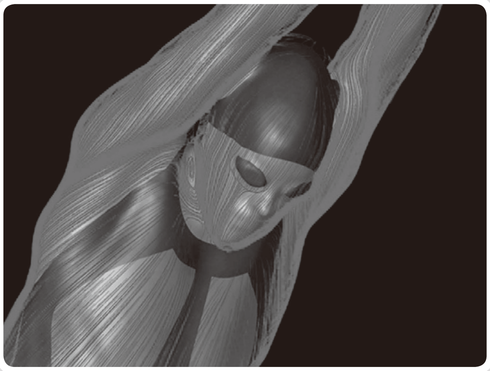
Chapter

計算流體力學簡介 15

學習目標

讀完本章後，你將能夠

- 了解高品質網格的重要性。
- 了解如何在計算區域運用適當邊界條件。
- 了解如何在基本工程問題應用 CFD，並判斷結果是否合乎物理意義。
- 了解需要深入研究及大量練習才能成功運用 CFD。



水流過一個男性游泳者，利用 ANSYS-FLUENT CFD 軟體模擬，該圖像顯示出沿著所述主體的表面模擬的油流線，在頸部的區域的流動分離是可見的。
Photo used with the permission of the owner, Speedo International Limited.

本章概略介紹計算流體力學 (CFD)。雖然任何熟悉電腦的人都可以使用 CFD 軟體，但是所得到的結果在物理上卻不一定是正確的。事實上，如果網格建立不恰當，或邊界條件、流動參數設定不對，其結果可能完全是錯的。因此，本章的目標是提供建立網格、設定邊界條件與判斷計算結果的方針。本章重點為 CFD 在工程問題上的應用，而不是網格建立技術、離散化的方法、CFD 運算法或數值穩定性。

其中所用的例題是由市售軟體 ANSYS-FLUENT 所得來的，使用其它 CFD 軟體會得到類似但不會是完全相同的結果。例題包含可壓縮與不可壓縮流、層流與紊流，包含對流熱傳，以及具有自由表面的流動。最好的學習方式就是動手練習。因此，我們提供一些使用商用 CFD 軟體的習題供學生練習，也在本書專屬的網站 www.mheducation.asia/olc/cengel 提供許多額外的 CFD 問題供學生參考與練習。

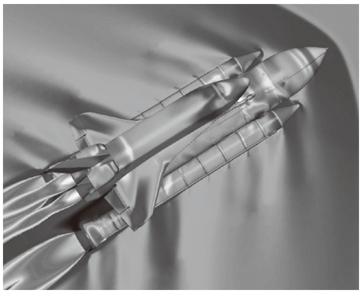


圖 15-1 太空梭發射載具上升時的 CFD 計算。網格需要 16,000,000 個格點，圖中顯示壓力等高線。自由流的條件為 Ma = 1.25，其攻角為 −3.3°。
NASA/Photo by Ray J. Gomez. Used by permission.

15-1 簡介與基本原理

動機

關於有流體流動的工程系統，其設計及分析有兩種基本方法：實驗與計算。前者一般包含模型的建構與在風洞或其它設備內的測試 (第 7 章)，而後者則包含微分方程組的求解，不論是解析 (第 9 與 10 章) 或數值方法。本章對於計算流體力學 (computational fluid dynamics, CFD) 作簡略的介紹。現代工程師們同時運用實驗與 CFD，這兩者是互補的。例如，工程師可能實驗得到全域的性質，如升力、阻力、壓力降、功率之類。但是使用 CFD 可得到流場的細節，如剪應力、速度及壓力曲線 (圖 15-1)，以及流線。此外，實驗數據通常被用來驗證 CFD 的解答。CFD 則被用來縮短設計時間，減少反覆調整參數所需的循環次數，並減少實驗的測試量。

現階段 CFD 可以掌握層流的問題，但是工程上實際的紊流問題必須先有紊流模型才能處理。然而，沒有任何紊流模型可適用所有的情形，所以紊流 CFD 結果的適用性最多只能跟其所根據的紊流模型一樣。雖然如此，標準的紊流模型在許多實際工程問題上都有合理的結果。

本章並不包含許多相關的主題 —— 如格點的建立方法、數值解的運算法、有限差分與有限容積的方法、穩定性、紊流模型等。在本章裡，我們只勾勒出這個領域的外觀。我們的目標是從使用者的角度，提供 CFD 的基本觀念，如何建立網格、設定邊界條件，及判斷計算結果是否符合物理意義。

我們從要求解的微分方程組開始，列出解題過程的大綱。下一節的內容，將集中在用 CFD 解層流、紊流、熱流、可壓縮流及明渠流的例題。

運動方程式

對於黏性、不可壓縮牛頓流體的穩定層流，在沒有自由表面的效應下，運動方程式為連續方程式

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0 \tag{15-1}$$

與納維–斯托克斯 (Navier-Stokes) 方程式

$$(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P' + \nu\nabla^2\vec{V} \tag{15-2}$$

嚴格來說，式 (15-1) 是守恆方程式，而式 (15-2) 是傳輸方程式，表示在計算區域內的動量傳輸。前者是純量式，而後者是向量式，表示共有四個方程式。在式 (15-1) 與 (15-2) 裡，$\vec{V}$ 是流場的速度，ρ 是其密度，ν 是其運動黏度 ($\nu = \mu/\rho$)。在沒有自由表面效應下，我們可以用修正壓力 P'，因此刪去重力項。假設 ρ 與 ν 為常數，式 (15-1) 與 (15-2) 只應用在不可壓縮流動。因此，對於卡氏座標的三維流動，有四個聯立微分方程式解四個未知數 u、v、w 及 P' (圖 15-2)。如果流動是可壓縮的，這兩式必須適當修正，如 15-5 節所描述的。液體流動幾乎都可以當作不可壓縮處理，而氣體流動在馬赫數夠低時，也幾乎是不可壓縮的狀態。

連續：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

***x*- 動量：**

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P'}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

***y*- 動量：**

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P'}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

***z*- 動量：**

$$u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P'}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

圖 15-2　在穩定、不可壓縮的牛頓流體，性質固定且無自由表面的情形，CFD 要求解的運動方程式。這裡所用的是卡氏座標系統。共有 4 個方程式與 4 個未知數：u、v、w 及 P'。

解題過程

要以數值方法求解式 (15-1) 及 (15-2)，需要進行以下步驟。注意某些步驟之間的順序是不可互換的 (特別是步驟 2 與步驟 5)。

1. 選定一個計算區域以建立網格 (grid 或 mesh)；這範圍被分割成許多小塊，稱為元素。對於二維 (2-D) 的區域，這些元素是平面，對於三維 (3-D) 的區域，這些元素是體積 (圖 15-3)。你可以把元素想像成小的控制容積，其中守恆方程式的離散式有待求解。我們把討論侷限在以元素為中心的 CFD 軟體。CFD 解答的品質與網格的品質有密切關係。因此，在進行下一步之前要先確認網格具有好的品質 (圖 15-4)。
2. 計算區域內的每一條邊 (2-D 流動) 或每一個面 (3-D 流動) 都設定好邊界條件。

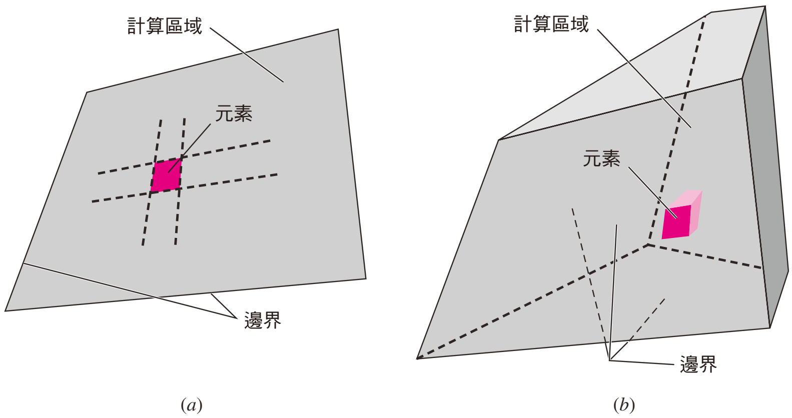


圖 15-3　一個計算區域是空間的一區域，其內的運動方程式以 CFD 求解。一個元素是這個區域內的微小次區域。圖中所示為 (*a*) 二維區域及四邊形元素，與 (*b*) 三維區域及六面體元素。二維區域的邊界稱為邊，而三維的邊界則稱為面。

圖 15-4 好的網格是好的 CFD 模擬的基礎。

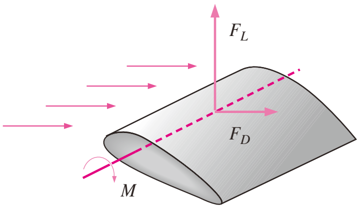


圖 15-5 流動的一般性質，如物體上的力和動量，可以在 CFD 求解收斂後計算。它們也可以在疊代中同時計算，以監視收斂情形。

3. 設定流體的型態 (水、空氣、汽油等) 以及其性質 (溫度、密度、黏性等)。許多軟體已經有內建的資料庫，可以輕易設定。
4. 設定數值參數及解題的運算法。這些視 CFD 的軟體而定，在此不予討論。大部分 CFD 軟體的內定值，對於簡單的問題都適用。
5. 設定每個元素內所有流場變數的起始值。這些起始條件可能是對或錯的，但對起動計算是必須的，才能讓疊代過程進行 (第 6 步)。對於非穩定流動，則起始條件必須正確。
6. 從猜測的起始值開始，將式 (15-1) 與 (15-2) 的離散式以疊代方式求解。如將式 (15-2) 的所有項移到一側，其總和稱為殘值，在“正解”時每個元素其總和為零。但是在 CFD 解裡其和不會是零，而是隨疊代次數增加而逐漸下降。殘值可以被視為衡量解答偏離正確解的程度，可以藉由方程式的平均殘值判斷其解是否已經收斂。有時候需要數百或數千次疊代才會達到收斂，而殘值會比原來的減少幾個數量級。
7. 一旦解答收斂，諸如速度與壓力等流場變數就可以用圖形分析。使用者也可以定義額外的函數，由流場變數的代數組合而成。大部分市售 CFD 軟體具有內建的後處理器 (postprocessors)，可以快速作流場的圖形分析。因為大部分圖形輸出是彩色的，CFD 又名彩色流體力學 (colorful fluid dynamics)。
8. 從解答可以計算如壓力之類的流場的通用性質，以及作用於物體的力量與動量之類的積分性質 (圖 15-5)。在大多數的情況下，要注意疊代過程中，這些值與殘值的關係：當解答收斂時，這些性質應該趨向固定值。

對於不穩定流場，需要設定物理時間步長與適當的起始條件。利用疊代迴路求解傳輸方程式來模擬一個時間步長內流場變數的改變。因為一個時間步長內的變化很小，每個時間步長所需要的疊代的次數很少 (十的數量級)。當“內部迴路”收斂時，軟體再移到下一個時間步長繼續解題。如果流動有穩態解，通常利用時間移動的方式得到穩態解會比較簡單 —— 只要時間足夠時，流暢變數會趨向穩態的解答。大部分 CFD 軟體利用這個優點，在內部設定一個虛擬的時間來逼近穩態解。在這些情形下，各元素使用的虛擬時間步長甚至可以調為不同，以減少收斂所需的時間。

其它的技巧，如多重網格，也常用來節省電腦運算時間。計算時先求粗網格的變數值，再以此值求更細網格的解答 (圖 15-6)。在某些軟體裡，疊代過程中可能藏有許多層多重網格，不需要使用者輸入。你還可以從相關的書，如 Tannehill、Anderson、Pletcher 的著作 (2012)，學到更多計算演算法與數值技巧，改善收斂的過程。

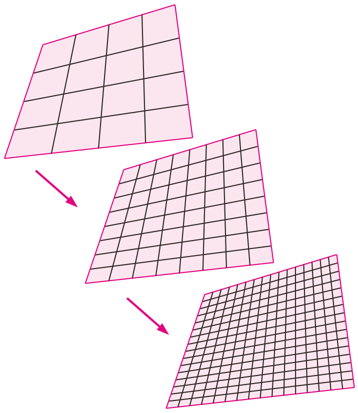


圖 15-6　使用多重網格時，運動方程式先以粗網格求解，再以更細的網格求解。這樣會使收斂加快。

額外的運動方程式

如果問題的能量轉換及熱傳遞極為重要，必須求解另一個傳輸方程式，就是能量方程式。如果溫度變化造成密度的顯著變化，則會利用狀態方程式 (如理想氣體方程式)。如果浮力很重要，溫度對密度的影響會反映在重力項上 [必須從式 (15-2) 的修正壓力分離出來]。

對於一組已知的邊界條件，層流的 CFD 解答接近於“正確”解，其正確度受限於離散方式、收斂程度，以及網格的細密程度。另一方面，如果網格夠細密，足以解析所有不穩定且三維的紊流旋渦，則紊流的模擬也可以得到一樣好的解答。然而，由於電腦的限制，這種紊流的直接模擬對於實際的工程問題通常是不可能的，反而需要額外的紊流模型才能求解。紊流模型產生額外的傳輸方程式來模擬紊流對混合與擴散的增加效果。這些方程式跟質量及動量方程式需要一起求解。紊流模型在 15-3 節將會詳細討論。

現代的 CFD 軟體包含許多選項，可以計算質點的軌跡、特定物質的傳輸、熱傳遞及紊流。這些軟體很容易使用，不需要知道方程式也能求解。但這有潛在的風險：不懂流體力學的人，很容易產生錯誤的解答 (圖 15-7)。使用者必須有一些流體力學的基本知識，才能分辨答案合乎物理意義與否。

