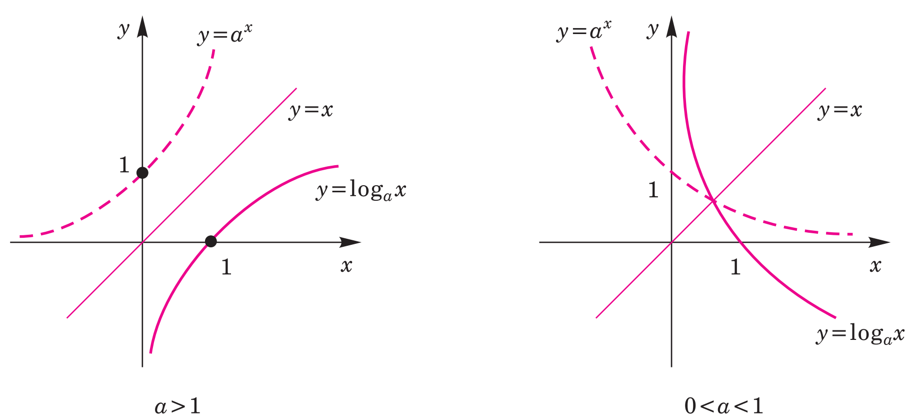


圖 27

以 e 爲底的對數稱爲自然對數，記爲 ln. 因此，$y=\ln x$ 稱爲**自然對數函數** (natural logarithmic function).

由於指數函數與對數函數互爲反函數，故可得出下列二個關係式：

定理 12

$$a^{\log_a x}=x,\qquad \forall\ x>0$$
$$\log_a a^x=x,\qquad \forall\ x\in\mathbb{R}.$$

註： 在定理 12 中，若 a 換成 e，則關係亦成立.

定理 13

設 $a>0$，$a\neq 1$，$x>0$，$y>0$，則

(1) $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$

(2) $\log_a\dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$

(3) $\log_a x^r=r\log_a x$，$r\in\mathbb{R}$.

定理 14

設 $x>0$，$y>0$，則

(1) $\ln(xy)=\ln x+\ln y$

(2) $\ln\dfrac{x}{y}=\ln x-\ln y$

(3) $\ln x^r=r\ln x$，$r\in\mathbb{R}$.

定理 15 換底公式 (change of base formula)

設 $a>0$，$a\neq 1$，$b>0$，$b\neq 1$，$c>0$，則 $\log_a c=\dfrac{\log_b c}{\log_b a}$.

定理 16

設 $a>0$，$x\in\mathbb{R}$，則 $a^x=e^{x\ln a}$.