習題解答

第一章　一階常微分方程式

習題 1-1

1. (1) 三階一次線性微分方程式　(2) 二階一次非線性微分方程式
(3) 二階一次線性微分方程式　(4) 四階一次非線性微分方程式
(5) 二階三次非線性微分方程式　(6) 四階一次線性微分方程式

2. (1) $y''+y=x^2+2$　(2) $y'\cos x+y\sin x=0$
(3) $x^3y''-4x^2y'+6xy=0$　(4) $y''-y=0$
(5) $y''-y'-2y=0$　(6) $y'''=0$

3. (1) 略　(2) 略　(3) 略　(4) 略　(5) 略

4. 略　**5.** 略　**6.** $m=-2, 2, 3$　**7.** 略

8. (1) $y=(x^2+2)e^{-x}$　(2) $y=\left(x^2+\frac{3}{e}\right)e^{-x}$

9. (1) $y=3e^{4x}+2e^{-3x}$　(2) $y=-2e^{-3x}$

10. 是

11. (1) 略　(2) 略　(3) 略

12. $y(x)=\frac{2}{\sqrt{3}-1}(\sin 2x-\cos 2x)$

習題 1-2

1. (1) $\frac{y^5}{5}+y=\frac{x^2}{2}+x+c$，其中 c 為常數.

(2) $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=\ln|y|+c$，其中 c 為常數.

(3) $y^3+e^y=\sin x+c$，其中 c 為常數.

(4) $x+\ln|x-1|+y-\ln|y+1|=c$，其中 c 為常數.

(5) $y=\pm Be^{(x+1)e^{-x}}=ke^{(x+1)e^{-x}}$，其中 $k=\pm B$.

(6) $\tan^{-1}x-\tan^{-1}y=c$，其中 c 為常數.

(7) $(x^2-1)^3=kx^4y^2$，其中 $k=\pm e^{2c}$.

(8) $x(v^2+1)=kv$，其中 $k=\pm e^c$.

2. (1) $\frac{1}{2}e^{x^2}+\frac{1}{6}y^6-y=\frac{1}{2}$

(2) $\frac{x^3}{3}+x+\ln|y|=-\frac{4}{3}$

(3) $y^4-2y^2+4\ln|y|=x^4-4x-1$

(4) $\ln(1+x^2)-\ln|1+y|=\ln 5$

(5) $\frac{y^2}{2}+2y+\cos x=1$

(6) $e^y+ye^{-y}+e^{-y}=4-2\cos x$

習題 1-3

1. (1) 2 次　(2) 零次　(3) $-\frac{2}{3}$ 次　(4) 2 次　(5) 零次

2. 略

3. (1) $\ln|x|=e^{-y/x}+c$

(2) $-2\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln|y|=c$

(3) $e^{-1}-e^{-y/x}=\ln|x|$

(4) $\ln|y|+\frac{1}{6}\ln\left|3\left(\frac{x}{y}\right)^4+1\right|=c$

(5) $x=-\frac{t}{\ln c|t|}$；$t\neq 0$，$c>0$

(6) $\frac{y}{1+e^{\left(\frac{x}{y}\right)^2}}=A$

(7) $\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2=\ln|x|+c$

(8) $y\left(2e^{\frac{x}{y}}+\frac{x}{y}\right)=B$

(9) $\sin-1\left(\frac{y}{x}\right)=\ln|kx|$

習題 1-4

1. $M(x,\ y)=ye^{xy}+y^2-\frac{y}{x^2}+k(x)$

2. $N(x,\ y)=\frac{2}{xy^3}-\frac{3\ln|x|}{y^4}+f(y)$

3. (1) $x^3+2x^2y+y^2=c$，其中 c 為常數.

(2) $y\sin x+x^2e^y+2y=c$，其中 c 為常數.

(3) $y^3x+y^2\cos x-\frac{x^2}{2}=c$，其中 c 為常數.

(4) $ye^{x^2}-x^2=c$，其中 c 為常數.

(5) $y\sin x+x\cos y=c$，其中 c 為常數.

(6) $x^2y^2-y^2-2y=c$，其中 c 為常數.

(7) $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\tan^{-1}\frac{x}{y}=c$，其中 c 為常數.

(8) $x^2\sin\frac{y}{x}=c$，其中 c 為常數.

(9) $x^2+\frac{x}{y}+\ln|y|=c$，其中 c 為常數.

(10) $\frac{s(s-1)}{t}=c$，其中 c 為常數.

(11) $y=\frac{k}{x}$，其中 $k=\left[\frac{-1}{c(n-1)}\right]^{\frac{1}{n-1}}$.

4. (1) $y^2(1-x^2)-\cos^2 x=3$

(2) $y\sin^2 x-y^2\cos x=-9$

(3) $x^2y+y=-25$

習題 1-5

1. 略　**2.** 略　**3.** 略　**4.** $y\ln x+x=c$

5. $x^2e^y+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{x}{y^3}=c$

6. $ye^{x^3}-\dfrac{1}{3}e^{x^3}=c$ 為所求，其中 c 為常數.

7. $xe^{-y^2}=c$ 或 $x=ce^{y^2}$ 為所求，其中 c 為常數.

8. $x^9y^6e^{y^3}=k$ 為所求，其中 $k=\left(\dfrac{c}{3}\right)^9$.

9. $xy^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{y}}=c$ 為所求，其中 c 為常數.

10. $\dfrac{1}{2}x^2y^2-\ln|y|=c$ 為所求，其中 c 為常數.

11. $\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{2x^2y^2}+\dfrac{1}{2y^2}=c$

12. $\sin^{-1}(xy)+\ln|x|=c$

13. $\dfrac{x^2}{2}+\tan^{-1}\dfrac{y}{x}=c$

14. $\ln|xy|+y=c$ 為所求，其中 c 為常數.

習題 1-6

1. $y=\dfrac{1}{2}(\sin x-\cos x)+ce^{-x}$，其中 c 為常數.

2. $y=-\dfrac{1}{2}+ce^{x^2}$，其中 c 為常數.

3. $y=\dfrac{\sin 5x}{5x^2}+\dfrac{c}{x^2}$

4. $y=\dfrac{1}{4}+\dfrac{c}{(x^2+1)^2}$，其中 c 為常數.

5. $xe^{-\frac{3}{y}}=\dfrac{1}{3}e^{-\frac{3}{y}}+c$，其中 c 為常數.

6. $y=(1+x^2)(\tan^{-1}x+c)$

7. $y=(x+c)\cos x$，其中 c 為常數.

8. $x=\dfrac{1}{2}\ln y+\dfrac{c}{\ln y}$，其中 c 為常數.

9. $y=-2\cos^2 x+c\cos x$，其中 c 為常數.

10. $\sin y=\dfrac{x^3-3x+3c}{3(x+1)}$，其中 c 為常數.

11. $x^2y^2=x^3-3x^2+c$

12. $y=x^4-2x^2$

13. $y=\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{3}e^{-x^3}$

14. $r=\cos\theta\sin\theta+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta$

15. $x(t)=t\sin t+\cos t+\sin t$

16. 略

17. $y(y+2)=1+Be^{-x^2}$，其中 B、c 皆為常數.

習題 1-7

1. $y=\dfrac{1}{1+ce^{\frac{x^2}{2}}}$，其中 c 為常數.

2. $y=\dfrac{1}{-x^2+cx}$，其中 c 為常數.

3. $\dfrac{1}{y^2}=x+\dfrac{1}{2}+ce^{2x}$，其中 c 為常數.

4. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^3(2x^3+c)}}$，其中 c 為常數.

5. $x^2=2+\dfrac{c}{te^t}$，其中 c 為常數.

6. $\dfrac{1}{y-1}=x+ce^x$，其中 c 為常數.

7. $y=\dfrac{1}{x^2\left(\dfrac{3}{2}\ln|x|+c\right)}$，其中 c 為常數.

8. $\dfrac{e^x}{y-1}=(x-1)e^x+c$，其中 c 為常數.

9. $\dfrac{x}{y-x}=-\dfrac{1}{2}+ce^{4x}$，其中 c 為常數.

