chapter 10

偏微分方程式

10-1 引　言

我們現在開始偏微分方程式的研究．在本章中，首先介紹基本概念與定義，然後進行簡單的一階線性偏微分方程式的處理．最後，我們將探討常係數二階線性偏微分方程式的三大類型，並對從數學物理描述出的每一類型的特定問題加以求解．

10-2 基本概念與定義

定義 10-2-1

偏微分方程式是含有兩個或更多自變數的未知函數的偏導函數的方程式．明確地說，令 u 為 n 個自變數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ $(n \geq 2)$ 的函數，則形如

$$F\left(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_1},\ \frac{\partial u}{\partial x_2},\ \cdots,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2\,\partial x_1},\ \cdots\right) = 0$$

的方程式為偏微分方程式．

下列方程為兩個自變數 x 與 y 的偏微分方程式.

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}-2u=0 \tag{10-2-1}$$

$$y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=x^2 \tag{10-2-2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}-u=0 \tag{10-2-3}$$

$$3uu_x-yu_y+u=xy \tag{10-2-4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-yu=2y \tag{10-2-5}$$

正如常微分方程式一樣，偏微分方程式中最高階偏導函數的階是該方程式的階. 於是，方程式 (10-2-1)、(10-2-2) 與 (10-2-4) 皆為一階偏微分方程式，而其餘兩者皆為二階.

偏微分方程式通常在含自變數的定義域內討論. 若在考慮的定義域內存在一函數 u，使得 u 與其偏導函數同時滿足偏微分方程式，則 u 稱為該方程式的一個解.

【例題 1】 驗證函數 $u(x, y)=x^2+y^2$ 是方程式 (10-2-1) 的一個解.

解 微分所予函數，可得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=2y$，故

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}-2u=2x^2+2y^2-2(x^2+y^2)=0.$$

【例題 2】 驗證函數 $u(x, y)=e^{-2y}\cos x$ 是方程式 (10-2-3) 的一個解.

解 我們可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-e^{-2y}\sin x,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-e^{-2y}\cos x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2e^{-2y}\cos x$$

於是，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial u}{\partial y}-u=-e^{-2y}\cos x+2e^{-2y}\cos x-e^{-2y}\cos x=0.$

若偏微分方程式中的未知函數與其各偏導函數僅為一次，且當中不含它們的乘積項，則該方程式稱為**線性偏微分方程式**．於是，方程式 (10-2-1)、(10-2-2) 與 (10-2-3) 皆為線性；而其餘兩者皆為非線性．

我們回憶一下，在常微分方程式裡，n 階微分方程式的通解含有 n 個任意常數；而當該解滿足某條件時，這些常數即被確定．在偏微方程式的情形裡，通解是含有任意函數而不是任意常數，這些任意函數的數目等於偏微分方程式的階．

【例題 3】 求方程式 $u_{xy}=\sin x+y$ 的通解．

解 利用偏積分可求得通解，即，方程式兩邊對 y 積分，視 x 為常數．於是，

$$u_x(x, y)=y\sin x+\frac{y^2}{2}+h(x)$$

其次，對 x 積分，視 y 為常數，可得

$$u(x, y)=-y\cos x+\frac{xy^2}{2}+\int h(x)\,dx+g(y)$$

若寫成 $$f(x)=\int h(x)\,dx$$

則通解為 $$u(x, y)=-y\cos x+\frac{xy^2}{2}+f(x)+g(y)$$

此含有兩個任意函數 f 與 g．

【例題 4】 試證 $u(x, y)=f(x-2y)+g(x+y)$ 為方程式 $2u_{xx}-u_{xy}-u_{yy}=0$ 的通解，此處 f 與 g 皆為二次可微分函數．

解 我們先驗證所予函數滿足偏微分方程式．依連鎖法則，可得

$$u_x=f'+g',\qquad u_y=-2f'+g',\qquad u_{xx}=f''+g'',$$
$$u_{xy}=-2f''+g'',\qquad u_{yy}=4f''+g''$$

故 $$2u_{xx}-u_{xy}-u_{yy}=2(f''+g'')-(-2f''+g'')-(4f''+g'')=0$$

欲證 u 是通解，我們引進新變數

$$s = x - 2y,\ t = x + y$$

並寫成 $w(s, t) = u(x, y)$. 因而

$$\begin{aligned}
u_x &= w_s s_x + w_t t_x = w_s + w_t \\
u_y &= w_s s_y + w_t t_y = -2w_s + w_t \\
u_{xx} &= w_{ss} + 2w_{st} + w_{tt} \\
u_{xy} &= -2w_{ss} - w_{st} + w_{tt} \\
u_{yy} &= 4w_{ss} - 4w_{st} + w_{tt}
\end{aligned}$$

將這些代入原方程式，可得

$$9w_{st} = 0$$

其通解為 $$w(x, t) = f(s) + g(t)$$

於是，原方程的通解為

$$u(x, y) = f(x - 2y) + g(x + y)$$

此處 f 與 g 皆為任意常數.

在某些特殊情形中，偏微分方程式的通解可用求解常微分方程式之其中一個方法來獲得. 我們現在給出兩個例子說明求解的過程.

【例題 5】 求方程式 $x^2 u_{xy} + xu_y = y\ (x > 0)$ 的通解.

解 令 $v(x, y) = u_y(x, y)$，並以 x^2 除方程式，則方程式變成

$$u_x + \frac{1}{x}v = \frac{1}{x^2}y$$

它可視為以 y 當作常數的未知函數 v 的常微分方程式，其通解為

$$v(x,\ y) = \frac{y \ln x}{x} + \frac{g(y)}{x}$$

此處 g 為 y 的任意函數. 因 $u_y = v$，故以 v 對 y 積分，可得

$$u(x,\ y)=\frac{y^2\ln x}{2x}+\frac{1}{x}h(y)+f(x)$$

此處 $h(y)=\int g(y)\,dy$ 與 $f(x)$ 皆為任意函數.

【例題 6】求方程式 $u_{yy}-x^2u=x\sin y$ 的通解.

解　視 x 為常數，此方程式可看成以 y 當作自變數的二階常微分方程式．我們知道齊次方程式 $u_{yy}-x^2u=0$ 的通解為

$$u(x,y)=f(x)\,e^{-xy}+g(x)\,e^{xy}$$

此處 f 與 g 皆為 x 的任意常數．欲求非齊次方程的特解 u_p，設 $u_p(x,y)=A(x)\sin y+B(x)\cos y$，可得

$$-A(x)(1+x^2)\sin y-B(x)(1+x^2)\cos y=x\sin y$$

因而

$$A(x)=-\frac{x}{1+x^2},\ \ B(x)=0$$

因此，通解為

$$u(x,\ y)=f(x)\,e^{-xy}+g(x)\,e^{xy}-\frac{x\sin y}{1+x^2}.$$

習題 10-1

1. 判斷下列各偏微分方程式的階是否為線性?

(1) $u_{xx}+xu_y=0$　　(2) $u_{xx}-u_{yy}+(u_x)^2=x^2$

(3) $xu_{xx}+yu_{yy}+2u^2=1$　　(4) $uu_y+u_{xx}-u_x=0$

(5) $yu_x+xu_y+u=0$　　(6) $u_{xx}+xu_{yy}-u=xy$

2. 試證下列各指定函數滿足所予偏微分方程式.

(1) $u(x,y)=ax+by$；$xu_x+yu_y=u$

(2) $u(x,y)=(x-a)^2+(y-b)^2$；$(u_x)^2+(u_y)^2=4u$

(3) $u(x,y)=x^2+y^2$；$yu_x-xu_y=0$

(4) $u(x,y)=e^x+\sin y+xy$；$u_{xy}=1$

(5) $u(x, y)=\cos(3x+2y)$；$6u_{xx}-13u_{xy}+6u_{yy}=0$

(6) $u(x, y)=x^2+e^{xy}\sinh x$；$u_{yy}-xu_y=0$

3. 求下列各偏微分方程式的通解.

(1) $u_y=3x+y$　　(2) $u_x=y\sin x$

(3) $u_x=\dfrac{1}{x}+e^y$　　(4) $u_{xy}=e^{x-y}$

(5) $u_{xx}=ye^x$

4. 將下列各偏微方程式視為常微分方程式以求其通解.