圖 15-7　CFD 很容易得到解答，圖形也很漂亮；但是正確答案取決於正確的輸入與對流場的了解。

網格建立與網格獨立

在 CFD 求解的第一步是產生全計算區域的網格，這些網格定義了網格點，作為流場變數 (速度、壓力等) 之計算點。現代的商用 CFD 軟體會附有網格產生器，也可能會接受其它的網格產生程式。本章所用的網格是由 ANSYS-FLUENT 的網格產生器產生的。

許多 CFD 軟體能以結構化或非結構化網格運算。**結構化網格** (structured grid)

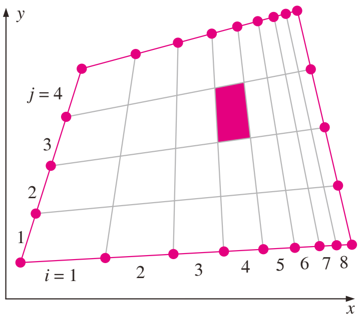


圖 15-8 二維結構化網格的舉例，頂邊及底邊各有九個格點與八個分格，左右各有五個格點與四個分格。圖示的 i、j 為指標，陰影的元素指標為 $(i=4, j=3)$。

包含四邊形 (2-D) 的平面元素或六面體 (3-D) 的立體元素。雖然這些元素可能扭曲偏離矩形，每個元素仍然可以按 (i, j, k) 標示其順序，即使其方向不一定與 x、y 與 z 一致。圖 15-8 所示是一個 2-D 結構化網格的解說。在建構上，頂面與底面各有 9 個**格點** (nodes)。這些格點對應 8 個**分格** (intervals)。同樣地，左面與右面各有 5 個格點，對應 4 個分格。這些分格則以 $i=1$ 至 8，$j=1$ 至 4 標示。每個元素的指標可以用其在網格內是第幾列與第幾行定義。例如，在圖 15-8 內有陰影的元素是 $(i=4, j=3)$。要注意的是，有些軟體內標示格點而非網格。

非結構化網格 (unstructured grid) 包含各種形狀的元素，通常為三角形與四邊形 (2-D)，以及四面體與六面體 (3-D)。圖 15-9 所示是與圖 15-8 相同的一塊區域，其四邊也使用與圖 15-8 相同的分格。但對其內部則產生兩組非結構化網格。跟結構化網格不同，非結構化網格的定位不能以 i 和 j 表示，而是在 CFD 內部以別的方式標示。

對於複雜的幾何形狀，非結構化網格比較容易建立。但是，結構化網格具有某些優點。例如，有些 CFD (通常較為舊式) 是為結構化網格所寫的，收斂較快，也更準確。但是，對於現代泛用 CFD 軟體，結構化網格與非結構化網格都能處理，這已經不是問題了。更重要的是，通常結構化網格比非結構化網格所需的元素數更少。以圖 15-8 的圖形為例，在相同的四邊節點下，結構化網格只需 32 個元素，而圖 15-9 的非結構化網格則分別需要 38 與 76 個元素。

在邊界層裡垂直於壁面的流動變化快速，在相同的元素數量之下，結構化網格比非結構化網格能得到更精細的解析度。這可以比較圖 15-8 與圖 15-9 最右邊的網格看出。結構化網格的元素較薄而緊密，而非結構化網格則不是。

我們必須強調不論你選擇何種網格 (結構化或非結構化、四邊或三角)，網格的品質才是 CFD 解答可靠性的關鍵。特別要注意，不要使元素極度扭曲，因為這會造成收斂的困難與數值解的不準確。圖 15-9a 的陰影元素是中度扭曲的例子，所謂

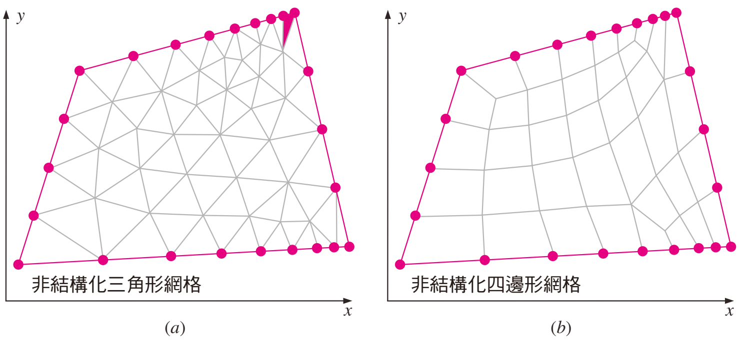


圖 15-9 二維非結構化網格的例子，頂邊及底邊各有九個格點與八個分格，左右各有五個格點與四個分格。這些網格用與圖 15-8 相同的格點分佈：(a) 非結構化三角形網格，與 (b) 非結構化四邊形網格。在 (a) 裡陰影的元素有一點扭曲。

扭曲 (skewness) 是指偏離對稱的程度。對於二維與三維元素都有各種扭曲的方式，三維的扭曲不在本書範圍內，而對於二維的扭曲，最適當的度量值是**等角度扭曲度** (equiangle skewness)，定義為

等角度扭曲度：
$$Q_{EAS} = \text{MAX}\left(\frac{\theta_{max} - \theta_{equal}}{180° - \theta_{equal}}, \frac{\theta_{equal} - \theta_{min}}{\theta_{equal}}\right) \tag{15-3}$$

其中 θ_{min} 與 θ_{max} 為元素裡任何兩邊之間的最小與最大夾角，θ_{equal} 是理想等角元素的任一夾角。對於三角形 $\theta_{equal} = 60°$，對於四邊形 $\theta_{equal} = 90°$。你可以從式 (15-3) 證明對於 2-D 的元素，$0 < Q_{EAS} < 1$。根據定義，正三角形沒有扭曲度。正方形或矩形也沒有扭曲度。圖 15-10 所示的是令人無法接受的高扭曲度元素。有些網格產生器會使用數值方法使網格平順以減少扭曲程度。

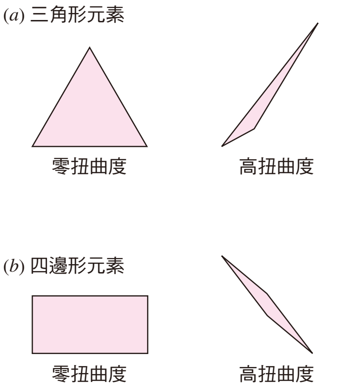


圖 15-10　用二維表示扭曲度：(*a*) 等邊三角形的扭曲度為零，但是傾斜嚴重的三角形扭曲度高；(*b*) 同樣地，矩形的扭曲度為零，但是傾斜嚴重的四邊形扭曲度高。

其它因素也會影響網格的品質。例如，元素的尺寸劇烈改變會造成收斂的困難。過度細長的元素有時也會造成困難。雖然使用的元素數量較少，結構化網格並不永遠是最佳的選擇，要視計算區域的形狀而定。維持網格品質才是最重要的。高品質的非結構化網格好過低品質的結構化網格。圖 15-11 所示是一個例子，其右上角是尖銳的夾角。對於這例子，我們調整分格使各種網格的元素數在 60 與 70 之間，以便比較。結構化網格 (圖 15-11*a*) 有 8×8 = 64 個元素；但是最大等角度扭曲度是 0.83 —— 右上邊的元素嚴重扭曲。非結構化三角形網格 (圖 15-11*b*) 有 70 個元素，最大扭曲度降為 0.76。更重要的是整體的扭曲度較低。非結構化四邊形網格 (圖 15-11*c*) 有 67 個元素。雖然整體的扭曲度較結構化來得低，但是最大扭曲度卻是 0.87 — 比它更高。圖 15-11*d* 的混合網格稍後會討論。

有些情況使結構性網點成為優先選項，如 CFD 軟體要求、邊界層須有高解析或電腦運算能力已達極限。邊緣為直線的幾何形狀可以直接用結構化網格。只需

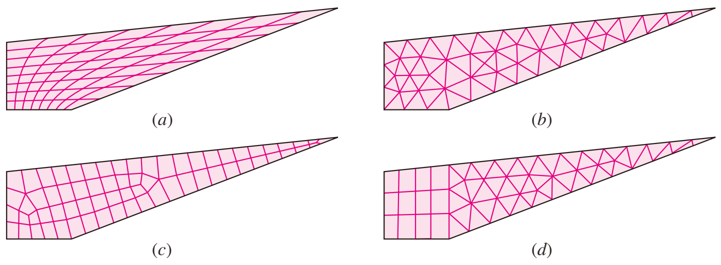


圖 15-11　在一個嚴重扭曲的計算區域，四種二維網格的比較：(*a*) 結構化的 8×8 的網格，64 個元素，$(Q_{EAS})_{max} = 0.83$；(*b*) 非結構化三角形網格，70 個元素，$(Q_{EAS})_{max} = 0.76$；(*c*) 非結構化四邊形網格，67 個元素，$(Q_{EAS})_{max} = 0.87$；以及 (*d*) 混合網格，62 個元素，$(Q_{EAS})_{max} = 0.76$。

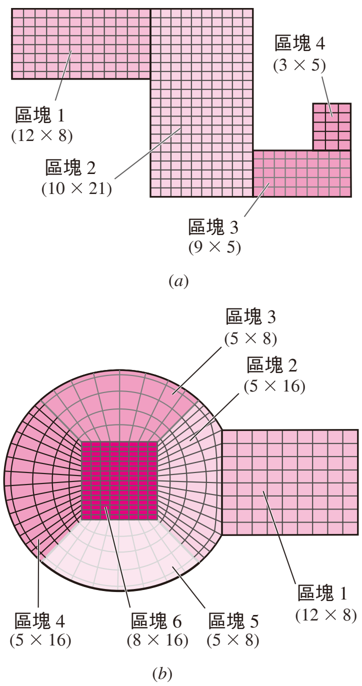


圖 15-12 多重區塊 CFD 分析的結構化網格例子：(*a*) 矩形區塊組成的二維計算域；及 (*b*) 具有曲線的較複雜二維計算域，但仍然是由四邊形元素及四邊形區塊所構成，括弧內是每個區塊的 *i* 與 *j* 分格。當然有合適的替代方法來將這些計算區域分割成區塊。

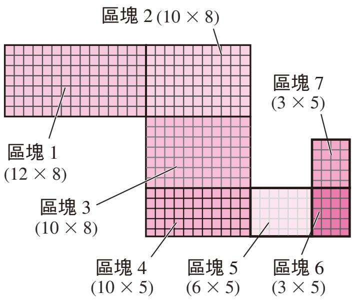


圖 15-13 在圖 15-12*a* 裡的多重網格經過修改，讓只能處理基本網格的 CFD 軟體可以計算。

要將待計算的區域分割成四邊 (2-D) 或六面 (3-D) 的**區塊** (blocks 或 zones)。在每個區塊內建立結構化網格 (圖 15-12*a*)。這樣的分析稱為**多區塊** (multiblock) 分析。對於具有曲線外表的複雜幾何形狀，我們需要判斷如何將計算區域分割成區塊。這些區塊可能具有平直的邊緣 (2-D) 或表面 (3-D)，也可能沒有。圖 15-12*b* 所示為具有圓弧的二維例子。大部分 CFD 軟體要求區塊與區塊之間，其共用邊緣或表面的節點相符。

許多商用軟體允許你將區塊的邊緣或表面分割，各自設不同邊界條件。例如在圖 15-12*a* 左邊的區塊 2，其上三分之一是與區塊 1 相接的內部邊緣，下三分之二則是壁面邊界。在區塊 2 右邊與區塊 3 的頂面也有類似的情形。有些 CFD 軟體只接受基本區塊，也就是區塊的邊緣或表面不能分割。例如，圖 15-12*a* 需要切成如圖 15-13 的七個基本區塊。但是其總元素數目是一樣的。對於允許將區塊邊緣或表面分割的 CFD 軟體，也可以將兩個以上的區塊合併成一個。我們可以練習將圖 15-12*b* 的結構化網格簡化成三個非基本區塊。

當處理圖 15-12*b* 這樣的複雜造型時，目標是建立沒有嚴重扭曲的網格。此外，元素的尺寸不能急遽變化，固體壁面的元素應較細密以提高邊界層內的解析度。多重區塊網格在複雜幾何的結構化網格是必要的，但在非結構化網格就不必要。

最後，混合網格是合併結構化與非結構化區域或區塊的網格。例如，你可以在壁面附近設置結構化網格，再在邊界層外側設置非結構化網格。混合網格常用來局部提高壁面附近的解析度 (圖 15-14)。不論建立何種網格 (結構化、非結構化或混合)，你一定要小心避免嚴重扭曲的元素，如圖 15-14 中沒有任何元素有明顯的扭曲，另一個例子則是圖 15-11*d* 所示的混合網格。我們將計算區域分割成兩個區塊。左邊的四邊形區塊是結構化網格，右邊的三角形區塊是非結構化網格。最大的扭曲度是 0.76，與圖 15-11*b* 的相同，但是元素的數目從 70 降到 62 個。

計算區域有如圖 15-11 尖角時，其尖端很難建立網格。一個避免嚴重扭曲的方法是將尾端削去一點。對於幾何形狀的改變很小，流場的影響很輕微，但是可大為減少扭曲度而改善 CFD 的性能。例如將圖 15-11 的尾端剪去而得到圖 15-15，利用混合網格得到 62 個元素，最大扭曲度只剩 0.53。