10. $y^3=\dfrac{1}{-1-2x+ce^x}$，其中 c 為常數.

11. $\dfrac{x^2}{y^2}=-\dfrac{2}{3}x^3\left(\dfrac{2}{3}+\ln x\right)+c$，其中 c 為常數.

12. $y^4=x^2+15x^{-2}$

13. $x^2y=4$

習題 1-8

1. $y=-x+c$

2. $x^2+y^2=cx$，其中 c 為常數.

3. $2x^2+y^2=2c\ (c>0)$

4. $xy=c$，其中 c 為常數.

5. $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\tan^{-1}\frac{y}{x}=k$，$k$ 為常數.

6. $x-\frac{x^2}{x}-xy+\frac{y^2}{2}+y=k$，其中 k 為常數.

7. $y^2-x^2=B$，其中 B 為常數.

8. 2.71 小時

9. $N(t)=N_0e^{-\frac{\ln 2}{20}t}$

10. 略

11. (1) 39.6 分鐘　(2) 70.5℃

12. $Q=95.1$ 磅

13. 13.9 分鐘

14. (1) 100 呎　(2) 4 秒鐘　(3) −80 呎／秒

15. $I(t)=\frac{1}{10}\left(1-e^{-50t}\right)$

16. $I(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

17. (1) $I(t)=5(1-e^{-3t})$　(2) 4.75 安培　(3) 5

18. $I(t)=\frac{5}{101}(\sin 30t-10\cos 30t)+\frac{50}{101}e^{-3t}$.

19. $Q(t)=3(1-e^{-4t})$，$I(t)=12e^{-4t}$

第二章　高階線性微分方程式

習題 2-1

1. (1) 線性獨立　(2) 線性獨立　(3) 線性相依

2. (1) 略　(2) $y=c_1x^2+c_2\frac{1}{x^2}$，其中 c_1、c_2 為常數　(3) $y=\frac{x^2}{4}+\frac{8}{x^2}$

3. (1) 略　(2) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$，其中 c_1、c_2 為常數　(3) $y=3e^{2x}-e^{3x}$

4. $y_2=-\frac{\cos x}{x}$

5. $y_2=-\frac{e^{-x}}{2x}$

6. $y_2=x$

7. $y_2=-x-1$，$y=c_1e^{2x}+c_2(-x-1)$

8. $y_2=\begin{cases} x^2\ln|x|, & x>0 \\ -x^2\ln|x|, & x<0 \end{cases}$，$y=c_1x^2+c_2x^2\ln|x|$　　**9.** $f(x)=x^3+3x+1$

10. $y=x^2+c_1x\ln|x|+c_2x$ (因 c_2 為任意常數)

習題 2-2

1. $y=c_1e^{-6x}+c_2e^{7x}$　　**2.** $y=e^{-2x}\left(c_1e^{2\sqrt{2}x}+c_2e^{-2\sqrt{2}x}\right)$

3. $y=e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}\left(c_1\cos\dfrac{5}{2}x+c_2\sin\dfrac{5}{2}x\right)$　　**4.** $y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x$

5. $y=e^{\frac{3}{4}x}\left(c_1\cos\dfrac{\sqrt{23}}{4}x+c_2\sin\dfrac{\sqrt{23}}{4}x\right)$　　**6.** $y=e^{2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$

7. $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}$　　**8.** $y=c_1e^x+(c_2\cos x+c_3\sin x)$

9. $y=c_1e^x+e^{-x}(c_2\cos x+c_3\sin x)$　　**10.** $y=(c_1+c_2x)e^x+c_3e^{3x}$

11. $y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{2x}$

12. $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}+(c_3\cos\sqrt{2}x+c_4\sin\sqrt{2}x)$

13. $y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x$

14. $y=(c_1+c_2x)+e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_3\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+c_4\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

15. $y=e^x-2e^{2x}+e^{3x}$　　**16.** $y=e^{2x}+\cos 2x-\sin 2x$

17. $y=e^x(4\cos 3x-\sin 3x)$

習題 2-3

1. (1) 略　(2) $y_c=c_1e^x+c_2e^{2x}$　(3) 略　(4) $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+2x^2+6x+7$

2. $y=c_1\cos x+c_2\sin x+3x+\dfrac{1}{2}x\sin x$

3. $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+\dfrac{1}{2}e^{3x}+2x+3$

4. $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}-\left(\dfrac{1}{10}\cos 2x+\dfrac{3}{10}\sin 2x\right)$

5. $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x-2x\cos 2x$

6. $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}+\frac{1}{2}x^3e^{-2x}$

7. $y=e^{\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)+\left(\frac{5}{32}-\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}x^2\right)e^{2x}$

8. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-4x}+\left(\frac{1}{13}\sin x-\frac{3}{26}\cos x\right)e^x$

9. $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+\frac{1}{2}x^2e^{2x}+e^x+\frac{1}{4}$

10. $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+c_3e^{-3x}+\frac{7}{10}x^2e^{2x}$

11. $y=c_1+c_2e^{2x}-\frac{1}{2}e^x\sin x$

12. $y=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x+\ln|\csc x-\cot x|+\cos x\ln|\csc x|-x\sin x$

13. $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}+\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)e^x$

14. $y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x-\frac{x}{12}\cos 3x+\frac{1}{36}\sin 3x\ln|\sin 3x|$

15. $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\cos x\ln|\sec x+\tan x|$

16. $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+x_2e^{-x}\left(\frac{1}{2}\ln x-\frac{3}{4}\right)$

17. $y=c_1e^x+c_2xe^x+e^x(-x+x\ln|x|)$

18. $y=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x+\ln|\sec x|-\sin x\ln|\sec x+\tan x|$

習題 2-4

1. $y_p=2x^2-1$　　**2.** $y_p=x^2+3x$　　**3.** $y_p=\frac{e^{2x}}{2}$

4. $y_p=-\sin x-3\cos x$　　**5.** $y_p=x(\sin x-\cos x)$　　**6.** $y_p=\frac{1}{9}x^3+\frac{4}{9}x^2+\frac{26}{27}x$

7. $y_p=\frac{1}{15}(2\cos 2x-\sin 2x)+\frac{1}{80}(-3\sin 3x-\cos 3x)$

8. $y_p=-\dfrac{e^x}{73}(8\cos 2x-3\sin 2x)$

9. $y_p=e^{-3x}\left[\dfrac{1}{28}x+\dfrac{39}{(28)^2}\right]$

10. $y_p=\dfrac{1}{10}xe^{3x}$

11. $y_p=\dfrac{1}{2}x^2e^{2x}+2xe^x-\dfrac{1}{6}e^{-x}$

12. $y_p=\dfrac{1}{2}e^{3x}(x^2-x)-\dfrac{3}{8}e^x(\cos 2x+\sin 2x)$

習題 2-5

1. $y=c_1x^{-2}+c_2x^2$

2. $y=c_1x^{1/2}+c_2x^3$

3. $y=x^{-2}[c_1\cos(3\ln x)+c_2\sin(3\ln x)]$

4. $y=c_1x^{-1}+c_2x+c_3x^2$

5. $y=c_1+(c_2+c_3\ln x)x^2$

6. $y=c_1(2x+1)^{-1}+c_2(2x+1)^3$

7. $y(x)=4x^{-1}-3x^{-2}$

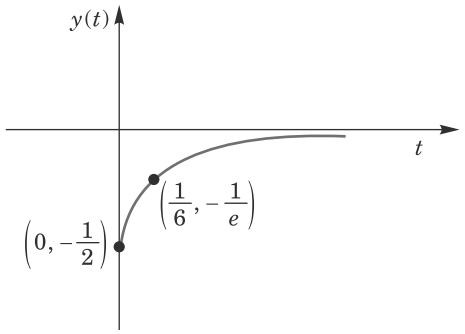
習題 2-6

1. 頻率 $f=\dfrac{7\sqrt{10}}{2\pi}$ (赫茲)，週期 $T=\dfrac{1}{f}=\dfrac{2\pi}{7\sqrt{10}}$ (秒)