(1) $u_x+yu=2xy$　　(2) $u_y-\dfrac{2}{y}u=\dfrac{3\cos x}{y^2}$

(3) $u_{xx}-4y^2u=3x$　　(4) $u_{xx}+2yu_x-3y^2u=0$

(5) $u_{yy}-2xu_y+x^2u=0$

5. 求方程式 $xu_{xy}+u_y=2xe^y$ 的通解.

6. 解 $\begin{cases} u_{xy}=xy \\ u(0, y)=y^2 \\ u_x(x, 0)=\sin x \end{cases}$.

7. 解 $\begin{cases} u_{xy}=x^2\cos y \\ u(x, 0)=x \\ u_y(0, y)=e^y-1 \end{cases}$.

10-3 拉格蘭吉方程式

定義 10-3-1

形如

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x, y, z) \tag{10-3-1}$$

的方程式稱為**拉格蘭吉方程式**.

若令 $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$，則 (10-3-1) 式可改寫成如下

$$Pp+Qq=R \tag{10-3-2}$$

我們現在由幾何學解釋 (10-3-1) 式的意義．假設曲面 $z=(x, y)$ 滿足 (10-3-1) 式，則向量 $\left\langle \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, -1 \right\rangle$ 在此曲面的法線方向而與曲面垂直．又由 (10-3-1) 式，$P\dfrac{\partial z}{\partial x}+Q\dfrac{\partial z}{\partial y}-R=0$，即向量 $\left\langle \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, -1 \right\rangle$ 與向量 $\langle P, Q, R\rangle$ 垂直．可知 $\langle P, Q, R\rangle$ 在切線的方向．在曲面上一點，向量 $\langle dx, dy, dz\rangle$ 在通過該點之切線的方向，因而有下列的關係

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \tag{10-3-3}$$

上式為兩個聯立常微分方程式，令其解為

$$\begin{cases} u(x, y, z)=c_1 \\ v(x, y, z)=c_2 \end{cases} \tag{10-3-4}$$

上述的解表示兩曲面族相交的曲線族，但此曲線族具有可變參數 c_1 與 c_2．若固定 c_1 與 c_2 其中之一，則所得曲線皆在原曲面上．當 c_1 與 c_2 皆可變時，設兩者之間存在某種函數關係，如 $F(c_1, c_2)=0$，則曲線族組成一個新的曲面．函數 F 並無限制，若令 F 為任意函數，則可包括所有曲線族解，即 $F(u, v)=0$ 可以代表 (10-3-4) 式的所有解，因而 $F(u, v)=0$ 為 (10-3-1) 式的通解，$F(u, v)=0$ 可寫成 $u=\phi(v)$ 或 $v=\Psi(u)$ 的形式．方程式 (10-3-3) 通稱為**輔助微分方程式**.

定理 10-3-1

偏微分方程式

$$P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=R$$

(P、Q 與 R 不同時為 0) 的通解為

$$F(u, v)=0 \tag{10-3-5}$$

其中 F 為任意函數，$u(x, y, z)=c_1$ 與 $v(x, y, z)=c_2$ 構成方程式

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$$

的解，c_1 與 c_2 皆為任意常數.

證 將 $u(x, y, z)=c_1$ 與 $v(x, y, z)=c_2$ 分別對 x 偏微分，則

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz=0$$

以 (10-3-3) 式代入上面二式，可得

$$\left.\begin{aligned}&P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}=0\\&P\frac{\partial v}{\partial x}+Q\frac{\partial v}{\partial y}+R\frac{\partial v}{\partial z}=0\end{aligned}\right. \tag{10-3-6}$$

對方程組 (10-3-6) 解 P、Q 與 R，可得

$$\frac{P}{\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)}}=\frac{Q}{\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(z, x)}}=\frac{R}{\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} \tag{10-3-7}$$

將 (10-3-5) 式分別對 x 與 y 偏微分，則

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

從上面二式消去 $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ 與 $\dfrac{\partial F}{\partial v}$，可得

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}\end{vmatrix}=0$$

展開後再整理成

$$\frac{\partial(u,\ v)}{\partial(y,\ z)}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial(u,\ v)}{\partial(z,\ x)}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial(u,\ v)}{\partial(x,\ y)} \tag{10-3-8}$$

由 (10-3-7) 式與 (10-3-8) 式，可得

$$P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=R$$

故 $F(u, v)=0$ 滿足原方程式．又 F 為任意函數，故為通解．

【例題 1】 解 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=(x+y)z.$

解　原式的輔助微分方程式為

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{(x+y)z}$$

由第一個等式解得

$$-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=c_1$$

即

$$\frac{x-y}{xy}=c_1$$

又利用分比定理，

$$\frac{dx-dy}{x^2-y^2}=\frac{dz}{(x+y)z}$$

即

$$\frac{d(x-y)}{x-y}=\frac{dz}{z}$$

可得

$$\frac{x-y}{z}=c_2$$

故原方程式的通解為 $F_1\left(\frac{x-y}{xy},\ \frac{x-y}{z}\right)=0$，$F_1$ 為任意函數．若將上面兩個含有任意常數的解相除，則得

$$\frac{z}{xy}=\frac{c_1}{c_2}=c_3$$

因而通解可變成 $F_2\left(\dfrac{x-y}{z},\ \dfrac{z}{xy}\right)=0$，$F_2$ 為任意函數.

定理 10-3-1 可推廣至具有 n 個自變數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的線性偏微分方程式

$$P_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+P_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+P_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=R \tag{10-3-9}$$

其中 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 與 R 皆為 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 及 z 的函數，且不同時為零．若下列聯立微分方程式

$$\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=\cdots=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{dz}{R} \tag{10-3-10}$$

的 n 個獨立解為

$$u_i(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ z)=c_i\ \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

c_i 為任意常數，則 (10-3-10) 式的通解為

$$F(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n)=0$$

此處 F 為任意函數.

【例題 2】 解 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}+t\dfrac{\partial z}{\partial t}=xyt.$

解 原式的輔助微分方程式為

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dt}{t}=\frac{dz}{xyt}$$

由第一個等式可得 $\dfrac{x}{y}=c_1$，由第二個等式可得 $\dfrac{t}{y}=c_2$

因 $$x(yt)+y(xt)+t(xy)+(xyt)(-3)=0$$

故 $$yt\,dx+xt\,dy+xy\,dt-3dz=0$$

即 $$d(xyt)-3dz=0$$

可得 $$xyt-3z=c$$

於是，通解為 $F\left(\dfrac{x}{y},\ \dfrac{t}{y},\ xyt-3z\right)=0$，$F$ 為任意函數.

習題 10-2

1. 解下列各偏微分方程式.

(1) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=3z$

(2) $y^2z\dfrac{\partial z}{\partial x}-x^2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2y$

(3) $(y-z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-x$

(4) $(x^2-y^2-z^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+2xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xz$

(5) $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}+cz=0$，$a$ 與 b 皆不為 0

2. 解 $(x-a)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y-b)\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-c$，並求滿足此偏微分方程式且通過 xy-平面上曲線 $x^2+y^2=r^2$ 的曲面方程式，其中 a、b、c 及 r 皆為常數.

3. 求滿足 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}+z^2=0$ 且通過平面 $z=1$ 上雙曲線 $xy=x+y$ 的曲面方程式.