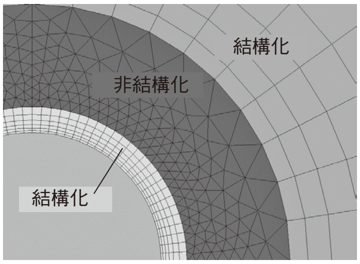


圖 15-14　靠近曲面的二維混合網格的例子，圖中標示兩個結構化區域，一個非結構化區域。

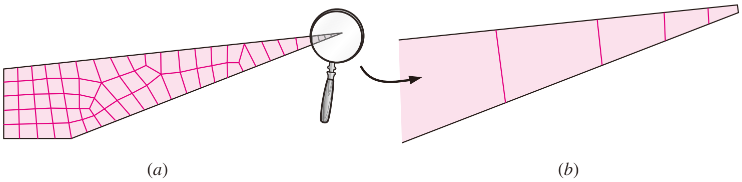


圖 15-15　在圖 15-11 的計算域的混合網格，其尖角切除：(*a*) 全視圖 — 網格含 62 個元素，$(Q_{EAS})_{max} = 0.53$；(*b*) 截角的放大視圖。

這裡所示的例子是對二維的。在三維空間中，你仍然可以在結構化、非結構化和混合網格之間進行選擇。如果一個四面的 2-D 的結構單元被延伸到第三個維度，一個完全結構化的三維網格產生，即六面體單元 (每組每單元 6 面)。當 2-D 的非結構化三角形網格被延伸到第三個方向，產生的三維網格可以是稜鏡網格 (n = 每個網格有 5 面) 或四面體網格 (n = 每個網格像金字塔有 4 面)，如圖 15-16。當六面體網格是不易實現的應用時 (例如複雜的幾何形狀)，四面體網格是一種常見的替代方法。網格自動生成的軟體往往產生四面體網格。然而，正如在二維情況下，當邊界有相同的分割時，三維非結構化四面體網格，通常比結構化的六面體網格有更大的網格數。

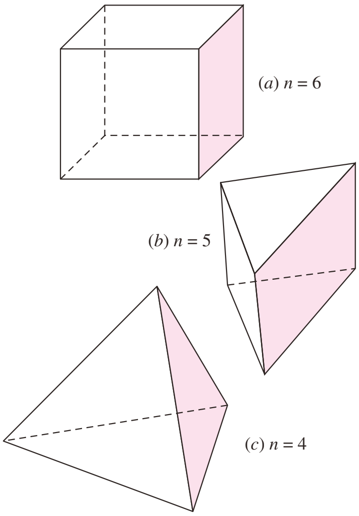


圖 15-16　三維細胞的例子：(*a*) 六面體，(*b*) 稜鏡，和 (*c*) 四面體，每個情況都附上表面數的 n 值。

最新增強的網格生成是採用多面體網格。正如其名稱所隱喻的，這樣的網格由許多面 (所謂的多面體網格) 組成。一些現代的網格生成器可創建非結構化三維網格由 n 邊細胞混合建立，其中 n 可以是任何大於 3 的整數。一個多面體網格的例子如圖 15-17。在一些程式，所述多面體網格透過合併四面體單元，減少了總網格點計數，這節省了顯著的計算機內存量和加快 CFD 計算。總網格數的減少 (以及相應的 CPU 時間的節省)，可多達 5 倍，且有報告指出不會妥協解析的正確度。多面體網格的另一個優點是，細胞扭曲可以減小。改善整體的網格質量，也加快收斂。最後，大的 n 的多面體網格有更多鄰近的網格，相較於簡單的四面體或稜形細胞而言。這是有利的，如須計算流動的梯度 (導函數)，其詳細說明已超出本書的範圍。

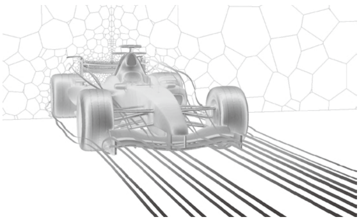


圖 15-17　一級方程式賽車使用的是多面體網格以減少細胞計數模型與模擬時間和利用 ANSYS-FLUENT CFD 軟體模擬，圖像描繪在車身上的陰影壓力等值線 (深色表示較高的壓力) 和跡線 (按時間加深陰影)。因為汽車的右側和左側之間的對稱性，只對車的一半進行分析；最後在區域內描繪鏡像 (對於該中心平面)。

建立好的網格常是繁瑣而耗時的。工程師們都同意網格的建立通常比求解本身更花時間。但這是值得的 (圖 15-18)，因為

圖 15-18 花時間在建立好網格上是值得的。

所得的結果會更可靠，也收斂得更快；解析度不好的網格甚至會導致錯誤的答案。所以，對於 CFD 的使用者，測試解答中網格是否獨立是很重要的。測試網格獨立的標準方法是增加解析度 (每個方向加倍) 再重新解題一次。如果答案沒有明顯改變，原先的網格也許就夠了。如果答案明顯改變，就必須持續增加解析度。這個過程很耗時間，且不能預期。在 2-D 的模擬，如果每邊的分格加倍，元素的總數增加為 $2^2 = 4$ 倍，所需的計算時間也約增加為 4 倍。對於三維的模擬，則元素總數增加為 $2^3 = 8$ 倍。你可以了解網格獨立的測試很容易超越電腦的記憶體容量與 CPU 的極限。如果不能將分格加倍，至少將其增加百分之二十。

討論網格生成的最後一點，目前在 CFD 的發展趨勢是採用自動產生網格，加上以基於誤差估算，來進行網格自動細化。然而，即使在這些新興趨勢之下，重點還是在於了解網格對 CFD 解答的影響。

邊界條件

當兩個 CFD 的運動方程式，計算區域 (甚至於網格) 可能都相同時，其流動的類型是由設定的邊界條件所決定。要得到精確的 CFD 解答需要有適當的邊界條件 (圖 15-19)。邊界條件有很多種，以下所描述的是最常用的。這裡所用的名稱是以 ANSYS-FLUENT 的為準，其它軟體可能有別的名稱，細節也可能有點不同。在三維流場使用表面 (face) 或平面 (plane)，二維流場則使用邊 (edge) 或線 (line)。

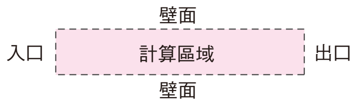


圖 15-19 計算區域的所有邊界條件都要小心設定。要得到精確的 CFD 解答，需要合理的邊界條件。

壁面邊界條件

壁面 (wall) 為最簡單的邊界條件，流體不能穿越壁面，因此在邊界垂直方向的速度為零。此外，根據邊界無滑動 (no-slip) 條件，在靜止的壁面設定其切線方向的速度也為零。在圖 15-19 裡，上下邊緣被設為無滑動的壁面。如果要求解能量方程式，還要設定壁面溫度或壁面熱通量 (但非兩者都設，見 15-4 節)。如果使用紊流模式，需要解紊流傳輸方程式，壁面的粗糙度或也要設定。此外，使用者必須從各種紊流的壁面處理方式 [**壁面函數** (wall functions) 等] 中選取適當者。這些不在本書範圍 (參考 Wilcox, 2006)。幸運的是，許多現代的 CFD 軟體內定的選項對許多牽涉到紊流的應用已經足夠應用。

許多軟體還可以模擬移動壁面及壁面具特定剪應力的情形。有時我們希望讓流體沿壁面滑動，稱為非黏性壁面 (inviscid wall functions)。例如，我們可以設定游泳

池或浴盆的自由表面為無剪應力壁面 (圖 15-20)。因為空氣所造成的黏剪應力極小可忽略 (第 9 章)。但是在設定這些近似時，並不考慮表面波及其所造成的壓力起伏。

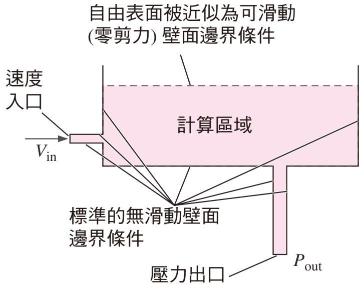


圖 15-20 標準的壁面邊界條件是設在靜定的固體表面，其中我們還設定壁面溫度或壁面熱通量。沿壁面的剪應力可以設為零，以模擬液體的自由表面，如這裡所顯示的游泳池。沿此 “壁面” 有滑動，以模擬自由表面 (接觸空氣)。

流入／流出邊界條件

流體進入或離開計算區域的邊界有很多種選項，通常可分類為指定速度條件或指定壓力條件。在**速度入口** (velocity inlet)，我們設定入口面的流體速度。如果需要解能量與紊流方程式，則還需要設流入處的溫度與紊流性質。

在**壓力入口** (pressure inlet)，我們設定入口面的總壓力 (例如從已知壓力的加壓槽流入計算區域)。在**壓力出口** (pressure outlet)，我們設定出口面的靜壓力；通常是大氣壓力 (錶壓力為零)。例如，次音速噴管對環境的開口處壓力為大氣壓 (圖 15-21)。流動性質，如溫度與紊流性質之類，也可以設定。除非解答有**反向流動** (reverse flow)，否則在出口處通常不設定這些性質。壓力出口有反向流動通常表示計算區域不夠大，如果在疊代過程持續出現，就應該將計算區域擴大。

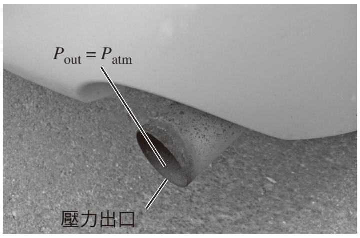


圖 15-21 模擬不可壓縮流場時，管的出口若曝露於大氣中，適用壓力出口的邊界條件，且 $P_{out} = P_{atm}$。這裡所示的是汽車的排氣管。

速度入口處不設定壓力，否則在數學上會造成過度設定，因為壓力與速度在運動方程式裡是耦合的。在速度入口，壓力會自動調整以符合流場內的關係。同樣地，在壓力入口或出口不設定速度，速度會自動調整以符合流場內的關係 (圖 15-22)。

在計算區域的出口另有一個選項是**流出** (outflow) 邊界條件。在流出邊界，不設定任何流動性質，而是設定其垂直於出口面的梯度為零 (圖 15-23)。例如，如果導管夠長，出口的流動為完全發展，就適合用流出邊界條件。如果流動在展開中，但是出口的壓力為已知，則用壓力出口邊界條件較為合適。因為旋轉運動造成其壓力梯度呈放射狀，不易由壓力出口條件來掌握，所以在旋轉流動使用流出邊界條件比起使用壓力出口條件較為合適。

一般簡單的 CFD 應用常設定一個或多個速度入口與一個或多個壓力出口或流

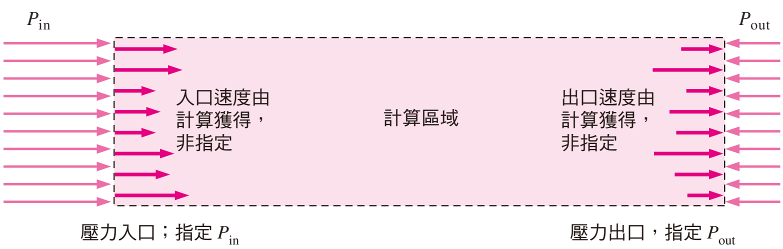


圖 15-22 壓力入口或壓力出口，我們設定面上的壓力，但是無法設定經過面上的速度。當 CFD 求解收斂時，速度自我調整，以滿足所描述的壓力邊界層。

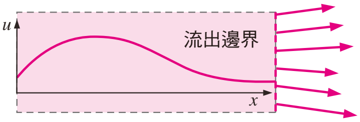


圖 15-23 在一流出邊界條件，垂直於流出面的速度梯度為零，如圖中所示，沿水平線上 u 為 x 的函數。在流出邊界既不設定壓力，也不設定速度。

出邊界。其餘的邊界則設定為壁面。例如，在圖 15-20 的游泳池，我們設定計算區域的最左面是速度入口，最右面為壓力出口。其餘的邊界是壁面，而自由表面設為剪應力為零的壁面。

最後，對於可壓縮流動的模擬，其入口與出口的邊界條件很複雜，其討論不在本書的範圍內。許多 CFD 軟體對於可壓縮流有**遠端壓力** (pressure far field) 邊界條件。這種邊界條件是用來設定入口的馬赫數、壓力與溫度。出口處的流動變數可以由內部的值外插得到，當然條件是不能有反向流動。

其它邊界條件

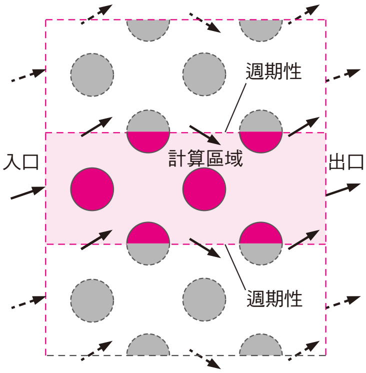


圖 15-24 週期邊界條件設定於兩相同的面上。任何在其中一面發生的，也會在其週期面發生，圖中顯示跨週期面的速度向量顯示。

有些邊界條件既不是壁面，也不是入口或出口，而是某種強制的對稱或週期性。例如，在幾何形狀有重複時，**週期邊界** (periodic) 就很有用，沿重複邊界的流場變數與另一個相同形狀面的相同。因此，離開第一個面的流動，其性質 (速度、壓力、溫度等) 與進入第二個面的相同。週期邊界條件通常成對出現，如葉輪的扇葉之間，或流過熱交換管陣列 (圖 15-24) 之類的流場很有用。週期邊界條件使我們可以在比全流場小得多的區域內計算，以節省電腦資源。在圖 15-24 裡，你可以假想在計算區域 (陰影區域) 的上下各有無數個重複的區域 (虛線部分)。週期邊界條件需設定為平移 (translational) (用在如圖 15-24 的平行面) 或旋轉 (rotational) (用在兩徑向面之間)。風扇兩葉片之間的流動區域是旋轉式週期邊界的例子 (見圖 15-58)。