2. (1) $y(t)=\dfrac{1}{6}\cos 8t+\dfrac{1}{4}\sin 8t$

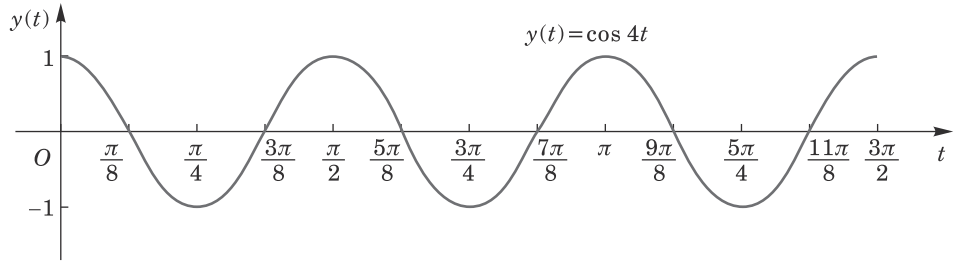
(2) $y(t)=-\dfrac{1}{6}\cos 8t+\dfrac{1}{4}\sin 8t$

3. $y(t)=-\dfrac{1}{2}e^{-6t}(1+6t)$ 呎



4. 略

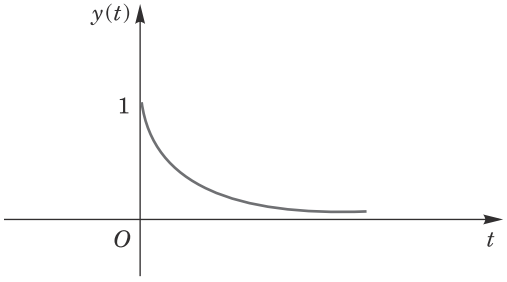
5. $f=\dfrac{2}{\pi}$



6. 簡諧運動

7. $Y(t)=\dfrac{1}{15}(\cos t-\sin t).$

8. $y(t)=e^{-t}\,(1+t)$



9. $Q(t)=\dfrac{4}{697}\left[\dfrac{e^{-20t}}{3}(-63\cos 15t-116\sin 15t)+(21\cos 10t+16\sin 10t)\right]$

$I(t)=\dfrac{1}{2091}[e^{-20t}\,(-1920\cos 15t+13{,}060\sin 15t)$

$+120\,(-21\sin 10t+16\cos 10t)]$

10. 全態電流 $I=e^{-2t}\,(c_1\cos 4t+c_2\sin 4t)+\cos 4t+4\sin 4t$

穩態電流 $I=\cos 4t+4\sin 4t$

11. $Q(t)=\cos t+\dfrac{1}{3}\sin t-\dfrac{1}{6}\sin 2t$

12. $Q(t)=Q_0\cos Kt+\dfrac{CE_0}{1-\omega^2\,LC}\left(\sin\omega t-\dfrac{\omega}{K}\sin Kt\right)$

第三章　微分方程式的級數解

習題 3-1

1. $y=c_0\left[1+x+\frac{1}{2!}(1+c_0)\,x^2+\frac{1}{3!}(1+5c_0+2c_0^2)x^3+\frac{1}{4!}(1+17c_0+26c_0^2+6c_0^3)x^4+\cdots\right]$

2. $y=c_0x+2(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{6}(x-1)^3+\frac{1}{12}(x-1)^4-\cdots$

3. $y=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{3}x^4+\cdots$

4. $y=c_0\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\cdots\right)+c_1\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\cdots\right)$

5. $y=c_0\left(1+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{180}x^6+\cdots\right)+c_1\left(x+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{504}x^7+\cdots\right)$

6. $y=c_0\left[1+\frac{1}{2}x^2-\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2k-3)}{2^k\,k!}x^{2k}\right]+c_1x$

7. $y=c_0\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{720}x^6+\cdots\right)$
$+c_1\left(x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{120}x^5+\frac{7}{360}x^6+\cdots\right)$

8. $y=c_0\left[1-\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{1}{6}(x-2)^3+\frac{1}{12}(x-2)^4-\frac{1}{20}(x-2)^5-\cdots\right]$
$+c_1\left[x-2-\frac{1}{2}(x-2)^2-\frac{1}{6}(x-2)^3+\frac{1}{6}(x-2)^4-\frac{1}{36}(x-2)^6+\cdots\right]$

9. $y=c_0\left(1-\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{45}x^6-\frac{2}{405}x^9-\cdots\right)+c_1\left(x-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{63}x^7-\frac{1}{567}x^{10}-\cdots\right)$
$+x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{45}x^6+\frac{1}{126}x^7+\frac{1}{405}x^9+\cdots$

10. $y=\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{54}x^3-\frac{1}{324}x^4-\frac{4}{1215}x^5+\cdots$

11. $y(x)=1-x+\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{6}(x-1)^3+\frac{1}{6}(x-1)^4+\cdots$

12. $y=1+3x+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\frac{5}{4}x^5+\cdots.$

習題 3-2

1. (1) $0,\ -1$　(2) 2　(3) $-\frac{1}{2}$　(4) -1

2. (1) $r^2-\frac{3}{2}r+\frac{1}{2}=0$　(2) $r^2+r=0$　(2) $(r+1)^2=0$

3. $y=c_1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n+1)}+c_2\sqrt{x}\,e^{-x/2}$

4. 略

5. $y=c_1\sqrt{x}\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{168}-\frac{x^6}{11088}+\cdots\right)+c_2x\left(1-\frac{x^2}{10}+\frac{x^4}{360}-\frac{x^6}{28080}+\cdots\right)$

6. $y=c_1\left(1-\frac{x_3}{24}+\frac{x_6}{2448}-\cdots\right)+c_2x^{1/3}\left(1-\frac{x^3}{30}+\frac{x^6}{3420}-\cdots\right)$

7. $y=c_1x^{1/2}\left(1-\frac{1}{6}x^2+\cdots\right)+c_2x^{-1/2}\left(1-\frac{1}{2}x^2+\cdots\right)$

第四章　拉普拉斯變換

習題 4-1

1. (1) $\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{2e^{-4s}-1}{s},\ s>0$　(2) $\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{5(1-e^{-3s})}{s}$

(3) $\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{e^{-\pi s}+1}{s^2+1}$　(4) $\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{3-4e^{-2s}+e^{-4s}}{s}$

(5) $\mathcal{L}\{\cos(at+b)\}=\frac{s\cos b-a\sin b}{s^2+a^2},\ s>0$

2. (1) 略　(2) 略　(3) 略　(4) 略

3. (1) $-2\sqrt{\pi}$ (2) $\dfrac{4\sqrt{\pi}}{3}$ (3) $\dfrac{8\sqrt{\pi}}{15}$

4. (1) 略 (2) $\mathcal{L}\{t^{-1/2}\}=\sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$, $s>0$ (3) $\mathcal{L}\{\sqrt{t}\}=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}s^{-3/2}$

5. 略

習題 4-2

1. (1) $\dfrac{4}{s^3}-\dfrac{3}{s^2}+\dfrac{4}{s}$

(2) $\dfrac{6}{s^4}+\dfrac{3}{s^2}-\dfrac{2}{s}$

(3) $\dfrac{216}{s^5}+\dfrac{12}{s^3}-\dfrac{16}{s}$

(4) $\dfrac{1}{s-\ln 10}+\dfrac{2}{s+1}$

(5) $\dfrac{8}{s(s^2+16)}$

(6) $\dfrac{s^2+2}{s(s^2+4)}$

(7) $\dfrac{1}{s^2+4}$

(8) $\dfrac{6s}{s^2+16}+\dfrac{15}{s^2+25}$

(9) $\dfrac{2}{(s-3)^3}$

(10) $\dfrac{5}{(s+2)^2+25}$

(11) $\dfrac{3(s-8)}{s^2+4s+40}$

(12) $\dfrac{s-\ln 2}{(s-\ln 2)^2+9}$

(13) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}(s+4)^{-3/2}$

(14) $\sqrt{\dfrac{\pi}{s-2}}$

2. $\mathcal{L}\{f(t)\}=\dfrac{2}{s^3}-\dfrac{120}{s^7}+\cdots$

3. (1) $3e^{3t/2}$

(2) $2\cos t+3\sin t$

(3) $2\cos 3t-6\sin 3t$

(4) $2\cos 5t+\dfrac{18}{5}\sin 5t$

(5) $4e^{-4t}(1-t)$

(6) $e^t\cos\sqrt{2}\,t$

(7) $2e^{2t}(3\cos 4t+\sin 4t)$

(8) $\dfrac{1}{4}e^{-t/2}+\dfrac{5}{8}te^{-t/2}$

(9) $te^t - e^t + 1$

(10) $e^{-t} + t - 1$

(11) $\dfrac{e^{3t}}{\sqrt{\pi t}}$

習題 4-3

1. $\dfrac{1}{4}(e^{5t} - e^t)$

2. $\dfrac{11}{3}e^{2t} - e^t + \dfrac{1}{3}e^{-t}$

3. $\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\cos 2t + \dfrac{1}{2}\sin 2t$