4. 解 $(y-z)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(z-x)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(x-y)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

10-4 二階常係數偏微分方程式

關於二變數函數 $u(x, y)$ 的二階常係數齊次偏微分方程式可寫成

$$au_{xx}+bu_{xy}+cu_{yy}+du_x+eu_y+fu=0 \qquad (10\text{-}4\text{-}1)$$

其中 $a, b, \cdots, f$ 皆為常數，且 a, b, c 不全為零．基於 (10-4-1) 式之解的特性，(10-4-1) 式可以分成三種類型，如下

1. 若 $b^2-4ac>0$，則稱 (10-4-1) 式為**雙曲線型** (hyperbolic type)，如**波動方程式** (wave equation)

$$c^2u_{xx}-u_{yy}=0,\ c>0$$

2. 若 $b^2-4ac=0$，則稱 (10-4-1) 式為**拋物線型** (parabolic type)，如**擴散方程式** (diffusion equation)

$$ku_{xx}-u_y=0,\ k>0$$

3. 若 $b^2-4ac<0$，則稱 (10-4-1) 式為**橢圓型** (elliptic type)，如**拉普拉斯方程式** (Laplace's equation)

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

若 (10-4-1) 式含有變係數，則該式在定義域的某一部分為某類型，而在另一部分為不同的類型．例如，考慮方程式

$$u_{xx}-yu_{yy}=0$$

其中在 xy-平面上，$a=1, b=0, c=-y$．因 $b^2-4ac=4y$，故該方程式在上半平面 ($y>0$) 內為雙曲線型，在 x-軸 ($y=0$) 上為拋物線型，而在下半平面 ($y<0$) 內為橢圓型．

我們欲解 (10-4-1) 式，可仿照常係數常微分方程式的解法．假設 (10-4-1) 式的解具有下列的形式

$$u=Ae^{\alpha x+\beta y} \tag{10-4-2}$$

其中 A 為任意常數，α 及 β 為未定常數．以 (10-4-2) 式代入 (10-4-1) 式，可得

$$Ae^{\alpha x+\beta y}(a\alpha^2+b\alpha\beta+c\beta^2+d\alpha+e\beta+f)=0$$

欲使上式為恆等式，必須

$$a\alpha^2+b\alpha\beta+c\beta^2+d\alpha+e\beta+f=0 \tag{10-4-3}$$

(10-4-3) 式稱為 (10-4-1) 式的**輔助方程式** (auxiliary equation).

由 (10-4-3) 式可解得 β 的兩根為

$$\beta=\beta_1(\alpha),\ \beta_2(\alpha)$$

此表示兩個待定常數中的一個為另一個的函數．今取 $\beta=\beta_1(\alpha)$，則 (10-4-1) 式具有如下的解

$$u_1=Ae^{\alpha x+\beta_1(\alpha)y} \tag{10-4-4}$$

因 (10-4-1) 為齊次，可知凡具有形如 (10-4-4) 式之解的和亦為 (10-4-1) 式的解，故 $\sum\limits_{\alpha} ke^{\alpha x+\beta_1(\alpha)y}$ 亦為 (10-4-1) 式的解，此處符號 $\sum\limits_{\alpha}$ 表示對 α 所作的和．同理，對另一根 $\beta=\beta_2(\alpha)$，亦可導出另一解 $\sum\limits_{\alpha} Be^{\alpha x+\beta_2(\alpha)y}$．因此，(10-4-1) 式的通解可寫成

$$u=\sum_{\alpha_1} Ae^{\alpha_1 x+\beta_1(\alpha_1)y}+\sum_{\alpha_2} Ae^{\alpha_1 x+\beta_2(\alpha_2)y} \tag{10-4-5}$$

【例題 1】 解 $2u_x+3u_y-2u=0$.

解　設 $u=Ae^{\alpha x+\beta y}$，則 $2\alpha+3\beta-2=0$，可得 $\alpha=\dfrac{2-3\beta}{2}$，而

$$e^{\alpha x+\beta y}=e^{[(2-3\beta)/2]x+\beta y}=e^x e^{(\beta/2)(2y-3x)}$$

為一解．於是，$u=e^xF(2y-3x)$ 為原式的通解.

【例題 2】 解波動方程式 $c^2u_{xx}-u_{yy}=0$.

解　設 $u=Ae^{\alpha x+\beta y}$，則 $c^2\alpha^2-\beta^2=0$，可得 $\beta=c\alpha$，$-c\alpha$，而

$$u_1=Ae^{\alpha x+c\alpha y}=Ae^{\alpha(x+cy)}$$
$$u_2=Be^{\alpha x-c\alpha y}=Be^{\alpha(x-cy)}$$

故原式的通解為

$$u=\sum_{\alpha_1} Ae^{\alpha_1(x+cy)}+\sum_{\alpha_2} Be^{\alpha_2(x-cy)}=F(x+cy)+G(x-cy)$$

此為著名的**第阿倫伯** (d'Alembert) 解答.

【例題 3】 解 $u_{xx}+u_{xy}-2u_{yy}=x$.

解 原式為非齊次，其解法與常微分方程式相類似．設 $u=Ae^{\alpha x+\beta y}$ 為齊次方程式的一解，則 $\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2=0$，可得 $\alpha=\beta,\ -2\beta$．因此，原式的補充函數為

$$u_c=\sum_{\beta_1}Ae^{\beta_1(x+y)}+\sum_{\beta_2}Be^{\beta_2(y-2x)}=F(x+y)+G(y-2x)$$

其中 F 與 G 皆為任意函數．因原式左邊各項皆為二階，而右邊僅為 x 的函數，故可令特解為 $u_p=kx^3$，代入原式解得 $k=\dfrac{1}{6}$，所以，$u_p=\dfrac{x^3}{6}$．原式的通解為

$$u=u_c+u_p=F(x+y)+G(y-2x)+\frac{x^3}{6}.$$

【例題 4】 解拉普拉斯方程式 $u_{xx}+u_{yy}=0$.

解 設 $u=Ae^{\alpha x+\beta y}$，則 $\alpha^2+\beta^2=0$，可得 $\alpha=\pm i\beta$ $(i=\sqrt{-1})$，因而

$$u_1=A_1\,e^{i\beta x+\beta y}=A_1\,e^{\beta(y+ix)}$$
$$u_2=A_2\,e^{-i\beta x+\beta y}=A_2\,e^{\beta(y-ix)}$$

故原式的通解為

$$u=\sum_{\beta_1}A_1\,e^{\beta_1(y+ix)}+\sum_{\beta_2}A_2\,e^{\beta_2(y-ix)}=F_1(y+ix)+F_2(y-ix).$$

習題 10-3

1. 判斷下列各偏微分方程式的類型.

(1) $u_{xx}+u_{xy}-u_{yy}+u_x=0$　　(2) $u_{xx}-2u_{xy}+3u_{yy}=0$

(3) $u_{xx}+u=0$　　(4) $u_{xx}-u_{xy}+5u_{yy}+xu_x+yu_y=0$

(5) $3u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}=xy$

2. 方程式 $(x^2-1)\,u_{xx}+2yu_{xy}-u_{yy}+u_x+u_y=0$ 在何區域是 (1) 雙曲線型？(2) 拋物線型？(3) 橢圓型？

3. 方程式 $u_{xx}+2xu_{xy}+yu_{yy}-u=0$ 在何區域是 (1) 雙曲線型? (2) 拋物線型? (3) 橢圓型?

4. 解下列各偏微分方程式.

(1) $u_x+2u_y-3u=0$　　(2) $u_{xx}+3u_{xy}+2u_{yy}=0$

(3) $u_{xx}-2u_{xy}-3u_{yy}=0$　　(4) $4u_{xx}-4u_{xy}+u_{yy}=0$

(5) $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}=0$　　(6) $u_{xx}-u_{yy}=12y^2$

(7) $u_{xx}-4u_{yy}=e^{2x+y}$

10-5 變數分離法

本節擬介紹前面所述波動方程式、擴散方程式與拉普拉斯方程式在個別附有初期條件及邊界條件時的常用解法，稱為**變數分離法** (separation of variables) 或**乘積法** (product method). 求滿足偏微分方程式、初期條件及邊界條件的解答，稱為解**初期－邊界值問題** (initial-boundary value problem)，變數分離法最適合解初期－邊界值問題，而這種方法通常需要利用傅立葉級數.

變數分離法可以概分為三個步驟:

1. 設解為各自變數的單獨函數的乘積，將此代入偏微分方程式中，可得到變數分離的數個常微分方程式.

2. 求出滿足邊界條件的所有特解.

3. 利用傅立葉級數，使 2. 中所得特解適合初期條件.

現在，我們將分別以變數分離法求解下列初期－邊界值問題.