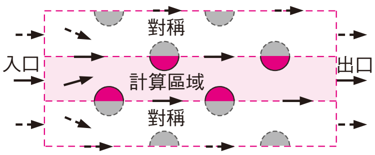


圖 15-25 設定為對稱邊界條件的面，其兩側的流動是鏡射的關係。圖中顯示計算區域 (陰影區域)，及其上下的假想區域 (虛線)，其內的速度向量是計算域內的鏡射。以這個熱交換器為例，區域的左面是速度入口，右面是壓力出口，圓柱形是壁面，而上下的面都是對稱面。

對稱邊界條件 (symmetry) 強制其兩側流場變數為鏡射關係。數學上，大部分流場變數在對稱面上的垂直梯度為零。對於具有一個或多個對稱面的流動，這種邊界條件使我們只需模擬一部分的流動區域，以節省電腦資源。對稱與週期邊界的差別在於不需要成對出現。此外，流體可平行流於對稱邊界，但不能穿越對稱邊界，而週期邊界則允許流體穿越。例如流過一陣列熱交換管的流動 (圖 15-24)，如果我們假設沒有流體流過週期邊界，則週期邊界可以改成對稱邊界，甚至可以將計算區域減半成圖 15-25。

對於軸對稱流場，其**軸** (axis) 邊界條件設在代表對稱軸的直線上 (圖 15-26*a*)。流體可以平行於軸流動，但是不能穿越。這種邊界使我們可以用二維場求解流動問題，如圖 15-26*b*。對於旋轉軸對稱流動，流體可以繞軸旋轉前進，通常又稱旋轉軸對稱 (rotationally symmetric)。

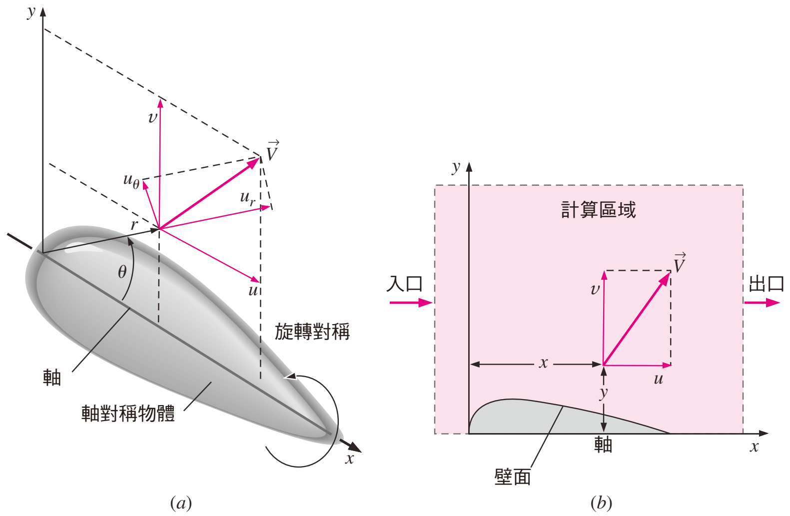


圖 15-26 軸邊界層是用在軸對稱流動的軸上 (在此是 x- 軸)，因為繞 x- 軸旋轉對稱。(*a*) 圖中所示，是 xy 或 $r\theta$ 的剖面，速度分量可以為 (u, v) 或 (u_r, u_θ)。(*b*) 此問題的計算區域 (紅色陰影區域) 化簡成二維的平面。在許多 CFD 軟體裡，將 x、y 用作軸對稱座標，其中 y 為離開對稱軸的距離。

內部邊界條件

最後一種邊界條件是在計算區域內部而不在表面或邊緣上的。當一個面被設定為**內部的** (interior) 邊界條件時，經過這面的流動不受任何強制改變 (圖 15-27)。當計算區域被分成不同區塊時，需要這種邊界連接。這種邊界條件在後處理時也很有用。在較需要技巧的問題裡，網格是滑動或旋轉時，兩區塊間的界面被用來平順傳遞資料。

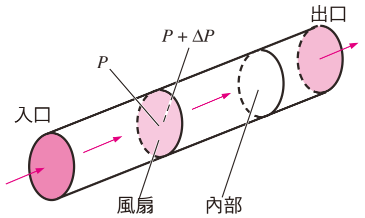


圖 15-27 風扇邊界條件設定在兩側壓力突然改變的面，以模擬管內的軸流風扇。當設定的壓力改變為零時，風扇邊界條件降成為內部邊界條件。

風扇 (fan) 邊界條件設定在突然增壓 (或減壓) 之處。這種邊界條件類似內部邊界條件，但是壓力突然上升。CFD 軟體並不求解每片扇葉的不穩定流場細節，而是模擬極薄的風扇，作用為改變兩側的壓力。風扇邊界可用於如風扇置於風管內的簡單模型 (圖15-27)、房間內的吊扇或提供飛機推力的螺旋槳或噴射引擎。如果其兩側的壓力差為零，就等於是內部邊界條件。

熟能生巧

學習 CFD 最好的辦法是透過例題及練習。我們鼓勵你用各種網格、邊界條件、數值參數等去熟悉 CFD。在處理複雜難題之前，最好先解較簡單的問題，特別是那些已經有解析解或經驗公式的 (作為比較與驗證之用)。

在以下的幾節中，我們要解幾個一般工程上常見的問題。先解層流問題，再解紊流問題。最後要舉熱流及可壓縮，以及具自由表面的流動為例。原書的網站上有彩色的圖形及動畫模擬。

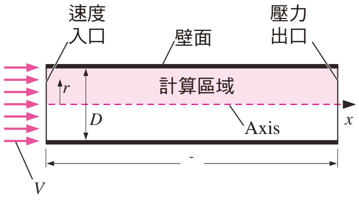


圖 15-28 因為在 x- 方向軸對稱，管內的流動可以用管的二維剖面，在 $r=0$ 到 $D/2$ 的區域求解。計算區域是圖中的陰影區域，圖形未按比例顯示。

15-2 層流 CFD 計算

CFD 在計算不可壓縮層流時表現優異，穩態或非穩態皆如此，只需要有足夠的網格解析度與適當的邊界條件。我們在這裡提出幾個層流解的簡單例子，特別著重在網格解析度與邊界條件。在所有的例題裡，流動都是不可壓縮且二維 (或軸對稱) 的。

雷諾數 Re = 500 之下的管流入口區域

考慮在平滑圓管內的室溫水流，管長 $L=40.0$ cm，直徑 $D=1.00$ cm。我們假設水以均勻速度 $V=0.05024$ m/s 進入。水的運動黏度為 $\nu=1.005\times10^{-6}$ m^2/s，計得雷諾數 $\mathrm{Re}=VD/\nu=500$。我們假設這是不可壓縮穩定層流。我們所在意的是入口處的區域，其中流動會逐漸變成完全展開。因為是軸對稱情形，我們設定計算區域為由軸至壁面的縱剖面，而不是三維的圓柱體 (圖 15-28)。我們建立六種結構化網格：極粗 (40 分格×徑向 8 分格)、粗 (80×16)、中等粗細 (160×32)、細 (320×64)、極細 (640×128) 與超細 (1280× 256) (注意每當兩個方向的間隔增加一倍，計算得網格數增加為四倍)。在所有的情形，沿軸向的節點都均勻分佈，但是沿徑向的則朝壁面逐漸細密，因為我們預期壁面附近的速度梯度較大。前三種情形的近距離視圖如圖 15-29 所示。

我們將六種情形以 ANSYS-FLUENT 的雙精度運算 (工程運算並非都需要雙精

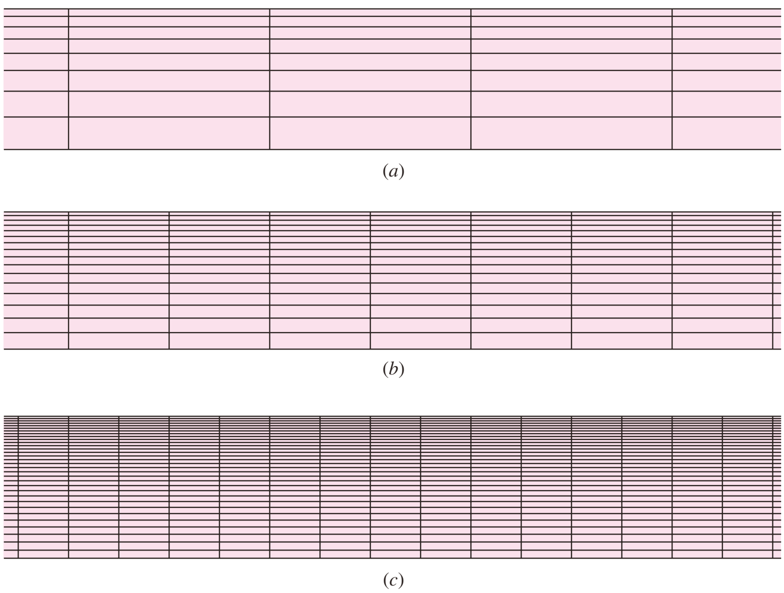


圖 15-29 在層流管流例題裡，三種較粗網格的部分視圖：(*a*) 極粗 (40×8)；(*b*) 粗 (80×16)；與 (*c*) 中等 (160×32) 。計算的元素數目分別為 320、1280 及 5120 個。在每個視圖裡，管壁是頂邊，而對稱軸是底邊，如圖 15-28 所示。

度－此例是為得到最佳精確的計算)。因為流動是層流、不可壓縮且對稱的，只需要解連續方程式及 x- 與 y- 方向的動量方程式。在 CFD 軟體裡，徑向的距離是用 y 座標表示 (圖 15-26)。程式運算至解答收斂為止。所謂收斂，就是殘值夠小。對於極粗的網格，大約運算 500 次疊代，殘值就會低於 10^{-12} (相對於它們的初值)。殘值隨運算次數而減少，如圖 15-30 所示。在較複雜的問題裡，有時殘值會高得多，例如 10^{-3}。

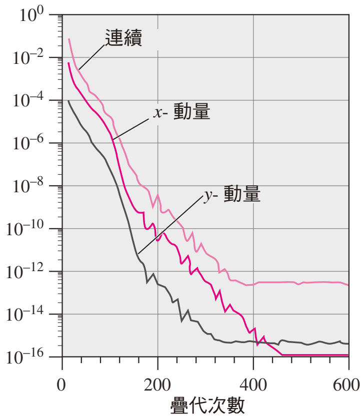


圖 15-30　在極粗網格的求解過程 (雙精度)，殘值隨疊代次數衰減。

我們定義 P_1 為在入口下游，直徑距離處的平均壓力。同樣地，也定義 20 倍直徑距離的平均壓力 P_{20}。二個位置間的壓力降為 $\Delta P = P_1 - P_{20}$，其值為 4.404 Pa (極粗網格的情形)。如圖 15-31a 所示，中心線壓力及軸向速度為距離的函數。解答看起來合乎物理意義。我們發現邊界層沿流動方向，向下游展開時，中心線的軸向速度漸增，符合質量守恆，也發現在管入口處的壓力急降，其壁面的黏剪應力為最大。在入口處尾端的壓力降幾乎是線性的，而流動幾乎完全展開，如所預期的。最後，我們將圖 15-31b 的軸向速度與已知的解析解 (見第 8 章) 比較。以徑向只有 8 個分格而言，這個結果與解析解算是很相近了。

表 15-1　各種網格解析度的情況下，在軸對稱管流的入口區域，距離為 $x/D = 1$ 到 20 的壓力降

網格條件	元素數量	ΔP，Pa
極粗	320	4,404
粗	1,280	3.983
中等	5,120	3.998
細	20,480	4.016
極細	81,920	4.033
超細	327,680	4.035

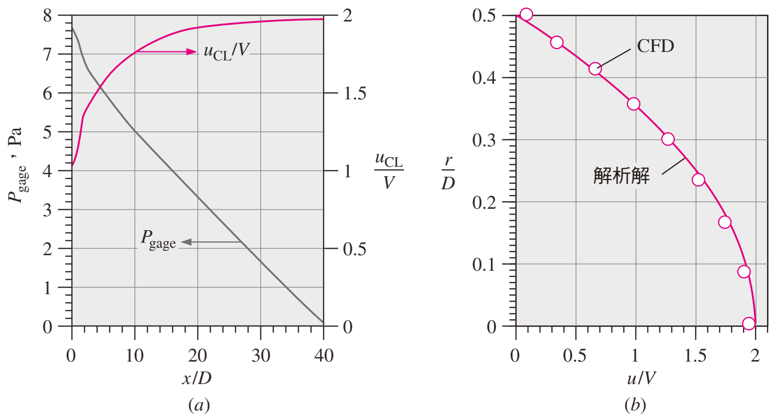


圖 15-31　在層流管流模擬裡，極粗網格的 CFD 計算結果：(a) 中心線的壓力及軸向速度隨下游距離的改變；與 (b) 管出口處的軸向速度曲線，與解析解的值比較。

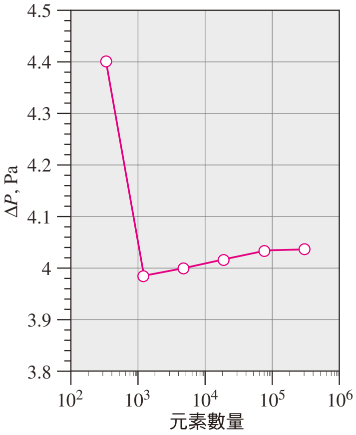


圖 15-32 在軸對稱管流的入口區域，距離由 $x/D=1$ 到 20，計算出的壓力降與元素數量的函數關係。

這個 CFD 解答是否網格獨立呢？我們以其它網格的情形，重複求解來驗證。其收斂的殘值與圖 15-30 類似，但是計算所需的時間明顯增加，因為元素的數目較多。收斂所需的運算次數，也隨網格變細而增加。從 $x/D=1$ 到 $x/D=20$，ΔP 與網格的關係如表 15-1 所列。壓力與網格數的關係如圖 15-32。我們發現即使是極粗的網格，在軸對稱管流的入口區域，距離由 $x/D=1$ 到 20，計算出的壓力降與元素數量的函數關係。也可以相當準確計算 ΔP。從極粗到超細的網格，其壓力降的差別不超過 10%。因此，對於某些工程問題，極粗的網格就已經足夠了。從極細到超細網格，其 ΔP 的差別只有 0.07% — 表示在工程分析裡，網格不必用到超細的程度。