4. $-\dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{4}e^{-2t} + \dfrac{5}{2}te^{-2t}$

5. $1 + 4t - e^{-t}$

6. $\dfrac{1}{2}t^2e^{-t} - \dfrac{1}{6}t^3e^{-t}$

7. $(3t-5)e^{2t} + (2t+5)e^t$

8. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}e^{2t} + \dfrac{1}{4}e^{-2t}$

9. $\dfrac{1}{2}e^{-2t} - \dfrac{1}{2}\sin 2t$

10. $\dfrac{1}{16}e^{-3t} - \dfrac{1}{16}e^t + \dfrac{1}{4}te^t$

習題 4-4

1. (1) $\dfrac{2s}{(s^2+1)^2}$

(2) $\dfrac{2}{(s-1)^3}$

(3) $\dfrac{2a(3s^2 - a^2)}{(s^2 + a^2)^3}$

(4) $\dfrac{2s(s^2 - 3a^2)}{(s^2 + a^2)^3}$

(5) $\dfrac{s^2 - 4}{(s^2+4)^2}$

(6) $\dfrac{6}{(s-4)^4}$

(7) $\dfrac{105}{16}\sqrt{\pi}s^{-9/2}$

(8) $\dfrac{18(s^2 + 2s - 2)}{(s^2 + 2s + 10)^3}$

(9) $\ln\left|\dfrac{s+1}{s}\right|$

(10) $\dfrac{6ks^2 - 2k^3}{(s^2 + k^2)^3}$

2. (1) te^{2t}

(2) $\cos t - \dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{2}t\sin t$

(3) $\frac{1}{2}t\sinh 2t$

(4) $\frac{e^t \sin t}{t}$

習題 4-5

1. $y=\frac{1}{2}(e^{-x}-\cos x+\sin x)$

2. $y=(1+t)e^{-2t}$

3. $I=0.1-0.1e^{-50t}$

4. $y=5e^{2t}-2t^2$

5. $y=\cos t+t\sin t$

6. $y=\frac{1}{2}(e^t+te^t+\cos t)$

7. $y=x+\cos x-3\sin x$

8. $I=\frac{1}{2}e^{-2t}\sin 4t$

9. $y=te^t\left(\frac{1}{24}t^3+\frac{1}{2}t-1\right)$

10. $y=\sinh x-\sin x$

11. $x=2e^{-2t}-e^{-3t}$, $y=2(e^{-3t}-e^{-2t})$

12. $x=\sin t$, $y=\cos t$

13. $y=-\frac{1}{4}+\frac{7}{8}e^{2x}+\frac{3}{8}e^{-2x}$, $z=x-\frac{7}{4}+e^{2x}+\frac{3}{4}e^{-2x}$

14. $x=\frac{1}{10}(e^t-e^{-t}+te^{-t})$, $y=\frac{1}{20}(e^t-e^{-t}-4te^{-t})$

15. $x=e^t+e^{2t}$, $y=e^{2t}$

16. $w=e^x$, $y=e^x+e^{-x}$, $z=2e^{-x}$

習題 4-6

1. (1) : $\frac{1-e^{-2s}}{s}$

(2) : $\frac{2e^{-s}}{s^3}$

(3) : $\frac{s}{s^2+1}+e^{-\pi s}\cdot\frac{s}{s^2+1}-\frac{s(1+e^{-\pi s})}{s^2+1}$

(4) : $\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}$

(5) : $\frac{2e^{-2s}}{s}\left(2+\frac{2}{s}+\frac{1}{s^2}\right)$

(6) $\frac{3e^{-s}}{s}\left(1+\frac{3}{s}+\frac{4}{s^2}+\frac{4}{s^3}\right)$

2. (1) $\frac{1}{2}u(t-4)(t-4)^2$

(2) $\frac{1}{2}t^2-u(t-2)(t-2)^2+\frac{1}{2}u(t-4)(t-4)^2$

(3) $u\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)$

(4) $u(t-2)\cos 4(t-2)$

(5) $u(t-3)\,e^{-3(t-3)}\sin(t-3)$

3. $y=-1+\cos 4t+u(t-3)[1-\cos 4(t-3)]$

習題 4-7

1. $\dfrac{1}{s(1-e^{-s})}$

2. $\dfrac{1-e^{-s}(s+1)}{s^2(1-e^{-s})}$

3. $\dfrac{1-e^{-s}-se^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})}$

4. $\dfrac{e^{-2s}(s+1)+s-1}{s^2(1-e^{-2s})}$

5. $\dfrac{1}{2\pi s^2}-\dfrac{e^{-2\pi s}}{s(1-e^{-2\pi s})}\quad(s>0)$

6. $\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}\coth\dfrac{\pi s}{2\omega}$

7. $\dfrac{\omega}{(s^2+\omega^2)(1-e^{-\pi s/\omega})}$

8. $\dfrac{2}{s^2+4\pi^2}$

習題 4-8

1. $e^{3t}-e^{2t}$

2. $\dfrac{1}{12}x^4$

3. 略

4. (1) $t-\sin t$

(2) $\dfrac{1}{4}(1-\cos 2t)$

(3) $\dfrac{1}{16}(\sin 2t-2t\cos 2t)$

(4) $te^{-t}+2e^{-t}+t-2$

5. $y(t)=2e^{t}$

6. $y(t)=\sin t$

7. $y(t)=1+\dfrac{t^2}{2}$

8. $y(t)=1$

9. $y(t)=2$

10. $y(t)=1+\dfrac{1}{2}t^2$

習題 4-9

1. $I(t)=\dfrac{1}{R}\left[(1-e^{-Rt/L})+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,u(t-n)(1-e^{-R(t-n)/L})\right]$

2. $y(t)=3u(t-2)e^{-(t-2)}$

3. $y(t)=u(t-1)\sin(t-1)$

第五章　矩陣與線性方程組

習題 5-1

1. $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

2. $A=\begin{bmatrix}1&4\\4&7\\9&12\end{bmatrix}$

3. $A=\begin{bmatrix}1&-2&-2\\2&1&-2\\2&2&1\end{bmatrix}$, $A^T=\begin{bmatrix}1&2&2\\-2&1&2\\-2&-2&1\end{bmatrix}$

4. $A^T=\begin{bmatrix}2&3&0\\1&7&-1\\4&5&9\end{bmatrix}$

5. A、B、C 均非斜對稱矩陣，D 為斜對稱矩陣

6. [1], [2], [3], [4], $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$, [1, 3], [2, 4], $\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}$；共九個

習題 5-2

1. $\begin{cases}x=-2\\y=3\end{cases}$

2. $X=\begin{bmatrix}\frac{7}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

3. (1) $\begin{bmatrix}4&-1\\-5&-11\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}1&9&-9\\-5&4&-2\\8&5&-11\end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix}12&23\\-7&17\\0&52\end{bmatrix}$

4. $AB=\begin{bmatrix}15&-5&-10\\-5&21&6\\-10&6&11\end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix}21&-9&-2&-7\\-9&10&-3&0\\-2&-3&2&3\\-7&0&3&6\end{bmatrix}$

5. 是

6. $X=\begin{bmatrix}1&-2\\3&1\end{bmatrix}$

7. $A^2=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$，$A^3=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