一、波動方程式

1. 解初期－邊界值問題

$$
\begin{aligned}
&u_{tt}=c^2u_{xx},\ 0<x<l,\ t>0\\
&u(0,\ t)=u(l,\ t)=0,\ t\geq 0 \qquad (10\text{-}5\text{-}1)\\
&u(x,\ 0)=f(x),\ u_t(x,\ 0)=g(x),\ 0\leq x\leq l
\end{aligned}
$$

假設 (10-5-1) 式的解為

$$u(x, t)=X(x)T(t) \tag{10-5-2}$$

則 $u_{tt}=X(x)T''(t)$, $u_{xx}=X''(x)T(t)$, 代入 (10-5-1) 式可得

$$X(x)T''(t)=c^2 X''(x)T(t)$$

或

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{c^2\,T(t)} \tag{10-5-3}$$

(10-5-3) 式左邊僅為 x 的函數，右邊僅為 t 的函數．但 x 與 t 互為獨立的變數，因此，(10-5-3) 式的左右邊應恆等於常數方可．設此常數為 λ，則可得

$$X''-\lambda X=0 \tag{10-5-4}$$

$$T''-\lambda c^2 X=0 \tag{10-5-5}$$

如果 $\lambda>0$，則 (10-5-4) 式及 (10-5-5) 式的通解為

$$X(x)=Ae^{\sqrt{\lambda}x}+Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$
$$T(t)=Ce^{c\sqrt{\lambda}t}+De^{-c\sqrt{\lambda}t}$$

其中 A、B、C、D 皆為常數，因此

$$u(x,\ t)=X(x)\,T(t)=(Ae^{\sqrt{\lambda}x}+Be^{-\sqrt{\lambda}x})(Ce^{c\sqrt{\lambda}t}+De^{-c\sqrt{\lambda}t})$$

由於上式無法描述週期性的運動，此種解無物理意義，故不予考慮．當 $\lambda=0$ 時，(10-5-4) 式及 (10-5-5) 式的解為

$$X(x)=Ax+B,\ T(t)=Ct+D$$

其中 A、B、C、D 皆為常數．這種式子亦無法描述週期性的運動，因此 $\lambda=0$ 的可能性亦不考慮．由前面敘述推知 λ 僅能為負數，即 $\lambda<0$．令 $\lambda=-\omega^2$，則 (10-5-4) 式及 (10-5-5) 式的通解為

$$X(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x$$
$$T(t)=C\cos c\omega t+D\sin c\omega t$$

其中 A、B、C、D 皆為常數．此時

$$\begin{aligned} u(x,\ t) &= X(x)\,T(t) \\ &= (A\cos\omega x + B\sin\omega x)(C\cos c\omega t + D\sin c\omega t) \end{aligned} \tag{10-5-6}$$

(10-5-6) 式可描述頻率為 $\dfrac{c\omega}{2\pi}$ 的振盪運動 (如一維空間的波動)．現在我們由 (10-5-6) 式求 (10-5-1) 式在邊界條件及初期條件下的特解．

$$\left.\begin{aligned} u(0,\ t) &= X(0)\,T(t) = 0 \\ u(l,\ t) &= X(l)\,T(t) = 0 \end{aligned}\right.,\ t \geq 0$$

因為 $T(t) \neq 0$ (否則僅能得一個滿足上述邊界條件的零函數解 $u(x, t) = 0$，這不合所求)，故

$$X(0) = A = 0,\ \ X(l) = B\sin\omega l = 0$$

又 $B \neq 0$ (否則 $y(x, t)$ 僅能為零函數)，所以 $\sin\omega l = 0$，或

$$\omega = \frac{n\pi}{l},\ \ n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

因此，對應每一個 n，可以得到 (10-5-1) 式在上述所予邊界條件下的特解，

$$u_n(x,\ t) = \left(C_n\cos\frac{nc\pi}{l}t + D_n\sin\frac{nc\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$n = 1, 2, 3, \cdots$，其中 C_n、D_n 為對應 n 的常數．由於 (10-5-1) 式為線性齊次方程式，所以 $u_n(x, t)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 的線性組合仍為 (10-5-1) 式的解，因此可設滿足所予初期條件的特解為無窮級數

$$\begin{aligned} u(x,\ t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,\ t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{nc\pi}{l}t + D_n\sin\frac{nc\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \end{aligned} \tag{10-5-7}$$

假設 (10-5-7) 為收斂級數，則由所予初期條件知

$$u(x,\ 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin\frac{n\pi x}{l} = f(x) \tag{10-5-8}$$

$$u_t(x,\ 0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nc\pi}{l}D_n\sin\frac{n\pi x}{l}=g(x),\ 0\le x\le 1 \tag{10-5-9}$$

由 (10-5-8) 式及 (10-5-9) 式，可知 C_n 及 $\frac{nc\pi}{l}D_n$ 分別為 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的半幅正弦展開式的係數，即

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots \tag{10-5-10}$$

$$D_n=\frac{2}{nc\pi}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots \tag{10-5-11}$$

由上述得知，以 (10-5-10) 式及 (10-5-11) 式為係數的無窮級數 (10-5-7) 式為波動方程式 (10-5-1) 在所予邊界條件及初期條件下的特解.

2. 解初期－邊界值問題

$$\begin{aligned}&u_{tt}=c^2u_{xx},0<x<l,\ t>0\\&u(0,\ t)=0,\ u_x(l,\ t)=0,\ t\ge 0\\&u(x,\ 0)=f(x),\ u_t(x,\ 0)=g(x),\ 0\le x\le l\end{aligned} \tag{10-5-12}$$

以邊界條件 $u(0,t)=0$ 代入 (10-5-1) 式的通解 (10-5-7) 式，可得

$$u(0,\ t)=X(0)\ T(t)=0$$

如 1. 中所述 $T(t)\neq 0$，因而 $X(0)=A=0$，故 (10-5-6) 式可以化成

$$u(x,\ t)=(\widetilde{C}\cos c\omega t+\widetilde{D}\sin c\omega t)\sin\omega x$$

上式對 x 作偏微分，

$$u_x(x,\ t)=(\widetilde{C}\cos c\omega t+\widetilde{D}\sin c\omega t)(\omega\cos\omega x)$$

由邊界條件 $u_x(l,t)=0$，可得

$$u_x(l,\ t)=(\widetilde{C}\cos c\omega t+\widetilde{D}\sin c\omega t)(\omega\cos\omega l)=0$$

因為 $T(t)\neq 0$，欲使上式為零，必須使 $\cos\omega l=0$，即

$$\omega=\frac{(2n-1)\pi}{2l},\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

因此，對應每一個 n，可以得到 (10-5-1) 式在所予邊界條件下的特解

$$u_n(x,\ t)=\left(C_n\cos\frac{(2n-1)c\pi t}{2l}+D_n\sin\frac{(2n-1)c\pi t}{2l}\right)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}$$

$n=1, 2, 3, \cdots$，其中 C_n、D_n 為對應 n 的常數．同理，如 (1) 中所述，設滿足所予初期條件的特解為無窮級數

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{(2n-1)c\pi t}{2l}+D_n\sin\frac{(2n-1)c\pi t}{2l}\right)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l} \tag{10-5-13}$$

由所予初期條件知

$$u(x,\ 0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}=f(x),\ 0\le x\le l$$

$$u_t(x,\ 0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{D_n(2n-1)c\pi}{2l}\right]\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}=g(x) \tag{10-5-14}$$

將 (10-5-14) 式等號左右乘以 $\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}$，並設其在區間 $[0, l]$ 逐項積分是合法的．因

$$\int_0^l\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\sin\frac{(2m-1)\pi x}{2l}\,dx=0,\ \ n\neq m$$

$$\int_0^l\sin^2\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\,dx=\frac{l}{2}$$

故

$$C_n=\frac{\int_0^l f(x)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\,dx}{\int_0^l\sin^2\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\,dx}=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\,dx \tag{10-5-15}$$

$n=1, 2, 3, \cdots$．同理可得

$$\left[\frac{(2n-1)c\pi}{2l}\right]D_n=\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\,dx$$

或

$$D_n=\frac{4}{(2n-1)c\pi}\int_0^l g(x)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\,dx \tag{10-5-16}$$

$n=1, 2, 3, \cdots$

由上述得知，以 (10-5-15) 式及 (10-5-16) 式為係數的無窮級數 (10-5-13) 式為 (10-5-2) 式在所予邊界條件及初期條件下的解.