在這六種情形之間，最顯著的差異出現在管的入口處，其壓力梯度與速度梯度最大。事實上，在入口處有一奇異點，壁面的軸向速度從 V 忽然變化為零，因為壁面的條件為無滑動邊界條件。在圖 15-33 顯示入口附近的正常化軸向速度 u/V 的等高線。我們發現在網格變細時，雖然流場的共通性質 (如壓力降) 只改變一點，但是其細部 (例如速度等高線) 卻有明

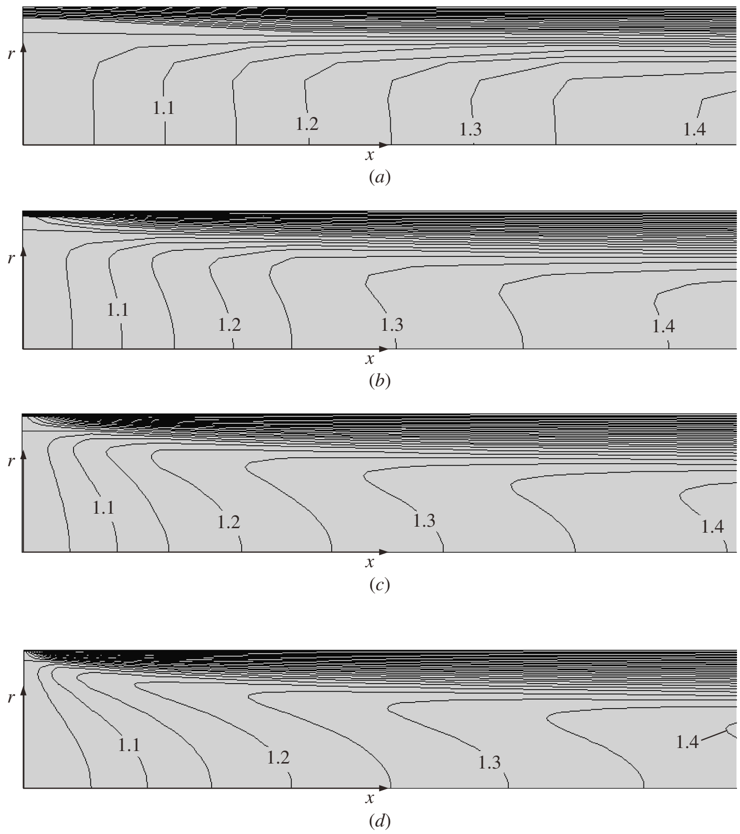


圖 15-33 層流管流例題的正常化軸向速度等高線 (u/V)。圖中所示是前四種網格區域的放大視圖：(*a*) 極粗 (40×8)；(*b*) 粗 (80×16)；(*c*) 中等 (160×32)；與 (*d*) 細網格 (320×64)。

顯變化。你會發現當網格持續變細時，軸向速度等高線變得更平滑。

雷諾數 Re = 150 之下經過圓柱的流動

為了示範正確的問題設定才能得到可靠的 CFD 解答，我們可以用經過直徑 $D = 2.0$ cm 圓柱的二維流動解說 (圖 15-34)。圖 15-35 為計算區域的圖形。因為對稱的關係，只解流場的上半部；在圖形底邊設對稱邊界。這樣可以使計算區域減半。在圓柱表面則設定無滑動壁面邊界條件。計算區域最左邊外緣設定速度入口的邊界條件，其速度分量為 $u = V$ 且 $v = 0$。最右邊外緣設定壓力出口邊界條件。(這裡設錶壓力為零，因為流場速度只是壓力差的函數。) 我們用三種結構化網格作為比較：粗 (徑向 30 分格×圓柱表面 60 分格 = 1800 個元素)、中等 (60×120 = 7200 個元素) 與細網格 (120×240 = 28,800 個元素)，如圖 15-36。這裡只顯示一部分的計算區域；全部計算區域是圓柱直徑的 15 倍。

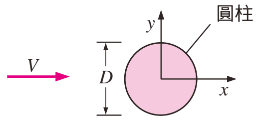


圖 15-34 速度 V 的自由流經過直徑 D 的二維圓柱。

我們使用溫度為 25°C 的空氣自由流，在標準大氣壓下，以速度 $V = 0.1096$ m/s 由左至右經過圓柱。流動的雷諾數為 $\text{Re} = \rho VD/\mu = 150$。實驗顯示，邊界層為層流且流動分離出現在頂端前方 10° 左右，與停滯點相差 $\alpha \cong 82°$。尾流維持層流。實驗顯示阻力係數 C_D 分佈在 1.1 與 1.4 之間。這差異可能是自由流的品質與三維效應 (斜的旋渦瀉流等) 造成的。

對圖 15-36 所示為三種網格進行 CFD 求解，都假設為層流。其收斂都沒有問題，但是其結果未必符合物理直覺或實驗數據。圖 15-37 顯示它們的流線。因為題目是對稱的，所以雖然只計算上半面，我們仍然繪出全部的圖形。

在粗網格的情形 (圖 15-37*a*)，邊界層在 $\alpha = 120°$ 分離，C_D 為 1.00。解析度不足以計算出精確的分離位置，拖曳力係數也比正確值小。在層流區有兩個旋轉方向相反的分離氣泡，向下游延伸數個直徑的距離。在中等粗細的網格情形 (圖 15-37*b*)，流場明顯不同。邊界層在較上游處分離，$\alpha = 110°$，與實驗結果較接近。但是 C_D 值減少到約 0.982 — 更遠離實驗值。尾流的分離氣泡比粗網格長很多。提高網格數與解析度是否會使解答改善呢？圖 15-37*c* 所示是細網格的流線。從性

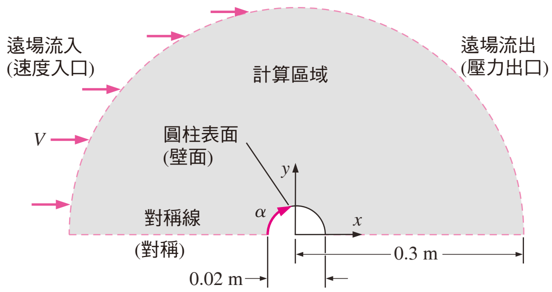
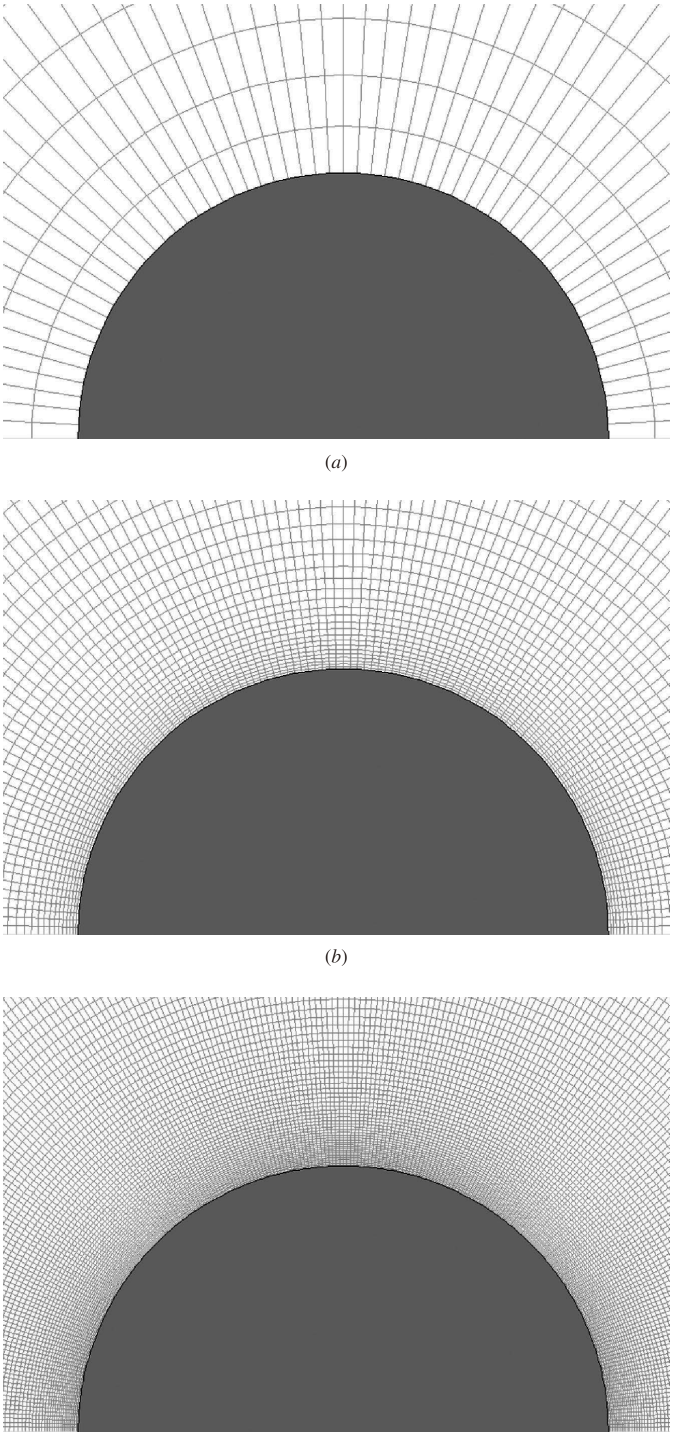


圖 15-35 用來模擬經過圓柱 (未按比例) 的二維流動的計算域 (陰影區域)。假設流動對 x- 軸對稱。每一邊所應用的邊界條件列在括弧裡。我們也定義 α，從前方停滯點算起的角度。



(*a*)

(*b*)

(*c*)

圖 15-36 在圓柱上半部周圍的二維結構化網格：(*a*) 粗 (30×60)；(*b*) 中等 (60×120)；與 (*c*) 細 (120×240)。只顯示部分視圖 ── 全區域遠大於這裡所顯示的。

質上看，其結果類似中等網格的情形，$\alpha = 109°$ 及 $C_D = 0.977$，而分離氣泡變得更長。更細的網格會持續得到更長的分離氣泡及更小的阻力。

圖 15-38 是中等粗細網格情況下得到的切線速度分量 (u_θ) 的一個等高線圖。我們畫出 u_θ 在零值附近一個很小的範圍，以便清楚看到沿圓柱表面的流動在那個位置改變方向，這是對圓柱上的分離點定位的聰明作法。注意此法只適用於圓柱。對分離點定位的較一般性的作法是找出壁面上剪應力 τ_w 為零的點，此法適用於任意形狀的物體。從圖 15-38 中，我們看出分離點在離前停滯點角度為 $\alpha = 110°$ 的地方，比起實驗值所獲得的 82° 在更遠的下游處。事實上，所有的 CFD 結果都預測邊界層分離發生在圓柱的後半部，而不是前半部。

這些 CFD 的解答並不符合實際 —— 這麼長的分離氣泡在實驗中並不穩定。分離點位置太過於在下游，阻力與實驗值相比太小。持續將網格變細並沒有造成更好的結果，反而更差。為何 CFD 模擬與實驗相差這麼多？答案如下：

1. 我們強制設定 CFD 解答為穩定。事實上在這個雷諾數下，經過圓柱的流動不是穩定的。實驗顯示在圓柱背後形成週期性的卡門渦街瀉流 (Kármán vortex street) (Tritton, 1977 及本書圖 4-25)。
2. 圖 15-37 的三種情形都只解上半面，並設定 x- 軸為對稱軸。實際上，經過圓柱的流動是極不對稱的。渦流從圓柱上下端交替瀉出，形成卡門渦街瀉流。

要改正這些缺失，必須用全網格，捨棄對稱邊界，用非穩態的方式模擬，計算區域如圖 15-39 所示。上下的邊緣設定為週期邊界，這樣尾流區的非對稱震盪才不會被壓抑。遠端邊界離圓柱夠遠 (直徑的 75 倍至 200 倍)，使其對計算的結果無顯著影響。

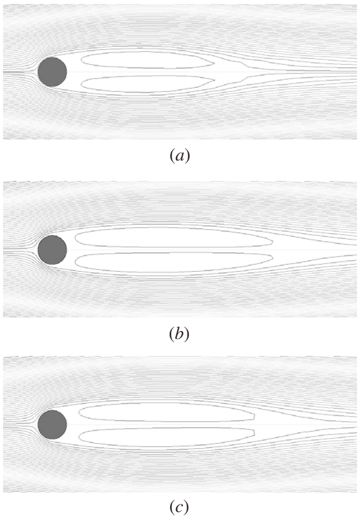


圖 15-37　在雷諾數 Re = 150 之下，經過圓柱的穩定流動，其 CFD 所得到的流線：(*a*) 粗網格 (30×60)；(*b*) 中等網格 (60×120)；與 (*c*) 細網格 (120×240)。在這裡計算上半面流場 —— 下半面以鏡射顯示。

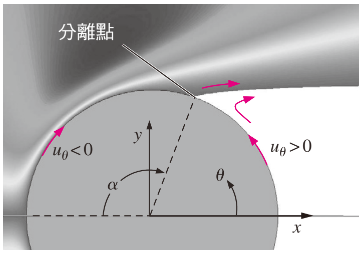


圖 15-38　在雷諾數 Re = 150 之下，經過圓柱的流動，其切線速度分量 u_θ 的等高線。解析度是中等網格 (60×120)。這裡只繪出 $-10^{-4} < u_\theta < 10^{-4}$ m/s 的值，圖中並標示邊界層分離的精確位置，也就是在圓柱壁面上，u_θ 改變符號的地方。在這個情況裡，分離點的 $\alpha = 110°$。