8. (1) 略　(2) 略　**9.** (1) 略　(2) 略

10. $A^2=I_2$，$A^3=A$，$A^4=I_2$，$A^5=A$，$A^6=I_2$

11. 略　**12.** 略　**13.** 略　**14.** 略　**15.** 略

習題 5-3

1. (1) 不可逆　(2) $B^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$　(3) $C^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$

2. $A^{-1}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$　**3.** $A=\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & 1 \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$　**4.** $A=\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{16} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$

5. $x=2$　**6.** 略　**7.** $A=\mathbf{0}_{n\times n}$　**8.** 略

9. $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$　**10.** $\begin{bmatrix} -\frac{1}{12} & -\frac{1}{24} \\ \frac{5}{24} & \frac{1}{24} \end{bmatrix}$

習題 5-4

1. (1) 基本矩陣　(2) 非基本矩陣
(3) 基本矩陣　(4) 基本矩陣
(5) 非基本矩陣

2. (1) $\underbrace{7R_1+R_2}$　(2) $\underbrace{\frac{1}{6}R_3}$
(3) $\underbrace{R_1\leftrightarrow R_3}$，$\underbrace{R_3\leftrightarrow R_4}$　(4) $\underbrace{\frac{1}{5}R_3+R_1}$

3. (1) $\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$　(2) $\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

(3) $\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$　(4) $\boldsymbol{E}_4=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}$

4. (1) $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}7&-3\\-2&1\end{bmatrix}$　(2) $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&-\frac{5}{6}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}&\frac{7}{6}\end{bmatrix}$

(3) $\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&1&\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$　(4) $\boldsymbol{D}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\1&0&0&-1\\0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\-1&0&1&1\end{bmatrix}$

5. (1) $\boldsymbol{A}$ 為不可逆　(2) $\boldsymbol{B}$ 為不可逆

6. $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是簡約列梯陣；$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 不是簡約列梯陣

7. $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$

習題 5-5

1. (1) $x_1=-\frac{3}{4},\ x_2=-\frac{5}{4},\ x_3=\frac{13}{4}$　(2) $\begin{cases}x_1=2t\\x_2=\frac{5t-1}{3}=\frac{5t}{3}-\frac{1}{3},\ t\in\mathbb{R}\\x_3=t\end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} + s \\ x_2 = 1 + 2x - t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}$ $s \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$ (4) $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 2$

2. (1) $x_1 = -\dfrac{3}{4},\ x_2 = -\dfrac{5}{4},\ x_3 = \dfrac{13}{4}$ (2) $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2$

3. (1) $a = -3$ (2) 除 $a = \pm 3$ 之外的所有 a 值 (3) $a = 3$

4. (1) 有非明顯解 (2) 有明顯解 (3) 有非明顯解

5. (1) $x_1 = 5, x_2 = 4, x_3 = 7$ (2) $x_1 = \dfrac{3}{2},\ x_2 = \dfrac{1}{2},\ x_3 = \dfrac{3}{2}$

6. $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{t}{3} \\ x_2 = \dfrac{2}{3}t \\ x_3 = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

7. $\begin{bmatrix} 11 & 12 & -3 & 27 & 26 \\ -6 & -8 & 1 & -18 & -17 \\ -15 & -21 & 9 & -38 & -35 \end{bmatrix}$

習題 5-6

1. (1) -40 (2) -66 (3) -240 **2.** (1) 0 (2) 0 (3) 2 (4) -78

3. $A_{13} = -9$，$A_{23} = 0$，$A_{33} = 3$，$A_{43} = -2$

4. $\lambda = -4$ 或 1 或 0 **5.** 略 **6.** 略

7. (1) $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -7 & 8 & -13 \\ 5 & 4 & -15 \\ -4 & -10 & 12 \end{bmatrix}$ (2) -34 (3) 略

8. $\lambda = -5$ 或 0 或 3 **9.** $\lambda = 4$ 或 0

10. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{15}{34} \\ -\dfrac{1}{34} \\ -\dfrac{6}{34} \end{bmatrix}$ **11.** 略 **12.** 略

13. (1) 有一組非明顯解　　(2) 只有明顯解

14. (1) $x_1=4$，$x_2=8$，$x_3=19$　　(2) $x_1=3$，$x_2=-2$，$x_3=1$，$x_4=2$

習題 5-7

1. (1) $\boldsymbol{P}(\lambda)=\lambda^2-5\lambda+7$　　(2) $\boldsymbol{P}(\lambda)=\lambda^2-4$

(3) $\boldsymbol{P}(\lambda)=\lambda^2+3$　　(4) $\boldsymbol{P}(\lambda)=\lambda^3-4\lambda^2+7$

(5) $\boldsymbol{P}(\lambda)=\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8$

2. (1) $\lambda=2$ 或 3

(i) $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 為對應於 $\lambda=2$ 之特徵向量

(ii) $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ 為對應於 $\lambda=3$ 之特徵向量

(2) $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=4$

(i) $\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$ 為 $\boldsymbol{A}$ 對應於 $\lambda_1=1$ 之特徵向量

(ii) $\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ 為 $\boldsymbol{A}$ 對應於 $\lambda_2=2$ 之特徵向量

(iii) $\mathbf{x}_3=\begin{bmatrix}7\\-4\\2\end{bmatrix}$ 為 $\boldsymbol{A}$ 對應於 $\lambda_3=4$ 之特徵向量

(3) $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=3$

(i) $\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$ 為 $\boldsymbol{A}$ 對應於 $\lambda_1=0$ 之特徵向量

(ii) $\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}-2\\-3\\1\end{bmatrix}$ 為 $\boldsymbol{A}$ 對應於 $\lambda_2=2$ 之特徵向量

(iii) $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$ 為 $\boldsymbol{A}$ 對應於 $\lambda_3=3$ 之特徵向量.

習題 5-8

1. (1) $\boldsymbol{A}$ 為可對角線化矩陣　(2) $\boldsymbol{A}$ 為不可對角線化矩陣
(3) $\boldsymbol{A}$ 為可對角線化矩陣　(4) $\boldsymbol{A}$ 為可對角線化矩陣
(5) $\boldsymbol{A}$ 為不可對角線化矩陣

2. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

習題 5-9

1. (1) $e^{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}-e^2+2e & -e^2+e\\ 2e^2-2e & 2e^2-e\end{bmatrix}$　(2) $e^{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}e^3 & 2e^2-2e^3 & -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}e^3\\ 0 & e^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

(3) $e^{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}2e^2-e^3 & -2e+2e^2 & \frac{e}{2}-\frac{e^3}{2}\\ -e^2+e^3 & 2e-e^2 & -\frac{e}{2}+\frac{e^3}{2}\\ -4e^2+4e^3 & 4e-4e^2 & -e+2e^3\end{bmatrix}$

2. $e^{\boldsymbol{A}t}=\begin{bmatrix}-e^{2t}+2e^{2t} & -e^{2t}+e^t\\ 2e^{2t}-2e^t & 2e^{2t}-e^t\end{bmatrix}$

第六章　向量分析

習題 6-1

1. $\overrightarrow{P_1P_2}=-3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$，$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\sqrt{14}$

2. (1) $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}-\mathbf{c}=-10\mathbf{i}-4\mathbf{j}+8\mathbf{k}$　(2) $\left|2\mathbf{a}+3\mathbf{b}-\mathbf{c}\right|=6\sqrt{5}$

3. $\frac{3}{\sqrt{59}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{59}}\mathbf{j}-\frac{7}{\sqrt{59}}\mathbf{k}$, $-\frac{15}{\sqrt{59}}\mathbf{i}-\frac{5}{\sqrt{59}}\mathbf{j}+\frac{35}{\sqrt{59}}\mathbf{k}$

4. $\left(\frac{4}{3},\ 1,\ \frac{4}{3}\right)$

5. $\mathbf{u}=\frac{3}{7}\mathbf{i}+\frac{6}{7}\mathbf{j}-\frac{2}{7}\mathbf{k}$

6. $a=-2, b=1, c=-3$

7. $\angle ABC=13.11°$

8. $\text{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}=\frac{5}{19}\mathbf{i}+\frac{5}{19}\mathbf{j}-\frac{5}{19}\mathbf{k}$, $\left|\text{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}\right|=\frac{5}{\sqrt{19}}$