【例題 1】解初期－邊界值問題

$$u_{tt}=c^2 u_{xx},\ 0<x<\pi,\ t>0$$
$$u(0,\ t)=0,\ u(\pi,\ t)=0,\ t\geq 0$$
$$u(x,\ 0)=0,\ u_t(x,\ 0)=x(\pi-x),\ 0\leq x\leq \pi$$

解　因 $l=\pi$, $C_n=0$,

$$D_n=\frac{2}{nc\pi}\int_0^{\pi} x(\pi-x)\sin nx\,dx=\frac{8}{n^4 c\pi}\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

故由 (10-5-7) 式可得特解為

$$u(x,\ t)=\frac{8}{c\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin(nct)\sin(nx).$$

【例題 2】解初期－邊界值問題

$$u_{tt}=c^2 u_{xx},\ 0<x<2,\ t>0$$
$$u(0,\ t)=0,\ u_x(2,\ t)=0,\ t\geq 0$$
$$u(x,\ 0)=x(x-4),\ u_t(x,\ 0)=0,\ 0\leq x\leq 2$$

解　因 $l=2$,

$$C_n=\int_0^2 x(x-4)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{4}\,dx=-\frac{128}{(2n-1)^3\pi^3}$$

$$D_n=0$$

故由 (10-5-13) 式可得特解為

$$u(x,\ t)=-\frac{128}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\cos\frac{(2n-1)c\pi t}{4}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{4}.$$

【例題 3】拉長一彈性繩索使其兩端固定在兩點 (0, 0) 及 (10, 0)，若剛開始時具有位移

$$f(x)=\frac{x(10-x)}{1000},\ 0\le x\le 10$$

而在靜止狀態時予以釋放 (設 $c^2=10^4$)，試問此後繩索的位移 $u(x, t)$ 為何？

解　此為求解波動方程式的邊界值問題，即求解

$$u_{tt}=c^2 u_{xx}\ (\text{已知 } c^2=10^4)$$
$$u(0,\ t)=0,\ u(10,\ t)=0,\ t\ge 0$$
$$u(x,\ 0)=f(x),\ u_t(x,\ 0)=0,\ 0\le x\le 10$$

由 (1) 所述，其解為 (10-5-7) 式，而由 (10-5-10) 式及 (10-5-11) 式，可知

$$C_n=\frac{1}{5000}\int_0^{10} x(10-x)\sin\frac{n\pi x}{10}\,dx=\begin{cases} 0 & \text{，若 } n \text{ 為正偶數} \\ \dfrac{4}{5\pi^3 n^3}, & \text{若 } n \text{ 為正奇數} \end{cases}$$

$$D_n=0,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

因此，所求的解為

$$u(x,\ t)=\frac{4}{5\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{10}\cos 10(2n+1)\pi t.$$

二、擴散方程式

解初期－邊界值問題

$$u_t=ku_{xx},\ 0<x<l,\ t>0$$
$$u(0,\ t)=0,\ u(l,\ t)=0,\ t\ge 0 \qquad (10\text{-}5\text{-}17)$$
$$u(x,\ 0)=f(x),\ 0\le x\le l$$

設 (10-5-17) 式的解為

$$u(x, t)=X(x)\,T(t)$$

則 $u_t(x, t)=X(x)\,T'(t)$, $u_{xx}(x, t)=X''(x)\,T(t)$，代入 (10-5-17) 式可得

$$X(x)\,T'(t)=kX''(x)\,T(t)$$

或
$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{kT(t)} \tag{10-5-18}$$

欲使 (10-5-18) 式恆等，必須使等式左右等於常數$-\lambda^2(>0)$．因此，可得

$$X''+\lambda^2 X=0 \tag{10-5-19}$$

$$T'+k\lambda^2 T=0 \tag{10-5-20}$$

(10-5-19) 式與 (10-5-20) 式的通解分別為

$$X(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$$
$$T(t)=Ce^{-k\lambda^2 t}$$

由邊界條件知，$u(0,t)=X(0)\,T(t)=AT(t)=0$，又 $T(t)\neq 0$，可得 $A=0$；同理，$u(l,t)=X(l)\,T(t)=(B\sin\lambda l)\,T(t)=0$，而又 $B\neq 0$ 及 $T(t)\neq 0$，故 $\sin\lambda l=0$ 或 $\lambda=\dfrac{n\pi}{l}$, $n=1, 2, 3, \cdots$．因此，對應每一個 n，(10-5-17) 式有滿足所予邊界條件的特解

$$u_n(x,t)=\left(B_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\left(C_n e^{-n^2\pi^2kt/l^2}\right)$$
$$=D_n\,e^{-n^2\pi^2kt/l^2}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

設滿足所予初期條件的特解為無窮級數

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\,e^{-n^2\pi^2kt/l^2}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{10-5-21}$$

由 $u(x,0)=f(x)$，可知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\frac{n\pi x}{l}=f(x)$

其中
$$D_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots \tag{10-5-22}$$

【例題 4】解初期－邊界值問題

$$u_t = u_{xx},\ 0 < x < \pi,\ t > 0$$
$$u(0,\ t) = u(\pi,\ t) = 0,\ t \geq 0$$
$$u(x,\ 0) = \sin x,\ 0 \leq x \leq \pi$$

解　依 (10-5-22) 式，

$$D_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \sin nx\, dx = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}$$

故特解為

$$u(x, t) = e^{-t} \sin x$$

【例題 5】一長為 l 之金屬直桿的周圍包以優良之絕緣材料，使熱量不致外流，而僅能沿桿之軸向傳導，且其桿兩端的溫度恆為 0℃．假設此桿之軸與 x-軸重合，其起始溫度為

$$f(x) = \begin{cases} x\ , & 0 < x < \dfrac{l}{2} \\ l - x, & \dfrac{l}{2} < x < l \end{cases}$$

試求桿內之溫度分佈情形.

解　這是求解邊界值問題

$$u_t = ku_{xx} \quad (k \text{ 為擴散常數})$$
$$u(0,\ t) = 0,\ u(l,\ t) = 0,\ t \geq 0$$
$$u(x,\ 0) = f(x) = \begin{cases} x\ , & 0 < x < \dfrac{l}{2} \\ l - x, & \dfrac{l}{2} < x < l \end{cases}$$

由前述的討論知，滿足此邊界值問題的解為 (10-5-21) 式，其係數為

$$D_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx$$
$$= \frac{2}{l}\left[\int_0^{l/2} x \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx + \int_{l/2}^{l} (l - x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx\right]$$

當 n 為正偶數時，$D_n=0$，而當 n 為正奇數時，

$$D_n=\frac{4l}{n^2\pi^2},\ n=1,\ 5,\ 9,\ \cdots$$

$$D_n=-\frac{4l}{n^2\pi^2},\ n=3,\ 7,\ 11,\ \cdot$$

因此，所求的解為

$$u(x,\ t)=\frac{4l}{\pi^2}\left[\left(\sin\frac{\pi x}{l}\right)e^{-(\pi/l)^2\,kt}-\frac{1}{9}\left(\sin\frac{3\pi x}{l}\right)e^{-(3\pi/l)^2\,kt}+\cdots\right].$$

三、拉普拉斯方程式

1. 在矩形區域 $R=\{(x,\ y)|0\le x\le a,\ 0\le y\le b\}$ 內解**狄利司雷** (Dirichlet) **問題** (圖 10-5-1)

$$\begin{aligned}&u_{xx}+u_{yy}=0,\ 0<x<a,\ 0<y<b\\&u(0,\ y)=0,\ u(a,\ y)=0,\ 0\le y\le b\\&u(x,\ 0)=0,\ u(x,\ b)=f(x),\ 0\le x\le a\end{aligned}\qquad(10\text{-}5\text{-}23)$$

設 $u(x,y)=X(x)\,Y(y)$，則 $u_{xx}=X''(x)\,Y(y)$, $u_{yy}=X(x)\,Y''(y)$，代入 (10-5-23) 式可得

$$X''(x)\,Y(y)+X(x)\,Y''(y)=0$$

或
$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{-Y''(y)}{Y(y)}$$

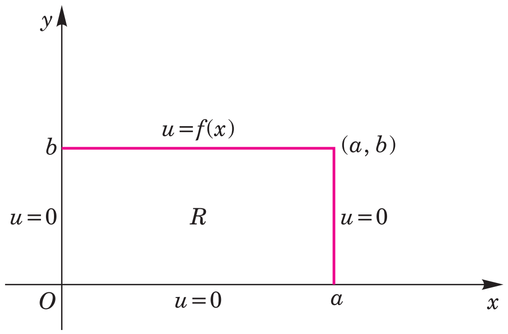

圖 10-5-1　在矩形區域內的狄利司雷問題

欲使上式恆等，必須等於常數，且僅能為小於 0 常數，即 $-\lambda^2(\lambda>0)$. 因此，

$$X''+\lambda^2X=0$$
$$Y''-\lambda^2Y=0$$

以上二式的通解分別為

$$X(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$$
$$Y(y)=C\cosh\lambda y+D\sinh\lambda y$$