靠近圓柱及尾流區的網格都設定較細。我們用類似圖 15-14 的混合網格模擬。氣體為空氣，圓柱直徑為 1 m，空氣自由流的速度為 0.00219 m/s，得雷諾數是 150 (圖 15-40)。

當時間逐漸增加時，流場內的微小不均勻逐漸擴大，流動變得不穩定，且對 x-軸不對稱，這時很自然地形成卡門渦街瀉流。經過充足的 CPU 運算時間，流動趨

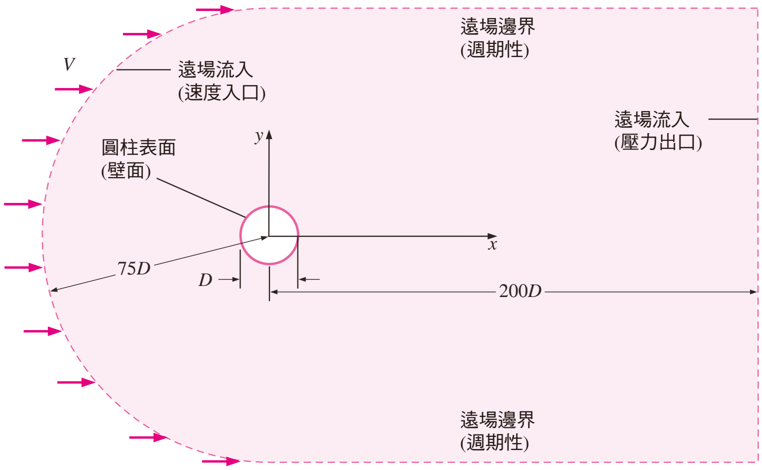


圖 15-39 用來模擬經過圓柱的二維不穩定層流的計算域 (陰影區域)。括弧內是所使用的邊界條件。

圖 15-40 在流經圓柱周圍的不可壓縮 CFD 模擬裡，自由流、圓柱直徑或流體類型都不是關鍵的，只要雷諾數是所要的就可以。

表 15-2 在 Re = 150* 之下，經過圓柱的不穩定流動，其 CFD 結果與實驗結果的比較

	C_D	St
實驗	1.1 至 1.4	0.18
CFD	1.14	0.16

* 不相等的主要原因，最可能是由於三維的效應，而不是網格解析度或數值方面的問題。

向週期性的渦流瀉離型態，與真實的流動很相近。圖 15-41 所示是某一瞬間由模擬得到的煙線與風洞實驗的照片。從 CFD 模擬可以看出卡門渦流向下游逐漸衰減。這衰減有部分是真實的 (黏性)，也有部分是人為的 (數值上的模擬)。無論如何，實驗驗證了卡門渦流的衰減。在煙線實驗裡， 衰減不是很明顯 (圖 15-41*b*)；這是因為煙線的時間積分性質造成的，如第 4 章所述。圖 15-42 是圓柱的放大視圖，這次實驗用的是水洞。在本書的網頁上有彩色的動態模擬，你可以看出渦流洩離的動態過程。

我們在表 15-2 裡比較 CFD 與實驗的結果。阻力係數的時間平均值為 1.14。這個值符合先前所說的實驗值範圍，1.1 與 1.4 之間。這個模擬是二維的，無法考慮三維的不均勻效應。這也許是係數落在實驗值區間的較低位置的原因。卡門渦流的史特豪 (Strouhal) 數定義為

史特豪數：

$$\mathrm{St} = \frac{f_{\text{shedding}} D}{V} \tag{15-4}$$

其中 f_{shedding} 是洩離 (shedding) 的頻率。根據 CFD 模擬，我們得到 St = 0.16。雖然 CFD 所得的值略低於實驗值 0.18 (Williamson,1989)，但是也很接近。也許最大的原因是實驗中不可避免的三維效應，這無法在二維的模擬中顯示出來。整體而言，這個模擬還是成功的，因為它符合所有實際流場的主要現象。

這個“簡單”的練習，說明 CFD 的一些能力，也顯示出使用 CFD 時該注意的

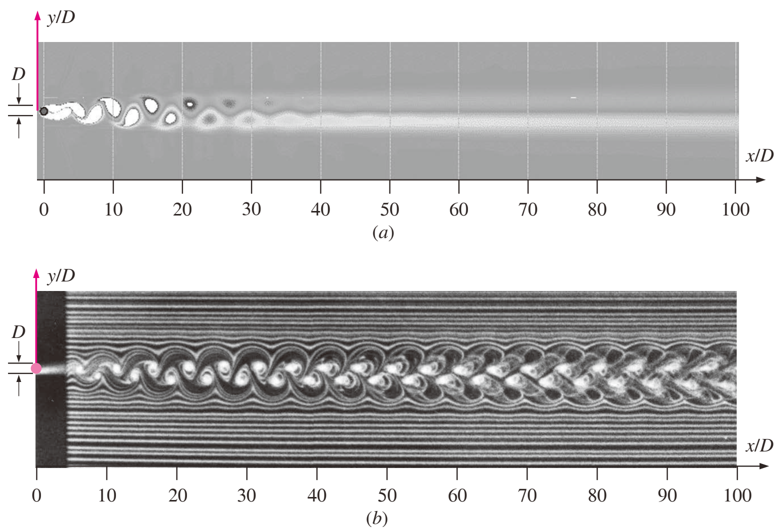


圖 15-41　在 Re ≅ 150 之下，圓柱尾流區的層流：(*a*) CFD 所建立的瞬間渦度等高線；與 (*b*) 在 $x/D = 5$ 以煙線產生的時間累積煙線。溫度等高線顯示，層流區的卡門渦流衰減很快，而煙線是從上游往下累積的，使渦流看起來好像持續到下游很遠的地方。
Photo from Cimbala et al., 1988.

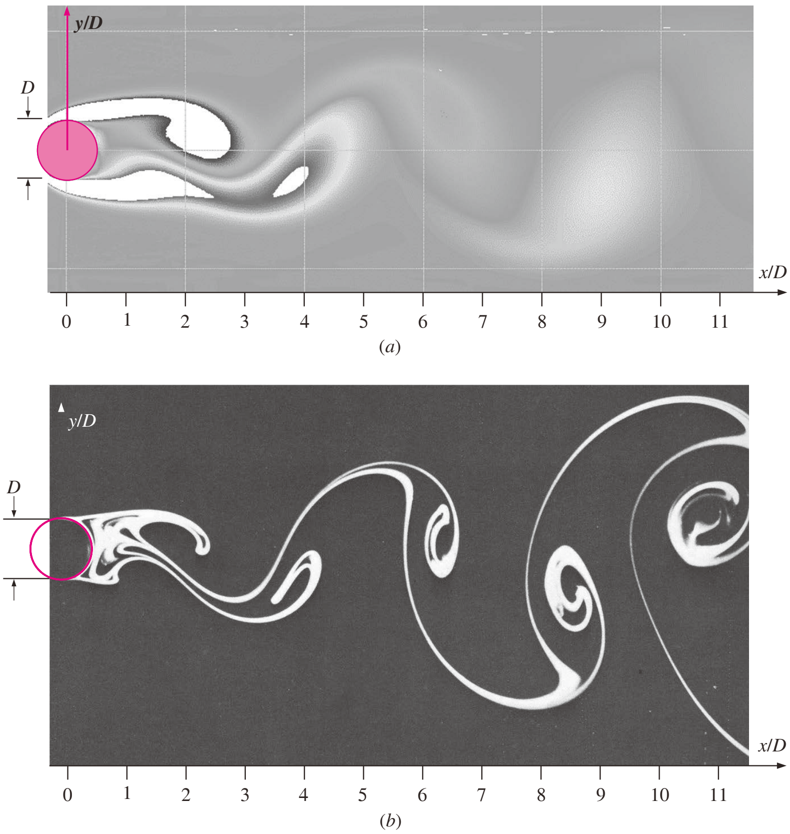


圖 15-42　圓柱後方渦流洩離的放大視圖：(*a*) 在 Re = 150 之下，以 CFD 建立的瞬間渦度的等高線；(*b*) 與在 Re = 140 之下，染料在圓柱表面產生的染料煙線。這個 CFD 圖形的動畫，可在本書的網頁上找到。
Photo (b) reprinted by permission of Sadatoshi Taneda.

一些事項。不良的網格解析度可能導致錯誤的解答，特別是邊界層分離的位置。但是網格持續變細也不一定會得到更合乎實況的解答，假如邊界條件設置不當的話 (圖 15-43)。例如，即使幾何條件是對稱的，也不一定適用對稱的邊界條件。

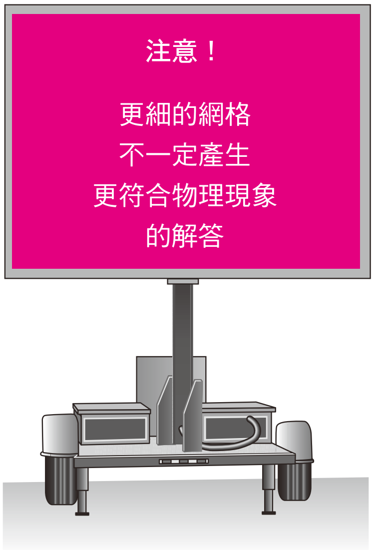


圖 15-43 不好的網格可能造成錯誤的 CFD 結果，但是更細的網格，並不保證會得到更合實際的解答。如果邊界條件設定不當，不論網格有多細，結果可能不正確。

幾何對稱並不保證會得到對稱的流動。

此外，當流動原本是不穩定或震盪時，強制設定穩定流動可能得到錯誤的結果。同樣地，若流動原本是三維的情況，設定二維的流動也可能造成錯誤。

我們如何確保層流的 CFD 計算是正確的呢？只有靠系統化的研究計算區域大小、網格解析度、邊界條件、流動屬性 (穩定或非穩定、二維或三維等)，並以實驗驗證。跟其它工程領域一樣，經驗是極其重要的。

15-3 紊流的 CFD 計算

紊流的 CFD 模擬遠比層流困難，即使在流場的平均值為**穩定** (stationary) 時也一樣。因為紊流流場的細部是不穩定且三維的 — 在各方向都會出現螺旋狀的渦流結構，稱為紊流旋渦 (turbulent eddies) (圖 15-44)。有些 CFD 用所謂的**直接數值模擬** (direct numerical simulation, DNS)，試圖解出其中各種尺寸的不穩定運動。但是最大與最小的旋渦之間，其大小與時間的尺度，可能有數個數量級的差異 ($L \gg \eta$，圖 15-44)。其差異且隨雷諾數增大 (Tennekes 與 Lumley, 1972)，使得 DNS 隨雷諾數的增加而更困難。DNS 需要極細且完全是三維的網格、大型電腦與大量的 CPU 時間。用現今的電腦還無法處理工程上實際的高雷諾數流動。即使電腦以現在的速度持續進步，這情形也無法在數十年內改善。

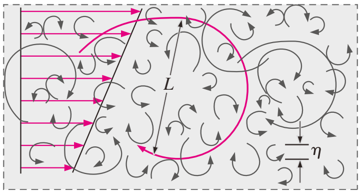


圖 15-44 所有的紊流，即使其時間平均是穩定的，也包含各種尺寸不穩定的三維紊流旋渦。圖中所示是平均速度曲線及一些旋渦；最小的旋渦其尺寸 (尺寸為 η) 比最大的 (尺寸為 L) 小很多個數量級。直接數值模擬 (DNS) 是一種 CFD 方法，模擬流動中所有的紊流旋渦。

因此，我們需要以簡化的假設，模擬複雜且高雷諾數的紊流流場。比 DNS 低一階的是**大型旋渦解法** (large eddy simulation, LES)。用這種方法，只求解大型的旋渦，而將小型旋渦以模型模擬 (圖 15-45)。基本假設是小型旋渦為等向性的；也就是與座標方向無關，而且機率上相似可預期。LES 需要的電腦資源遠小於 DNS 的，因為不用求解流場中極小的旋渦。縱然如此，在實際應用上所需的電腦資源還是很大。DNS 與 LES

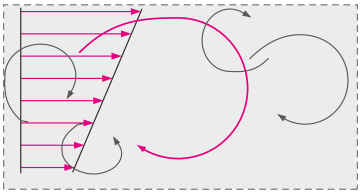


圖 15-45 大型旋渦模擬 (LES) 是直接數值模擬的簡化，其中只求解大的旋渦 — 小的旋渦則用模型計算，大為減少電腦所需的時間。圖中所示是平均速度曲線與求解的旋渦。

的深入討論不屬本書範圍，但卻是目前大量研究的領域。

在細節上，進一步的簡化是將所有的不穩定旋渦，用一**紊流模型模擬** (turbulence model)。這個方法可以求解任何旋渦的不穩定現象 (圖 15-46)。數學模型只用來求解旋渦所造成的大量混合與擴散。為求簡單，我們只考慮穩定且不可壓縮的流動。當使用紊流模型時，用雷諾平均**納維–斯托克斯** (Reynolds Averaged Navier-Stokes, RANS) 方程式取代納維–斯托克斯方程式 (圖 15-2)，