9. $\left|\text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}\right|=\frac{4}{\sqrt{59}}$

10. $\mathbf{u}=\left\langle\frac{6}{25},\ \frac{12}{25},\ -\frac{3\sqrt{5}}{25}\right\rangle+\left\langle-\frac{81}{25},\ \frac{13}{25},\ -\frac{22\sqrt{5}}{25}\right\rangle$

11. 24 呎磅　**12.** 略　**13.** 略　**14.** 略

15. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-6\mathbf{i}+13\mathbf{j}+8\mathbf{k}$

16. $\frac{4}{9}\mathbf{i}+\frac{1}{9}\mathbf{j}+\frac{8}{9}\mathbf{k}$ 及 $-\frac{4}{9}\mathbf{i}-\frac{1}{9}\mathbf{j}-\frac{8}{9}\mathbf{k}$

17. $3\sqrt{5}$　**18.** $\sqrt{638}$　**19.** $\frac{3\sqrt{33}}{2}$　**20.** 69

21. $\frac{1}{6}\left|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\right|$　**22.** $\frac{88}{3}$　**23.** $4x+7y-5z+3=0$

24. $\frac{x+1}{6}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{4}$

習題 6-2

1. (1) $\mathbf{F}'(t)=\cos t\mathbf{i}-\sin t\mathbf{j}$　(2) 略

(3) $t=n\pi$ ($n=0, \pm1, \pm2, \cdots$)　(4) 是

(5) 是　(6) $\mathbf{F}''t(t)=-\sin t\mathbf{i}-\cos t\mathbf{j}$

2. (1) $\mathbf{F}'(t)=2\mathbf{i}+3t^2\mathbf{j}$　(2) $\mathbf{F}'(t)=\cos t\mathbf{i}-e^{-t}\mathbf{j}+\mathbf{k}$

(3) $\mathbf{F}'(t)=2t\mathbf{i}-(5t^4+e^t)\mathbf{j}+(3t^2-e^t)\mathbf{k}$

(4) $\mathbf{F}'(t)=(\cos t+2t)\mathbf{i}+(\cos t+2t)\mathbf{j}+3(\cos t+2t)\mathbf{k}$

(5) $\mathbf{F}'(t)=0$

3. (1) $f'(t)=6t-10t\sin t-5t^2\cos t$　(2) $f'(t)=\frac{8t}{\sqrt{8t^2+1}}$

(3) $f'(t)=1-12t^3$

4. 略　　**5.** 略　　**6.** 略

7. $\mathbf{F}(t)=(1+\sin t)\mathbf{i}-\cos t\mathbf{j}$

8. $\mathbf{F}(t)=2(t-2)\mathbf{i}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t^2+1}{2}\right)\mathbf{j}+\frac{1}{2}(t^2-1)\mathbf{k}$

9. $\mathbf{F}(t)=(t^4+2)\mathbf{i}-(t^2+4)\mathbf{j}$　　**10.** 略

習題 6-3

1. $L=2\pi\sqrt{a^2+c^2}$

2. $\kappa=\frac{1}{2}$，$\tau=-\frac{1}{2}$

3. 單位切向量 $\mathbf{T}=\frac{\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+2t^2\mathbf{k}}{1+2t^2}$　　單位主法向量 $\frac{d\mathbf{T}}{ds}=\frac{-4t\mathbf{i}+(2-4t^2)\mathbf{j}+4t\mathbf{k}}{(1+2t^2)^3}$

曲率 $\kappa=\frac{2}{(1+2t^2)^2}$　　單位副法向量 $\mathbf{B}=\frac{2t^2\mathbf{i}-2t\mathbf{j}+\mathbf{k}}{1+2t^2}$

扭率 $\tau=\frac{2}{(1+2t^2)^2}$

4. 單位切向量 $\mathbf{T}\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{j}+\frac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{k}$

單位主法向量 $\mathbf{N}\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{j}-\frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{k}$

單位副法向量 $\mathbf{B}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{i}$，曲率 $\kappa\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5\sqrt{5}}$，扭率 $\tau\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$

5. 略　　**6.** 略

7. 速率 $\frac{ds}{dt}=\sqrt{3}\,e^t$　　加速度的切線分量 $a_t=\sqrt{3}\,e^t$

加速度的法線分量 $a_n=\sqrt{2}\,e^t$

單位切向量 $\mathbf{T}=\frac{\sqrt{3}}{3}[(\cos t-\sin t)\mathbf{i}+(\sin t+\cos t)\mathbf{j}+\mathbf{k}]$

扭率 $\kappa=\frac{\sqrt{2}}{3}e^{-t}$

8. 速率 $\frac{ds}{dt}=\sqrt{5}t$　　加速度的切線分量 $a_t=\sqrt{5}$

加速度的法線分量 $a_n=t$　　扭率 $\kappa=\dfrac{1}{5t}$

習題 6-4

1. (1) $\nabla f(x,y,z)=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$

(2) $\nabla f(x,y)=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{i}-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{j}$

(3) $\nabla f(x,y,z)=-e^{-x}\cos(yz)\,\mathbf{i}-ze^{-x}\sin(yz)\,\mathbf{j}-ye^{-x}\sin(yz)\,\mathbf{k}$

2. $\nabla \ln|\mathbf{R}|=\dfrac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{x^2+y^2+z^2}$，$\nabla\left(\dfrac{1}{|\mathbf{R}|}\right)=\dfrac{-x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

3. 略　　**4.** 略　　**5.** 3　　**6.** $\dfrac{22}{\sqrt{21}}$

7. $-\dfrac{1}{3}\mathbf{i}+\dfrac{2}{3}\mathbf{j}+\dfrac{2}{3}\mathbf{k}$ 或 $\dfrac{1}{3}\mathbf{i}-\dfrac{2}{3}\mathbf{j}-\dfrac{2}{3}\mathbf{k}$

8. 切平面方程式 $7x-3y+8z=26$，法線方程式 $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-2}{8}$

9. 54.5°

習題 6-5

1. 略　　**2.** 略　　**3.** 略　　**4.** 略　　**5.** 0　　**6.** 略　　**7.** 略

習題 6-6

1. (1) 5　　(2) $\dfrac{23}{3}$　　(3) $\dfrac{13}{3}$　　**2.** $-\dfrac{7}{6}$

3. 18π　　**4.** (1) 略　　(2) 略

5. (1) 略　　(2) $\phi(x,y,z)=y^2\sin x+xz^3-4y+2z+c$　　(3) $4\pi+15$

習題 6-7

1. 11　　**2.** 90　　**3.** 24　　**4.** $2\pi r^3$　　**5.** 1　　**6.** $\dfrac{3}{2}$　　**7.** $\dfrac{\pi}{4}$

習題 6-8

1. 84π　　**2.** $3V$　　**3.** 0　　**4.** 略　　**5.** (1) 略　　(2) πab　　**6.** 略

第七章　傅立葉級數

習題 7-1

1. $f(x)=\dfrac{\sinh \pi}{\pi}\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}\cos nx+\dfrac{n(-1)^{n+1}}{n^2+1}\sin nx\right]\right\}$

2. $f(x)=\dfrac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{4\cos n\pi}{\pi(1-4n^2)}\cos nx$

3. $f(x)=\dfrac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{2(-1)^n}{n^2}\cos nx+\dfrac{2[(-1)^n-1]-\pi^2n^2(-1)^n}{\pi n^3}\sin nx\right\}$

4. $f(x)=\dfrac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n\pi-1}{n^2}\cos nx$

5. $f(x)=\dfrac{12}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin n\pi x}{n^3}$

6. $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left[\sin\dfrac{n\pi}{2}\cos nx+\left(1-\cos\dfrac{n\pi}{2}\sin nx\right)\right]$

習題 7-2

1. 奇函數：(2)、(4)；偶函數：(1)、(3)、(5)、(7)；兩者皆非：(6)

2. $f(x)=2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(1-e\cos n\pi)}{n^2\pi^2+1}\sin n\pi x$