由邊界條件可知

$$u(0,\ y)=X(0)Y(y)=0,\qquad u(x,\ 0)=X(x)Y(0)=0$$
$$u(a,\ y)=X(a)Y(y)=0$$

因為 $Y(y)\neq 0$ 及 $X(x)\neq 0$ (否則 $u(x, y)$ 為零函數，此解無任何物理意義). 所以，

$$X(0)=X(a)=Y(0)=0$$

可得 $A=C=0$, $X(a)=B\sin\lambda a=0$. 又 B 不能為零，故 $\sin\lambda a=0$，即

$$\lambda=\frac{n\pi}{a},\ \ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

所以，對應每一個 n，滿足 (10-5-23) 式及部分邊界條件的特解為

$$\begin{aligned}u_n(x,\ y)&=\left(B_n\sin\frac{n\pi x}{a}\right)\left(D_n\sinh\frac{n\pi y}{a}\right)\\&=E_n\sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a},\ \ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\end{aligned}$$

其中 $E_n=B_nD_n$, $n=1, 2, 3, \cdots$. 假設滿足全部邊界條件的解為無窮級數

$$u(x,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}\tag{10-5-24}$$

由邊界條件知

$$u(x,\ b)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\sinh\frac{n\pi b}{b}\sin\frac{n\pi x}{a}=f(x)\tag{10-5-25}$$

其中

$$E_n = \frac{2}{a \sinh \dfrac{n\pi b}{a}} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a}\, dx \qquad (10\text{-}5\text{-}26)$$

在 (10-5-24) 式中代入 (10-5-26) 式，可得特解為

$$u(x,\ y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sinh\left(\dfrac{n\pi y}{a}\right)}{\sinh\left(\dfrac{n\pi b}{a}\right)} \sin \frac{n\pi x}{a} \qquad (10\text{-}5\text{-}27)$$

其中
$$b_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a}\, dx \qquad (10\text{-}5\text{-}28)$$

一般性的狄利司雷問題為

$$\begin{aligned}
&u_{xx} + u_{yy} = 0,\ 0 < x < a,\ 0 < y < b \\
&u(x,\ 0) = f_1(x),\ u(x,\ b) = f_2(x),\ 0 \le x \le a \\
&u(0,\ y) = f_3(y),\ u(a,\ y) = f_4(y),\ 0 \le y \le b
\end{aligned}$$

我們可利用變數分離法以及將此問題分解成四個子題所得各解的和，而求出 $u(x, y)$．四個子題的邊界條件分別為

$$\begin{array}{ll}
(1)\ u(x,\ 0) = f_1(x) & (2)\ u(x,\ 0) = 0 \\
\quad\ u(x,\ b) = 0 & \quad\ u(x,\ b) = f_2(x) \\
\quad\ u(0,\ y) = 0 & \quad\ u(0,\ y) = 0 \\
\quad\ u(a,\ y) = 0 & \quad\ u(a,\ y) = 0 \\
(3)\ u(x,\ 0) = 0 & (4)\ u(x,\ 0) = 0 \\
\quad\ u(x,\ b) = 0 & \quad\ u(x,\ b) = 0 \\
\quad\ u(0,\ y) = f_3(y) & \quad\ u(0,\ y) = 0 \\
\quad\ u(a,\ y) = 0 & \quad\ u(a,\ y) = f_4(y)
\end{array}$$

所以，
$$u(x,\ y) = u_1(x,\ y) + u_2(x,\ y) + u_3(x,\ y) + u_4(x,\ y)$$

其中

$$u_1(x,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sinh[n\pi(b-y)/a]}{\sinh(n\pi b/a)} \sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$a_n=\frac{2}{a}\int_0^a f_1(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

$$u_2(x,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sinh(n\pi y/a)}{\sinh(n\pi b/a)} \sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$b_n=\frac{2}{a}\int_0^a f_2(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

$$u_3(x,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\sinh[n\pi(a-x)/b]}{\sinh(n\pi a/b)} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$c_n=\frac{2}{b}\int_0^a f_3(y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy$$

$$u_4(x,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{\sinh(n\pi x/b)}{\sinh(n\pi a/b)} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$d_n=\frac{2}{b}\int_0^b f_4(y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy$$

2. 利用極坐標 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ 先將拉普拉斯方程式 (10-5-23) 化成 $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$．如今，在圓區域 $x^2+y^2<a^2$ 內解狄利司雷問題

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0,\ 0<r<a,\ 0<\theta<2\pi \tag{10-5-29}$$

$$u(a,\ \theta)=f(\theta),\ 0\le\theta\le 2\pi$$

$$u(0,\ \theta)<\infty$$

設 (10-5-29) 式的解為 $u(r,\theta)=R(r)\,\Theta(\theta)$，則 (10-5-29) 式變成

$$R''(r)\,\Theta(\theta)+\frac{1}{r}R'(r)\,\Theta(\theta)+\frac{1}{r^2}R(r)\,\Theta''(\theta)=0$$

或

$$\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=-\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}$$

因為 r、θ 為獨立變數，故須使上式恆等於 k．當 $k\le 0$ 時，在 θ 方向無週期性的解，不符實際要求，因而令 $k=\lambda^2\ (\lambda>0)$．於是，可得

$$\Theta'' + \lambda^2 \Theta = 0$$
$$r^2 R'' + rR' - \lambda^2 R = 0$$

其通解分別為

$$\Theta(\theta) = \tilde{A} \cos \lambda\theta + \tilde{B} \sin \lambda\theta$$
$$R(r) = Cr^{\lambda} + Dr^{-\lambda}$$

故 (10-5-29) 式的解為

$$u(r,\ \theta) = (\tilde{A} \cos \lambda\theta + \tilde{B} \sin \lambda\theta)(Cr^{\lambda} + Dr^{-\lambda})$$

由於 $u(0, \theta)$ 為有限值，故必須 $D=0$．將常數 C 併入常數 $\tilde{A}$ 及 $\tilde{B}$ 之內，可得 $u(r, \theta)=r^{\lambda}(A \cos \lambda\theta + B \sin \lambda\theta)$．為了符合實際應用的要求，$u(r, \theta)$ 必須在 θ 方向有週期性，即

$$\begin{aligned} u(r,\ \theta) &= r^{\lambda}(A \cos \lambda\theta + B \sin \lambda\theta) \\ &= r^{\lambda}(A \cos \lambda(\theta + 2\pi) + B \sin \lambda(\theta + 2\pi)) \\ &= u(r,\ \theta + 2\pi) \end{aligned}$$

欲滿足此性質，必須 $\lambda = n = 1, 2, 3, \cdots$．因此，對應每一個 n，

$$u_n(r,\ \theta) = r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta),\ \ n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

其中 A_n、B_n 為對應 n 的常數．假設滿足邊界條件的解為無窮級數

$$u(r,\ \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \tag{10-5-30}$$

則由所予邊界條件知，

$$u(a,\ \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = f(\theta),\ \ 0 \le \theta \le 2\pi$$

其中

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{a^n \pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta\, d\theta \\ B_n &= \frac{1}{a^n \pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta\, d\theta \end{aligned} \tag{10-5-31}$$

故可知以 (10-5-31) 式為係數的無窮級數 (10-5-30) 式為 (10-5-29) 式在所予邊界條件下的解.