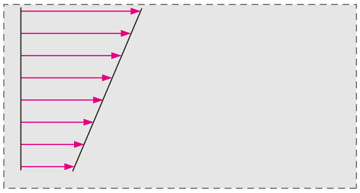


圖 15-46　在 CFD 計算裡使用紊流模型時，所有的紊流旋渦都用模型表達，只計算平均雷諾流動性質。圖中所示為速度曲線。其中並沒有旋渦解答。

穩定的 RANS 方程式：

$$(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P' + \nu\nabla^2\vec{V} + \vec{\nabla}\cdot(\tau_{ij,\ \text{turbulent}}) \qquad (15\text{-}5)$$

與式 (15-2) 相較，在式 (15-5) 右邊多一項與紊流有關的項。$\tau_{ij,\ \text{turbulent}}$ 被稱為**比雷諾應力張量** (specific Reynolds stress tensor)，因為它的作用類似黏性剪應力 τ_{ij} (第 9 章)。在卡氏座標裡，$\tau_{ij,\ \text{turbulent}}$ 是

$$\tau_{ij,\ \text{turbulent}} = -\begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix} \qquad (15\text{-}6)$$

其符號上的一橫表示兩速度分量乘積的時間平均值，而一撇表示震盪速度分量。因為雷諾應力是對稱的，所以增加六個未知數。這些新未知數有各種模型定義。其詳細的討論，可以參考 Wilcox (2006) 或 Chen 與 Jaw (1998) 的書。

現今使用的紊流模型有許多種，包含代數型、一個方程式、兩個方程式及雷諾應力模型。最流行的三種是 k-ε 模型、k-ω 模型及 q-ω 模型。這些所謂的兩個方程式紊流模型，增加兩個傳輸方程式，與質量及線動量方程式一起求解。在入口與出口也必須設定兩個額外的邊界條件。例如，在 k-ε 模型，你可以設定 k [**紊流動能** (turbulent kinetic energy)] 與 ε [**紊流損耗率** (turbulent dissipation rate)]。但是其適當值有時是未定的。更有用的做法，是設定**紊流強度** (turbulent intensity) (紊流旋渦特徵速度與自由流或其它特徵速度的比值) I 與**紊流長度尺度** (turbulent length scale) (紊流旋渦的特徵長度尺度) ℓ。如果不知道紊流的詳細資料，簡單的法則是在入口處設定 I 為 10% 及 ℓ 為流場某特徵長度的一半 (圖 15-47)。

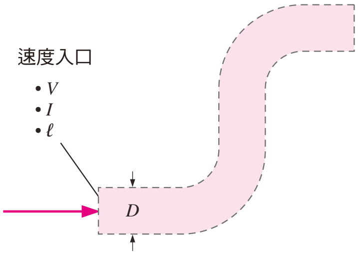


圖 15-47　對於壓力入口或速度入口的紊流性質，一個公認有用的法則，就是設定紊流強度為 10% 且紊流長度尺度為問題中某特徵長度的一半 ($\ell = D/2$)。

我們要強調，紊流模型依賴經驗常數始可獲得數學解的近似解。模型需要用直

接數值模擬值與實驗資料來校正，例如平板邊界層、剪力層、紊流經過孔洞後之衰減等。然而，紊流模型並非在所有情形下都可通用的，這表示雖然模型在用來校正的流場裡表現良好，但是不保證在一般紊流流場裡會得到符合實際的正確解，特別是那些包含流動分離與 (或) 大尺度不穩定性的情形。

紊流的 CFD 解答只能達到其紊流模型本身所適用及驗證的程度。

我們還要強調，這種情形不因網格而改變。在用 CFD 計算層流流場時，可以將網格變細以增進模擬的精度。在紊流模型的 CFD 分析裡，卻不是這樣的。雖然較細的網格會提高精度，但解答的實際正確與否卻受限於紊流模型本身。

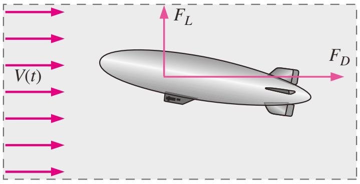


圖 15-48 雖然大部分紊流模型的 CFD 計算是穩態 (時間平均為穩定)，但用紊流模型還是可以計算非穩態紊流流場。我們可以設定非穩態邊界條件，並且將時間逐步推進，以求不穩定的概略特徵。

對以上問題，現在我們要提出幾個實際以 CFD 計算紊流流場的例子。在本章所有的例子裡，都使用 k-ε 模型與壁面函數。這是許多商用 CFD 軟體，如 ANSYS-FLUENT 所內定的紊流模型。在所有的情形裡，我們都假設穩態的流動，不模擬具非穩態特徵的流場，例如流過一個鈍體尾流的漩流。在此假設紊流模型已處理紊流場中渦流固有的非穩態特性。應注意非穩態流場亦可由紊流模型求解，如以時間推進方案 (非穩態 RANS 計算法)，但其非穩態時標需要遠大於個別渦流之時標。例如計算飛艇在陣風中的受力與力矩 (圖 15-48)。在入口邊界可加上時間變化的風速，如此非穩態紊流流場可用紊流模型求解。大流場特徵如流動分離、受力與力矩等會是非穩態。但比例上小的紊流邊界層，可用似穩態方法模擬。

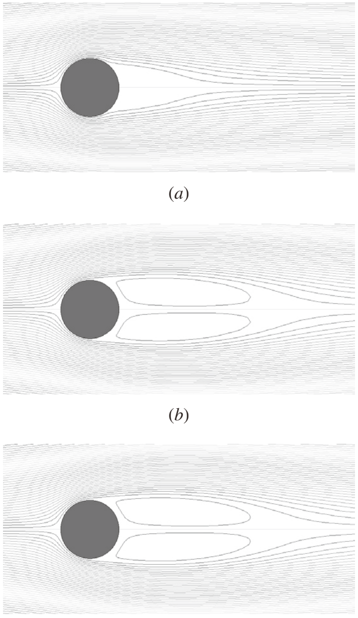
雷諾數 Re = 10,000 之下經過圓柱的流動

作為第一個紊流的 CFD 解，我們計算流過一個圓柱的流場，其雷諾數為 Re = 10,000。為了方便說明，使用與二維層流相同的計算區域，如圖 15-35 所示。就如層流計算，因為有對稱關係，只須求解上半面流場。也比照之前用三種網格 — 粗、中等與細 (圖 15-36)。但是我們要指出紊流的網格設計 (尤其有壁面函數的紊流模型) 一般不同於層流，特別在靠近壁面之處。

溫度為 25°C 的自由流空氣，以速度 $V = 7.304$ m/s 由左至右經過圓柱。圓柱直徑 $D = 2.0$ cm，計算得的雷諾數約為 10,000。在這個雷諾數下的實驗結果顯示，其邊界層為層流，分離點在圓柱頂端的上游 ($\alpha \cong 82°$)，但是其尾流是紊流；這種層流與紊流混合的情形，對 CFD 而言特別困難。實驗量測到的阻力係數為 $C_D \cong 1.15$ (Tritton, 1977)。在這裡用三種網格分別求 CFD 解，設定流動為穩態 (時間平均值為穩定) 紊流。我們使用具有壁面函數的 k-ε 模型。入口紊流強度設定為 10%，特徵長度為 0.01 m (圓柱直徑的一半)。三種網格的收斂情況都很好。圖 15-49 所示為流

線。三個圖都是以鏡射方式顯示全部圖形，而實際只解上半面流場。

對於粗網格的計算結果 (圖 15-49*a*)，邊界層在圓柱頂端偏後側分離 ($\alpha \cong 140°$)。此外，其阻力係數為 0.647，約只達到應得數值的一半。較細網格計算結果與實驗值較為接近，對於中等網格的情形，流場明顯不同 (圖 15-49*b*)。其邊界層分離點在圓柱頂端附近，$\alpha = 104°$，C_D 值則增加到 0.742 — 較接近但仍遠小於實驗值。在尾流區的循環渦旋長度已經增加到為粗網格的兩倍。圖 15-49*c* 顯示細網格情形的流線，其結果跟中等網格的近似，其阻力係數只稍微增加 ($C_D = 0.753$)，此例的邊界層分離在角度 $\alpha = 102°$。



(*a*)

(*b*)

(*c*)

圖 15-49　在 Re = 10,000 之下流經圓柱的靜定紊流，其 CFD 計算產生的流線：(*a*) 粗網格 (30×60)；(*b*) 中等網格 (60×120)；與 (*c*) 細網格 (120×240)。在這裡只計算流場的上半面，下半面是上半面的鏡射圖形。

更細網格的運算 (這裡沒有顯示) 並不會造成顯著的改變。換句話說，上述的細網格解析度已經夠了，但計算結果與實驗值不符。為什麼會有這種情形？在我們的計算裡有幾個問題：我們模擬的是穩定流，但是實際的流動是不穩定的；我們設定流動對稱於 *x*- 軸，但是實際的流動是不對稱的 (卡門渦流)；我們用的是紊流模型，而不是解所有的小旋渦。另一個重要的計算誤差源自我們的 CFD 計算，全部流場都使用紊流模擬以求合理模擬尾流區域的紊流，但是圓柱表面的邊界層只是層流而已。預測的分離點的位置在圓柱頂點下游處，這比較像紊流邊界層的分離，這在更高的雷諾數之下才發生。

基本上，CFD 在處理介於層流與紊流之間的過渡流動，或層流與紊流並存的計算區域會遭遇困難。事實上，大部分商用軟體只提供使用者層流或紊流的選項，而沒有過渡的中間地帶。我們用紊流模型來模擬層流邊界層，會使模擬結果與實驗值不符。但是如果將全計算區域設定為層流，所得的結果會更糟 (更不符合實際)。

有什麼方法可以在層流與紊流混合的情形得到更好的結果呢？某些軟體允許在不同區域設定紊流或層流。但即使如此，從層流到紊流的變化常是很突然而不實際的。其次，需先知道何處是過渡區域，但這樣就違反 CFD 作為預測流場的目的了。較先進的壁面處理模型正在研發中，或許有一天能處理過渡區域之計算。此外，有些新的紊流模型正在研發中，可運用在低雷諾數的紊流分析。

總而言之，使用標準紊流模型與穩態雷諾平均納維–斯托克斯 (Reynolds Averaged Navier-Stokes, RANS) 方程式，無法準確模擬流經圓柱的層流與紊流並存的情形。結果顯示只有以非穩態的 RANS、LES 或 DNS 模型求解，但該等電腦模型需求極大的運算速度，才能有精確的結果。

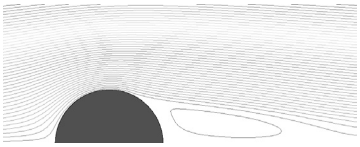


圖 15-50 在 $Re = 10^7$ 之下，經過圓柱的靜定紊流，其 CFD 計算所產生的流線。不幸地，在這情形的阻力係數仍然不準確。

雷諾數 $Re = 10^7$ 之下經過圓柱的流動

在最後一個圓柱的例子，以 CFD 計算雷諾數 $Re = 10^7$ 的流場。圓柱直徑為1.0 m，流體是水。自由流的速度是 10.05 m/s。在這些條件下，阻力係數的實驗值約為 0.7 (Tritton, 1977)。分離點上的邊界層為紊流，角度約為 120°，故無層流／紊流混合的問題 — 除了在圓柱的鼻部附近外邊界層都是紊流。如上個例子中的細網格，在圓柱壁面附近適當修改；如同先前的情形，使用具有壁面函數的 k-ε 模型。入口紊流強度 10% 與紊流長度尺度 0.5 m。不幸地，所計算出的阻力係數為 0.262 — 不及實驗值的一半。圖 15-50 所示為流線圖，邊界層在偏下游處分離，$\alpha = 129°$。這個結果有幾種可能的原因，本次設定流場為穩定且對稱的，但是其實兩者都不成立。(即使在極高雷諾數也有旋渦洩流的現象。) 此外，紊流模型及其靠近壁面的處理方式 (壁面函數) 可能與實際不符。這種情形仍然需要用全部流場的網格及 RANS、LES 或 DNS 等需要大量運算能力的求解才能得到準確的結果。

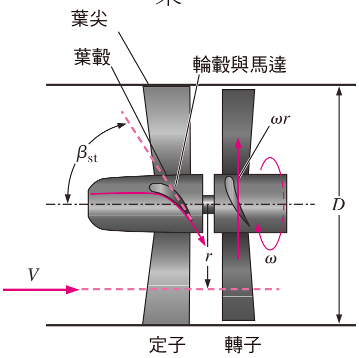


圖 15-51 設計葉片軸流風扇的示意圖，定子在轉子前面，要以 CFD 模擬經過定子葉片的流動。

軸流風扇的定子設計

下一個紊流 CFD 的例子是關於軸流風扇定子設計。風扇的整體直徑為 $D = 1.0$ m，設計的風速為軸流度 $V = 50$ m/s。定子的葉片範圍從軸的 $r = r_{hub} = 0.25$ m 到尖端的 $r = r_{tip} = 0.50$ m。定子位置在轉動葉片的上游 (圖 15-51)。初步設計是具有 20 cm 弦長及後緣角度 $\beta_{st} = 63°$。實際流場轉角的大小視葉片的數目而定。我們預期葉片的數目越少，其平均的轉角度也越小。目標是求出轉子的葉片尖端平均轉角度為 45° 以上時，所需的最少葉片數目。另一個要求為定子葉片上不至於有明顯的流動分離。

初步的近似將任意 r- 值的定子葉片模擬為二維葉片串的結構 (參考第 14 章)。每片**葉片之間隔** (blade spacing) 為 s，如圖 15-52。我們用 CFD 預估允許的最大 s 值，以此求出所需葉片的最少數目。