3. $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(1-\cos\dfrac{n\pi}{2}\right)\sin n\pi x$

4. $\begin{cases}\dfrac{2}{L}x & ,\ 0\le x\le\dfrac{L}{2}\\ \dfrac{2}{L}(L-x), & \dfrac{L}{2}<x\le L\end{cases}$

5. $f(x)=\dfrac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{1-4n^2}\sin n\pi x$

6. $f(x)=\dfrac{4}{3}+\dfrac{16}{\pi^2}\sum_{n^2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos\dfrac{n\pi x}{2}$

7. $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}\cos n\pi x$

8. $f(x)=\dfrac{\sin 2}{2}+4\sin 2\left[\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4-n^2\pi^2}\cos\dfrac{n\pi x}{2}\right]$

習題 7-3

1. $y_n(t)=\dfrac{0.2(-1)^n}{D_n}\cos 2n\pi t+\dfrac{40(-1)^n(10n^2\pi^2-1)}{n\pi D_n}\sin 2n\pi t,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$

2. $y_n(t)=\dfrac{F_0}{9}+A_n\cos\dfrac{2n\pi t}{3}+B_n\sin\dfrac{2n\pi t}{3},\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$

3. $\begin{cases} A_n=\dfrac{100n^2\pi}{(1-4n^2)(D_n^2+25n^2\pi^2)} \\ B_n=\dfrac{20nD_n}{(4n^2-1)(D_n^2+25n^2\pi^2)} \end{cases}$，其中 $D_n=2(25-n^2\pi^2)$

4. $\begin{cases} A_n=-\dfrac{0.0002D_n}{D_n^2+144n^2\pi^2} \\ B_n=\dfrac{0.0014n\pi}{D_n^2+144n^2\pi^2} \end{cases}$，其中 $D_n=2.5-4n^2\pi^2$

第八章　傅立葉變換

習題 8-1

1. (1) $f(t)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}, & \text{若 } t=-\pi \\ t, & \text{若 } -\pi<t<\pi \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{若 } t=\pi \\ 0, & \text{若 } |t|>\pi \end{cases}$　　(2) $f(t)=\begin{cases} 10, & -10<t<10 \\ 0, & |t|>10 \\ 5, & t=-10 \text{ 或 } t=10 \end{cases}$

2. (i) $f(t)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\dfrac{1-\cos\lambda}{\lambda^2}\cos\lambda t\,d\lambda$　　(ii) $\dfrac{\pi}{2}$

3. (1) $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\sin(\lambda t)\,d\lambda$ (2) $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos(\lambda t)\,d\lambda$

4. (1) $f(x)=\frac{2}{\pi\lambda^2}\int_0^{\infty}[\sin(2\lambda)-3\lambda\cos(2\lambda)+\lambda\cos\lambda]\sin(\lambda x)\,d\lambda$

(2) $f(x)=\frac{2}{\pi\lambda^2}\int_0^{\infty}[\cos(2\lambda)-1+3\lambda\sin(2\lambda)-\lambda\sin\lambda]\cos(\lambda x)\,d\lambda$

5. $f(t)=\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{\sin\lambda}{\lambda}+\frac{\cos\lambda-1}{\lambda^2}\right]\cos(\lambda t)\,d\lambda$

6. 略

7. (1) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda$ (2) $\frac{\pi}{2}$

習題 8-2

1. (1) $f(x)=\begin{cases}3, & \text{若 } x=0 \text{ 或 } x=3\\ 2x, & \text{若 } 0<x<3\end{cases}$ (2) $f(x)=3+\frac{3i}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{n}e^{n\pi ix/4}$

(3) $f(x)=\begin{cases}2, & \text{若 } x=0 \text{ 或 } x=2\\ x^2, & \text{若 } 0<x<2\end{cases}$

2. $f(x)=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2i}{n\pi}e^{inx/2},\ n=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots$

3. (1) $f(x)=-\frac{2i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda}{(1+\lambda^2)^2}e^{i\lambda x}\,d\lambda$ (2) $f(x)=\sin(\pi x),\ \forall\, x\in\mathbb{R}$

4. (1) $f(x)=\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos(\lambda t)\,d\lambda$ (2) $\frac{\pi}{4}$

習題 8-3

1. (1) $F(\omega)=\frac{2i(\cos\omega-1)}{\omega}$ (2) $F(\omega)=i\left[\frac{\sin(2(\omega+1))}{\omega+1}-\frac{\sin(2(\omega-1))}{\omega-1}\right]$

(3) $F(\omega)=\frac{4e^{-(1/4+i\omega)2}}{1+4i\omega}$ (4) $F(\omega)=\frac{3e^{-3(3+i\omega)}}{3+i\omega}$

(5) $F(\omega)=\dfrac{12}{16+(\omega+2)^2}+\dfrac{12}{16+(\omega-2)^2}$　(6) $F(\omega)=\dfrac{i\pi}{9}[e^{-3|\omega+1|}-e^{-3|\omega-1|}]$

(7) $F(\omega)=e^{3i\omega}\dfrac{\pi}{2}e^{-2|\omega|}$　(8) $F(\omega)=6\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\,e^{-\omega^2/12}\,e^{-6i\omega}$

(9) $F(\omega)=\dfrac{-i\omega\,e^{-\omega^2/4}}{2\sqrt{2}}$　(10) $F(\omega)=\pi i\,[u(-\omega)e^{5\omega}-u(\omega)e^{-5\omega}]$

(11) $F(\omega)=\dfrac{-i\omega\sqrt{\pi}}{18}e^{-\omega^2/36}$　(12) $F(\omega)=\dfrac{5}{(4+i\omega)^2}$

2. (1) $F_s(\omega)=\dfrac{\omega}{1+\omega^2}$　(2) $F_s(\omega)=\dfrac{\omega}{k^2+\omega^2}$

$F_c(\omega)=\dfrac{\omega}{1+\omega^2}$　$F_c(\omega)=\dfrac{k}{k^2+\omega^2}$

(3) $F_s(\omega)=\dfrac{1}{\omega}[1-2\cos\omega+\cos 2\omega]$　(4) $F_s(\omega)=\dfrac{2\omega}{(1+\omega^2)^2}$

$F_c(\omega)=\dfrac{1}{\omega}[2\sin\omega-\sin(2\omega)]$　$F_c(\omega)=\dfrac{1-\omega^2}{(1+\omega^2)^2}$

3. (1) $f(t)=e^{6it}u(t-4)e^{-4(t-4)}$　(2) $f(t)=-6e^{-\pi it}[u(t+5)-u(t-5)]$

(3) $f(t)=u(t)[2e^{-3t}-e^{-2t}]$

4. $\dfrac{1}{4}u(t+5)[1-e^{-2(t+5)}]-\dfrac{1}{4}u(t-5)[1-e^{-2(t-5)}]$

5. $y(t)=\dfrac{1}{4}[u(t-1)e^{-(t-1)}-u(t-1)e^{-5(t-1)}]$

6. $f(t)=\dfrac{2}{\pi(1+t^2)}$　**7.** $f(t)=\dfrac{2(1-\cos t)}{\pi t^2}$

第九章　線性微分方程組

習題 9-1

1. 略　**2.** 略　**3.** 略　**4.** 略

5. $\mathbf{x}(t)=c_1\begin{bmatrix}2e^{3t}\\ e^{3t}\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-2e^{-t}\\ e^{-t}\end{bmatrix}$

6. $\mathbf{x}(t)=c_1e^{2t}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+c_2e^{2t}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ t\end{bmatrix}$

7. $\mathbf{x}(t)=c_1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-\cos t\\ \frac{1}{2}(\cos t-\sin t)\\ \cos t+\sin t\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}-\sin t\\ \frac{1}{2}(\cos t+\sin t)\\ \sin t-\cos t\end{bmatrix}$

習題 9-2

1. $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}e^{t}+\frac{4}{3}e^{4t}\\ -\frac{1}{3}e^{t}-\frac{2}{3}e^{4t}\end{bmatrix}$

2. $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{3}e^{2t}\\ -\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{t}+\frac{2}{3}e^{2t}\\ \frac{1}{6}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{t}+\frac{4}{3}e^{2t}\end{bmatrix}$