【例題 6】解 $$u_{xx}+u_{yy}=0,\ 0<x<\pi,\ 0<y<\pi$$

$$u(0,\ y)=0,\ u(\pi,\ y)=0,\ 0\le y\le \pi$$

$$u(x,\ 0)=0,\ u(x,\ \pi)=\sin^3 x,\ 0\le x\le \pi$$

解 依 (10-5-25) 式， $u(x,\ \pi)=\sum_{n=1}^{\infty} E_n \sinh n\pi \sin nx=\sin^3 x$

由三角恆等式 $$\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$$

可得 $$\sum_{n=1}^{\infty} E_n \sinh n\pi \sin nx=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$$

因而 $E_1 \sinh \pi=\frac{3}{4}$, $E_3 \sinh 3\pi=-\frac{1}{4}$, $E_n \sinh n\pi=0$, $n\ne 1,\ 3.$

又由 (10-5-26) 式及 (10-5-28) 式，

$$b_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^4 x\,dx=E_1 \sinh \pi=\frac{3}{4}$$

$$b_3=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^3 x\sin 3x\,dx=E_3 \sinh 3\pi$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^3 x\sin nx\,dx=E_n \sinh n\pi=0$$

$n=2,\ 4,\ 5,\ 6,\ \cdots.$

故由 (10-5-27) 式可得特解為

$$u(x,\ y)=\frac{3\sinh y}{4\sinh \pi}\sin x-\frac{\sinh 3y}{4\sinh 3\pi}\sin 3x.$$

【例題 7】解狄利司雷問題

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0,\ 0<r<a$$

$$u(a,\ \theta)=a\cos^2\theta,\ 0\le\theta\le 2\pi$$

解 $a\cos^2\theta=\dfrac{a}{2}(1+\cos 2\theta)$

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=\frac{a}{2}$$

$$A_n=\frac{1}{a^n\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a}{2}(1+\cos 2\theta)\cos n\theta\,d\theta=\frac{1}{2^{a-1}\pi}\int_0^{2\pi}\cos 2\theta\cos n\theta\,d\theta$$

當 $n=2$ 時， $A_2=\dfrac{1}{2a\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2 2\theta\,d\theta=\dfrac{1}{2a}$

當 $n\neq 2$ 時，$A_n=0, B_n=0, n=1, 2, 3, \cdots$.

故特解為 $u(r,\ \theta)=\dfrac{a}{2}+\dfrac{r^2}{2a}\cos 2\theta=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{r^2}{a}\cos 2\theta\right).$

【例題 8】解狄利司雷問題

$$u_{xx}+u_{yy}=0,\ x^2+y^2<1$$
$$u(x,\ y)=y^2,\ x^2+y^2=1$$

解 考慮極坐標，可知邊界條件變成 $u(1,\ \theta)=\sin^2\theta=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta=\frac{1}{2}$$

$$A_2=-\frac{1}{2},\ A_n=0,\ n\neq 2$$

$$B_n=0,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

故 $u(r,\ \theta)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{r^2}{2}\cos 2\theta=\dfrac{1}{2}(1-r^2\cos 2\theta)$

轉換成直角坐標，可得特解為

$$u(x,\ y)=\frac{1}{2}[1-(x^2-y^2)]=\frac{1}{2}(1-x^2+y^2).$$

【例題 9】一正方形之金屬薄板係由 $x=0, y=0, x=a$ 及 $y=a$ 等四邊所圍成，其兩面均包以優良的隔熱材料，而使熱量僅沿著板面流動，且熱的傳導為穩態熱流，即溫度不受時間因素的影響．如果除 $y=a$ 之頂邊保

持在 100℃ 之常溫外，其他三邊始終維持在 0℃ 而不變，試求板內穩態溫度分佈的情形.

解　此為求解邊界值問題

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$u(0,\ y)=0,\ u(a,\ y)=0,\ 0\le y\le a$$

$$u(x,\ 0)=0,\ u(x,\ a)=100^\circ\mathrm{C},\ 0\le x\le a$$

由前述的討論知，滿足此邊界值問題的解為

$$u(x,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\left(\sin\frac{n\pi x}{a}\right)\left(\sinh\frac{n\pi y}{a}\right)$$

而由 (10-5-26) 式知

$$E_n=\frac{200^\circ\mathrm{C}}{a\left(\sinh\dfrac{n\pi a}{a}\right)}\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

$$=\begin{cases}0 & ,\ n\text{ 為正偶數}\\ \dfrac{400^\circ\mathrm{C}}{n\pi(\sinh n\pi)}, & n\text{ 為正奇數}\end{cases}$$

因此，所求的解為

$$u(x,\ y)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{400^\circ\mathrm{C}}{(2k+1)\pi[\sinh(2k+1)\pi]}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{a}\sinh\frac{(2k+1)\pi y}{a}$$

$$=\frac{400^\circ\mathrm{C}}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)[\sinh(2k+1)\pi]}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{a}\sinh\frac{(2k+1)\pi y}{a}.$$

【例題 10】一半徑為 a 之圓形金屬薄板的兩面均包以優良之隔熱材料使熱不致外傳，在穩定狀態下 (即溫度分佈不受時間因素的影響)，此圓形板之圓周的一半保持在 100℃，另一半保持在 0℃，試求此板內各處溫度之分佈情形.

解　此為求解邊界值問題

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$$

$$u(a,\ \theta)=f(\theta)=\begin{cases}100^\circ\text{C},\ 0<\theta<\pi\\ \quad 0^\circ\text{C},\ \pi<\theta<2\pi\end{cases}$$

$$|u(0,\ \theta)|<\infty$$

由 (10-5-30) 式知

$$u(r,\ \theta)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta),\ 0\le r\le a,\ 0\le\theta\le 2\pi$$

但 $$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta=50^\circ\text{C}$$

$$A_n=\frac{1}{a^n\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\,d\theta=\frac{100^\circ\text{C}}{a^n\pi}\int_0^{\pi}\cos n\theta\,d\theta=0$$

$$B_n=\frac{1}{a^n\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta\,d\theta=\frac{100^\circ\text{C}}{a^n\pi}\int_0^{\pi}\sin n\theta\,d\theta$$

$$=\begin{cases}\dfrac{200^\circ\text{C}}{a^n n\pi},\ n\text{ 為正奇數}\\ \quad 0\quad,\ n\text{ 為正偶數}\end{cases}$$

故 $$u(r,\ \theta)=50^\circ\text{C}+\frac{200^\circ\text{C}}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{2k+1}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\theta$$

$$0\le r\le a,\ 0<\theta<2\pi.$$

習題 10-4

1. $u_{tt}=u_{xx},\ 0<x<\pi,\ t>0$

$u(0,\ t)=0,\ u(\pi,\ t)=0,\ t\ge 0$

$u(x,\ 0)=\sin^3 x,\ u_t(x,\ 0)=0,\ 0\le x\le\pi$

2. $u_{tt}=c^2 u_{xx},\ 0<x<\pi,\ t>0$

$u(0,\ t)=0,\ u(\pi,\ t)=0,\ t\ge 0$

$u(x,\ 0)=0,\ u_t(x,\ 0)=e^x,\ 0\le x\le\pi$

3. $u_{tt} = 4u_{xx},\ 0 < x < 5,\ t > 0$

$u(0,\ t) = 0,\ u(5,\ t) = 0,\ t \geq 0$

$u(x,\ 0) = 0,\ u_t(x,\ 0) = 5\sin \pi x,\ 0 \leq x \leq 5$

4. $u_t = u_{xx},\ 0 < x < \pi,\ t > 0$

$u(0,\ t) = 0,\ u(\pi,\ t) = 0,\ t \geq 0$

$u(x,\ 0) = x(\pi - x),\ 0 \leq x \leq \pi$

5. $u_t = ku_{xx},\ 0 < x < \pi$

$u(0,\ t) = 0,\ u(\pi,\ t) = 0,\ t \geq 0$

$$u(x,\ 0) = \begin{cases} x &, 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

6. $u_{xx} + u_{yy} = 0,\ 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi$

$u(x,\ 0) = \sin^2 x,\ 0 < x < \pi$

$u(x,\ \pi) = 0,\ 0 < x < \pi$

$u(0,\ y) = \cos^2 y,\ 0 < y < \pi$

$u(\pi,\ y) = 0,\ 0 < y < \pi$

7. $u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0,\ r < a$

$u(a,\ \theta) = a^3 \sin^3 \theta,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$

8. $u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0,\ r < 1$

$u(1,\ \theta) = \sin\theta + \cos^2 \theta,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$

9. $u_{xx} + u_{yy} = 0,\ x^2 + y^2 < a^2$

$u(x,\ y) = x^2,\ x^2 + y^2 = a^2$

10. 已知邊界值問題

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ 0 < x < a,\ 0 < y < a$$
$$u(x,\ 0) = 0,\ u(x,\ a) = -f(x),\ 0 \leq x \leq a$$
$$u(0,\ y) = 0,\ u(a,\ y) = f(y),\ 0 \leq y \leq a$$

試證：若 u 為此問題的解，則 $u(x, y)=-u(y, x)$.