3. $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}e^{2t}-2e^{3t}\\ e^{t}-2e^{2t}+2e^{3t}\\ -2e^{2t}+2e^{3t}\end{bmatrix}.$

4. $\mathbf{x}(t)=c_1\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}e^{-3t}+c_2\left(\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}t\right)e^{-3t}$

5. $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}-\frac{9}{8}e^{-t}-\frac{1}{56}e^{7t}\\ \frac{3}{4}e^{-t}-\frac{1}{28}e^{7t}\end{bmatrix}$

6. $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{8t}\\ \frac{2}{3}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{8t}\\ -\frac{4}{3}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{8t}\end{bmatrix}$

7. $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}e^{-2t}+\frac{5}{6}e^{4t}\\ -\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{15}{6}e^{4t}\end{bmatrix}$

8. $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}e^{t}\\ e^{-2t}\\ -e^{-2t}\end{bmatrix}$

習題 9-3

1. $\mathbf{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}+c_2e^{3t}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-5\\1\end{bmatrix}$

2. $\mathbf{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}+c_2e^{3t}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+e^{t}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$

3. $\mathbf{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}+c_2e^{3t}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}-t\\\frac{1}{2}t\end{bmatrix}e^{-t}$

4. $\mathbf{x}(t)=c_1e^{(3+\sqrt{7})t}\begin{bmatrix}-6\\5-\sqrt{7}\end{bmatrix}+c_2e^{(3-\sqrt{7})t}\begin{bmatrix}-6\\5+\sqrt{7}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}(t+1)\end{bmatrix}$

5. $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}-\frac{8}{3}e^{4t}+\frac{2}{3}e^{t}+3e^{5t}\\-\frac{4}{3}e^{4t}-\frac{2}{3}e^{t}+e^{5t}\end{bmatrix}$

6. $\mathbf{x}(t)=c_1\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}e^{t}+c_2\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}e^{5t}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\end{bmatrix}e^{t}+\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}te^{t}$

7. $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}\frac{9}{4}e^{2t}-\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\\-\frac{9}{10}e^{-3t}+\frac{3}{10}\sin t-\frac{1}{10}\cos t\end{bmatrix}$

8. $\mathbf{x}(t)=c_1e^{t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2e^{4t}\begin{bmatrix}2\\-3\\-3\end{bmatrix}+c_3e^{-2t}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}+e^{-t}\begin{bmatrix}-\frac{1}{5}\\-\frac{6}{5}\\\frac{4}{5}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$

第十章　偏微分方程式

習題 10-1

1. (1) 二階，線性　　(2) 二階，非線性　　(3) 二階，非線性

(4) 二階，非線性　　(5) 一階，線性　　(6) 二階，線性

2. 略

3. (1) $u(x,\ y)=3xy+\dfrac{y^2}{2}+f(x)$　　(2) $u(x,\ y)=-y\cos x+f(y)$

(3) $u(x,\ y)=\ln x+xe^y+f(y)$　　(4) $u(x,\ y)=-e^{x-y}+f(x)+g(y)$

(5) $u(x,\ y)=ye^x+xf(y)+g(y)$

4. (1) $u(x,\ y)=2\left(x-\dfrac{1}{y}\right)+e^{-xy}f(y)$　　(2) $u(x,\ y)=-\dfrac{\cos x}{y}+y^2f(x)$

(2) $u(x,\ y)=f(y)\,e^{2xy}+g(y)\,e^{-2xy}-\dfrac{3x}{4y^2}$　(4) $u(x,\ y)=f(y)\,e^{xy}+g(y)\,e^{-3xy}$

(5) $u(x,\ y)=f(x)\,e^{xy}+g(x)\,ye^{xy}$

5. $u(x,\ y)=xe^y+\dfrac{f(y)}{x}+g(x)$　　**6.** $u(x,\ y)=1-\cos x+y^2+\dfrac{x^2y^2}{4}$

7. $u(x,\ y)=x-y+e^y-1+\dfrac{x^3\sin y}{3}$

習題 10-2

1. (1) $F\left(\dfrac{z}{x^3},\ \dfrac{y}{x}\right)=0$　　(2) $F(y^2+z^2,\ x^3+y^3)=0$

(3) $F(x^2+2yz,\ x+y+z)=0$　　(4) $F\left(\dfrac{y}{z},\ \dfrac{x^2+y^2+z^2}{z}\right)=0$

(5) $z=e^{-cx/a}\,\phi(ay-bx)$ 或 $z=e^{-cy/b}\,\psi(ay-bx)$

2. $(az-cx)^2+(bz-cy)^2=r^2(z-c)^2$　　**3.** $2xy+z(x+y)=3xyz$

4. $F(u,\ x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)=0$

習題 10-3

1. (1) 雙曲線型　(2) 橢圓型　(3) 拋物線型　(4) 橢圓型　(5) 橢圓型

2. (1) $x^2+y^2>1$　(2) $x^2+y^2=1$　(3) $x^2+y^2<1$

3. (1) $x^2-4y>0$　(2) $x^2-4y=0$　(3) $x^2-4y<0$

4. (1) $u(x,\ y)=e^{3x}F(y-2x)$　　(2) $u(x,\ y)=F(y-x)+G(y-2x)$

(3) $u(x,\ y)=F(3x+y)+G(y-x)$

(4) $u(x,\ y)=F(x+2y)+xG(x+2y)$ 或 $u(x,\ y)=F(x+2y)+yG(x+2y)$

(5) $u(x,\ y)=F(x+y)+xG(x+y)$　　(6) $u(x,\ y)=F(x+y)+G(x+y)-y^4$

(7) $u(x,\ y)=F(2x+y)+G(2x-y)+\dfrac{1}{4}xe^{2x+y}$

習題 10-4

1. $u(x,\ t)=\dfrac{3}{4}\sin x\cos t-\dfrac{1}{4}\sin 3x\cos 3t$

2. $u(x,\ t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin nct\sin nx,\ B_n=\frac{2[1+(-1)^{n+1}e^{\pi}]}{c\pi(n^2+1)}$

3. $u(x,\ t)=\dfrac{5}{2\pi}\sin\pi x\sin 2\pi t$

4. $u(x,\ t)=\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-(2n-1)^2t}}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)x$

5. $u(x,\ t)=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-k(2n-1)^2t}}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)x$

6. $u(x,\ y)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[f_n\frac{\sinh n(\pi-y)}{\sinh n\pi}\sin nx+p_n\frac{\sinh n(\pi-y)}{\sinh n\pi}\sin ny\right]$

7. $u(r,\ \theta)=\dfrac{3}{4}a^2r\sin\theta-\dfrac{1}{4}r^3\sin 3\theta$

8. $u(r,\ \theta)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}r^2\cos 2\theta+r\sin\theta$

9. $u(x,\ y)=\dfrac{1}{2}(a^2+x^2-y^2)$

10. 略

11. $u(x,\ t)=\dfrac{4l^2}{c\pi^3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$

12. $u(x,\ t)=\dfrac{8000}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{n^2\pi^2}-12\right)e^{-n^2c^2\pi^2t}\sin\frac{n\pi x}{10}$

13. $u(x,\ y)=800\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi\sinh(n\pi/2)}\left(\cos n\pi-\frac{4\cos n\pi}{n^2\pi^2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\right)\sin\frac{n\pi x}{20}\sinh\frac{n\pi y}{20}$

習題 10-5

1. $u(x,\ t)=2e^{-36t}\sin 3x-4e^{-100t}\sin 5x$

2. $u(x,\ t)=5e^{-32\pi^2t}\sin 4\pi x-3e^{-128\pi^2t}\sin 8\pi x+2e^{-200\pi^2t}\sin 10\pi x$

3. $u(x,\ t)=6e^{-\pi^2 t/4}\sin\dfrac{\pi x}{2}+3e^{-\pi^2 t}\sin\pi x$

4. $u(x,\ t)=\dfrac{3}{4\pi}\sin 2\pi x\sin 4\pi t-\dfrac{1}{5\pi}\sin 5\pi x\sin 10\pi t$