11. 一拉長之彈性繩索的兩端固定在 $(0, 0)$ 及 $(l, 0)$ 兩點，剛開始處於平衡位置時 (即起始的位移函數 $f(x)=0$)，各處具有如下之初速函數

$$u_t(x,\ 0)=g(x)=\begin{cases} x\ , & 0<x<\dfrac{l}{2} \\ l-x, & \dfrac{l}{2}<x<l \end{cases}$$

試問此後的位移函數 $u(x, t)$ 為何？

12. 長 10 公分的金屬桿在 $t=0$ 時的溫度分佈情形為

$$u(x,\ 0)=\frac{1}{10}(10x-x^2)^2$$

其周圍均包以良好的隔熱材料，而熱量僅能沿軸向傳導．假設其兩端均繼續保持在 0℃ 而不變，試求其今後內部各處之溫度分佈情形．

13. 一長方形之金屬薄板係由 $x=0$, $y=0$, $x=20$, $y=10$ 等四邊所圍成，其兩面均包以良好的隔熱材料，而熱量僅能沿板面流動．設邊界 $y=10$ 的溫度保持在 $u(x, 10)=20x-x^2$，而其他三邊則固定在 0℃，試問板內恆態溫度之分佈情形若何？

10-6 拉普拉斯變換法

利用拉普拉斯變換法可以很方便的求解線性常微分方程式及其邊界值問題．常微分方程式經拉普拉斯變換後變成代數方程式，依此求出函數或因變數的拉普拉斯變換後，再用反拉普拉斯變換後即可得因變數或原微分方程式的解．但在有兩個自變數的偏微分方程式中必須選定其中之一，作為拉普拉斯變換的對象，經此變換後被選定的變數的偏微分已不復存在，因此原偏微分方程式經此轉換後變成一常微分方程式，求解此常微分方程式再經反拉普拉斯變換後即可得原方程式的解．

於兩個自變數的偏微分方程式中，對已選定的自變數，在求因變數的拉普拉斯變換時，我們假設拉普拉斯變換的微分運算可以和積分運算交換次序．因此，其關係見以下各式．

1. $$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial y(x,\ t)}{\partial x}\right\}=\int_0^\infty \frac{\partial y(x,\ t)}{\partial x}e^{-st}\ dt$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty y(x,\ t)\,e^{-st}\ dt=\frac{d}{dx}\mathscr{L}\{y(x,\ t)\}$$

2. $$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 y(x,\ t)}{\partial x^2}\right\}=\int_0^\infty \frac{\partial^2 y(x,\ t)}{\partial x^2}e^{-st}\ dt$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty y(x,\ t)\,e^{-st}\ dt=\frac{d^2}{dx^2}\mathscr{L}\{y(x,\ t)\}$$

…………………

3. $$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^n y(x,\ t)}{\partial x^n}\right\}=\frac{d^n}{dx^n}\mathscr{L}\{y(x,\ t)\}$$

其中選定的對象為自變數 t.

【例題 1】解邊界值問題

$$\frac{\partial u}{\partial t}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$u(0, t)=0,\ u(3, t)=0,\ u(x, 0)=10\sin 2\pi x-6\sin 4\pi x.$

解　原方程式取拉氏變換，

$$\int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)dt=\int_0^\infty e^{-st}\left(4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dt$$

上式變成

$$s\int_0^\infty e^{-st}\ u\ dt-u(x,\ 0)=4\frac{d^2}{dx^2}\int_0^\infty e^{-st}\ u\ dt$$

或　$$sU-u(x,\ 0)=4\frac{d^2U}{dx^2} \qquad \cdots\cdots\text{①}$$

其中　$$U=U(x,\ s)=\mathscr{L}\{u(x,\ t)\}=\int_0^\infty e^{-st}\ u\ dt$$

利用 $u(x, 0)=10\sin 2\pi x-6\sin 4\pi x$，① 式化成

$$4\frac{d^2U}{dx^2}-sU=6\sin 4\pi x-10\sin 2\pi x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

對邊界條件 $u(0, t)=0$, $u(3, t)=0$, 取拉氏變換，

$$\mathscr{L}\{u(0,\ t)\}=0, \qquad \mathscr{L}\{u(3,\ t)\}=0$$

或
$$U(0,\ s)=0, \qquad U(3,\ s)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

求常微分方程式 ② 在條件 ③ 下的解，可得

$$U(x,\ s)=\frac{10\sin 2\pi x}{s+16\pi^2}-\frac{6\sin 4\pi x}{s+64\pi^2}$$

故
$$\begin{aligned} u(x,\ t) &= \mathscr{L}^{-1}\{U(x,\ s)\} \\ &= \sin 2\pi x\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{10}{s+16\pi^2}\right\}-\sin 4\pi x\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s+64\pi^2}\right\} \\ &= 10e^{-16\pi^2 t}\sin 2\pi x-6e^{-64\pi^2 t}\sin 4\pi x. \end{aligned}$$

【例題 2】 解邊界值問題

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad x>0,\ t>0$$

$$u(x,\ 0)=0,\ u_t(x,\ 0)=0,\ u(0,\ t)=A_0\sin\omega t,\ |u(x,\ t)|<M,\ M>0.$$

解 經拉普拉斯變換後，

$$U(x,\ s)=\mathscr{L}\{u(x,\ t)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}\,u(x,\ t)\,dt$$

$$U_{xx}(x,\ s)=\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2}\right\}=\frac{d^2}{dx^2}\mathscr{L}\{u(x,\ t)\}$$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2}\right\}=s^2\,\mathscr{L}\{u(x,\ t)\}-su(x,\ 0)-u_t(x,\ 0)$$

$$U(0,\ s)=\int_0^{\infty}e^{-st}u(0,\ t)\,dt=\int_0^{\infty}A_0\,e^{-st}\sin\omega t\,dt=\frac{A_0\omega}{s^2+\omega^2} \quad \cdots\cdots ①$$

$$|U(x,\ s)|<M_0,\ M_0>0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

由上知原式變成 $$\frac{d^2U}{dx^2}-\frac{s^2}{a^2}U=0$$

其通解為 $$U(x,\ s)=c_1\,e^{sx/a}+c_2\,e^{-sx/a}$$

由 ② 式知 $c_1=0$，得 $$U(x,\ s)=c_2\,e^{-sx/a}$$

由 ① 式知 $$c_2=\frac{A_0\omega}{s^2+\omega^2}$$

因此，$$U(x,\ s)=\frac{A_0\omega}{s^2+\omega^2}\,e^{-sx/a}$$

由反拉普拉斯變換知

$$u(x,\ t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{A_0\omega}{s^2+\omega^2}\,e^{-sx/a}\right\}$$

$$=\begin{cases}A_0\sin\omega\left(t-\dfrac{x}{a}\right), & t\geq\dfrac{x}{a}\\[2mm] 0 & ,\ t<\dfrac{x}{a}\end{cases}.$$

習題 10-5

解下列各邊界值問題.

1. $u_t=4u_{xx},\ u(0,\ t)=0,\ u(\pi,\ t)=0,\ u(x,\ 0)=2\sin 3x-4\sin 5x$

2. $u_t=2u_{xx},\ u(0,\ t)=0,\ u(3,\ t)=0$

   $u(x,\ 0)=5\sin 4\pi x-3\sin 8\pi x+2\sin 10\pi x$

3. $u_t=u_{xx},\ u(0,\ t)=0,\ u(4,\ t)=0,\ u(x,\ 0)=6\sin\dfrac{\pi x}{2}+3\sin\pi x$

4. $u_{tt}=4u_{xx},\ u(0,\ t)=u(5,\ t)=0,\ u(x,\ 0)=0,$

   $u_t(x,\ 0)=3\sin 2\pi x-2\sin 5\pi x$