因為葉片串流道的 y- 方向是週期性的，我們只需模擬其中一條經過葉片的流道，建立結構化網格並設定兩對上下週期性邊界條件，如圖 15-53 所示。我們選擇 $s = 10$、20、30、40、50 及 60 cm，分別為各個 s 產生結構性網格。$s = 20$ cm 的網格如圖 15-54；其它網格也類似，但是隨 s 增加，網格在 y- 方向的數目也會增加。在壓力表面與吸入表面附近的網格較細密，以求得到較佳的解答。我們假設入口速度為 $V = 50$ m/s，出口的錶壓力為零。壓力表面及吸入表面為無滑動壁面。因為我

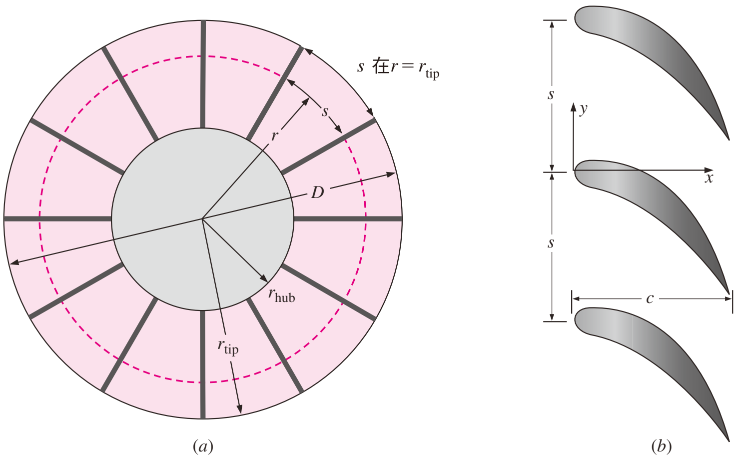


圖 15-52 葉片間隔 s 的定義：(*a*) 定子的前視圖；與 (*b*) 二維葉片串模型的側視圖。在前一圖裡所示的是十二個放射狀的定子葉片，但是實際的數目尚有待求出。這裡所示的是三片葉片，但是實際上有無限多片，各葉片的間隔距離 s，其值隨半徑 r 增加。二維葉片串模型是三維流動的近似解法。弦長 c 定義為定子葉片的水平長度。

們以紊流模型模擬 (具有壁面函數的 k-ε)，還需要設定入口的紊流性質。在此設定紊流強度 10% 與紊流長度尺度 1.0 cm。

當我們讓 CFD 運算夠久，使六種情形都儘可能收斂。圖 15-55 所示為 $s = 10$、20、30、40、50、60 cm 各自的流線圖。雖然我們只求解一個流道，但是可以用複製方式繪成數條流道，以顯示流場為週期性的串列。前三種情形的流線乍看之下很相似，但是細看會發現在定子尾緣下游的流線的平均角度隨 s 值增大而減少。(我們定義流動角度 β 為與水平的夾角，如圖 15-55*a*。) 而且在壁面與最接近吸入表面的流線之間隙隨 s 增大而增加，表示該區域的流速減緩。事實上，間隔增加時表面上的邊界層必須抵抗逐漸增加的不利壓力梯度 (正壓力梯度)。當 s 夠大時，吸入表面的邊界層無法抵抗而從壁面分離。對於

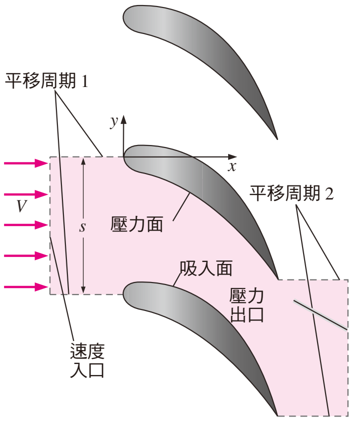


圖 15-53 在兩片定子葉片之間的流道所定義的計算域 (淺色陰影區)。流場上方的壁面是壓力表面，下方的壁面是吸入表面。圖中定義兩對週期邊界：分別在上游與下游。

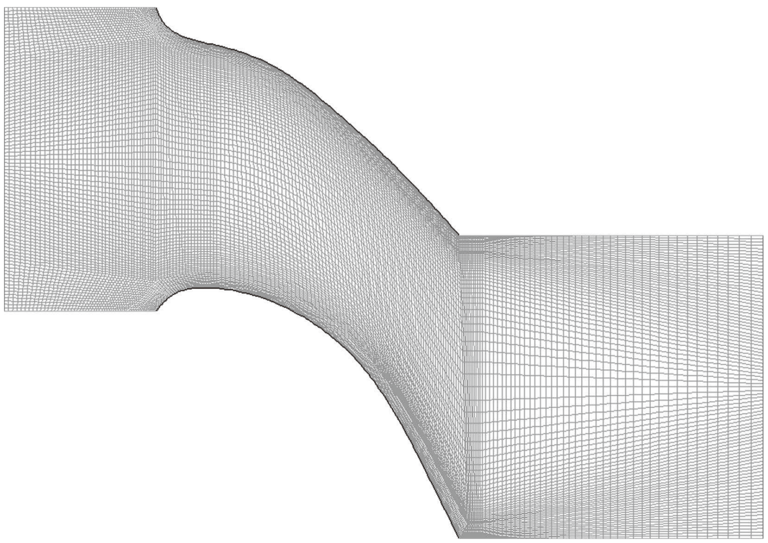


圖 15-54 在間隔距離 $s = 20$ cm 之下，二維葉片串定子葉片的結構化網格。葉片尾流的流出區域刻意比入口長，以防吸入表面有流動分離。出口是定子葉片尾緣的下游一倍弦長之處；也是轉子葉片的前緣 (在此未顯示)。

表 15-3 平均出口流動角度 β_{avg}、平均出口流速 V_{avg} 與所計算的每單位深度的阻力 F_D/b 與葉片間隔 s* 的關係

s，cm	β_{avg}，degrees	V_{avg}，m/s	F_D/b，N/m
10	60.8	103	554
20	56.1	89.6	722
30	49.7	77.4	694
40	43.2	68.6	612
50	37.2	62.7	538
60	32.3	59.1	489

* 所有的計算值都標示到三位有效數字，CFD 計算是用具有壁面函數的 k-ε 模型。

$s = 40$、50 與 60 cm (圖 15-55d 至 f)，流動分離現象很明顯。而且其嚴重程度也隨 s 增加。這是預料中的事。事實上，如果 s 趨向無限大，葉片與其周遭都隔離，我們預期葉片因為有很大的弧度而有大量的流動分離。

在表 15-3 裡列出對應於各種 s 的出口平均流動角度 β_{avg}、出口平均速度 V_{avg}，以及每單位深度的阻力 F_D/b。(深度 b 為進入圖 15-53，並假設為 1 m 。) β_{avg} 及 V_{avg} 隨 s 增加而減少，F_D/b 則先增加後減少。

你也許還記得，設計的出口流動角度必須大於 45°，同時又不能有明顯的流動

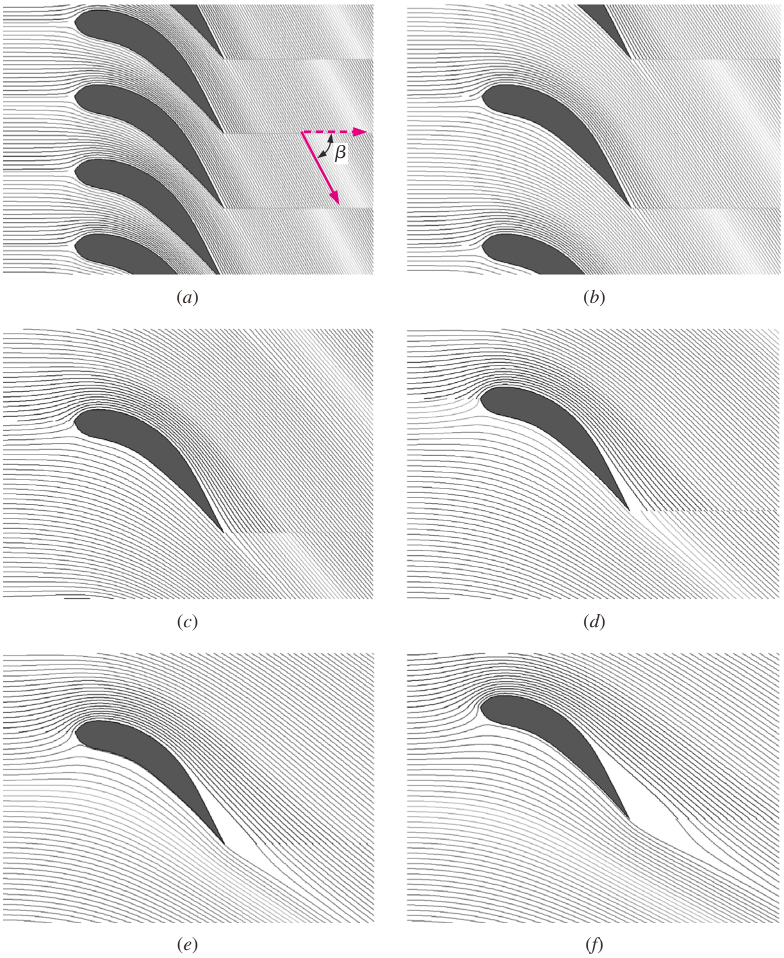
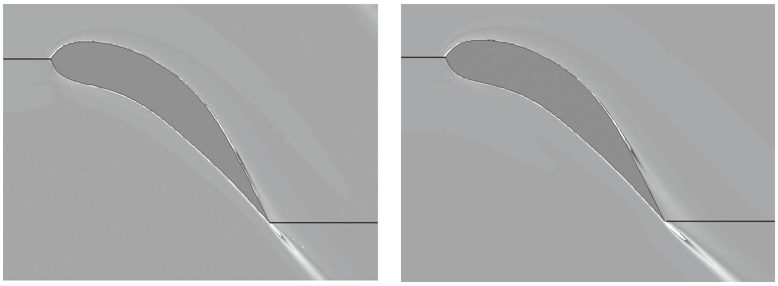


圖 15-55 經過定子葉片流道的穩態紊流，其 CFD 計算所產生的流線：(a) 葉片間隔 $s = 10$；(b) 20；(c) 30；(d) 40；(e) 50；及 (f) 60 cm。CFD 計算是以具有壁面函數的 k-ε 紊流模型施行的。流動角度 β 定義在圖 (a)，為流動相對於水平線的平均角度。

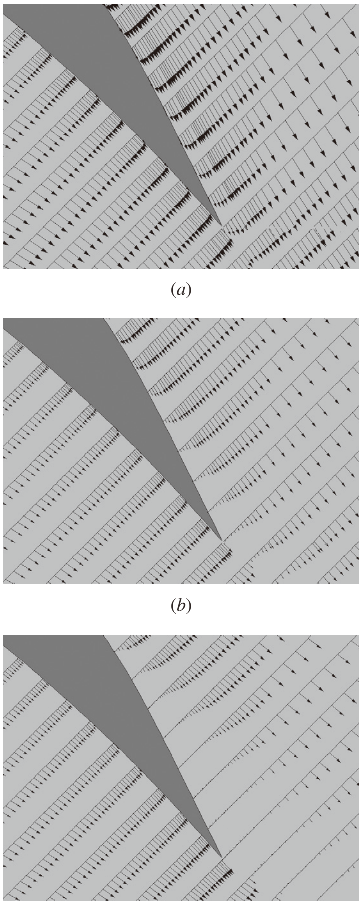


(a)　(b)

圖 15-56　經過定子葉片流道的穩態紊流，其 CFD 計算所產生的渦度等高線圖形：葉片間隔 (a) $s = 30$ cm 及 (b) $s = 40$ cm。除了在壁面的邊界層與尾流區之外，流場幾乎是非旋轉的。但是， 當邊界層分離，如圖所示，渦度會散佈到流動分離區域。

分離。從 CFD 的結果看，似乎在 $s = 30$ 與 40 cm 之間以上兩者都不符合。用圖 15-56 渦度等高線更能看出分離的現象。在圖中顏色代表負渦度 (順時針方向)，深灰色代表正渦度，中間的淺灰色地帶表示渦度為零。如果邊界維持在壁面上，我們預期渦度集中在葉片表面的邊界層內。圖 15-56*a* 為 $s = 30$ cm 的情形。但是，如果邊界層分離，渦度會突然從吸入表面散開，就如圖 15-56*b*，$s = 40$ cm 的情形。這些結果證實較明顯的分離在 $s = 30$ 與 40 cm 開始出現。

最後，我們在圖 15-57 比較三種情形：$s = 20$、40 與 60 cm。我們建立等間隔的平行線，與水平方向成 45°。在每條平行線上繪出速度的向量。圖 15-57*a* 所示為 $s = 20$ cm 時，邊界層附著於定子葉片的吸入表面與壓力表面。在 $s = 40$ cm 的情形 (圖 15-57*b*)，吸入表面上出現流動分離及回流。在 $s = 60$ cm 時 (圖 15-57*c*)，分離泡與回流大幅增多。其中有一塊區域的流速很小。在所有情形裡，壓力面的邊界層都維持在壁面上。



(a)

(b)

(c)

圖 15-57　經過定子葉片流道的靜定紊流，其 CFD 計算產生的速度向量：葉片間隔 (a) $s = 20$ cm；(b) 40 cm 與 (c) 60 cm。

當間隔 $s = 30$ cm 時葉片的片數 (N) 為何？這可從葉片端點 s 為最大處 ($r = r_{tip} = D/2 = 50$ cm) 簡易計算出。圓周 C 為

可用圓周長：
$$C = 2\pi r_{tip} = \pi D \tag{15-7}$$

這個圓周長可以放置葉片間距 $s = 30$ cm 的葉片數為

最大的葉片數：
$$N = \frac{C}{s} = \frac{\pi D}{s} = \frac{\pi(100 \text{ cm})}{30 \text{ cm}} = 10.5 \tag{15-8}$$

顯然只能採取整數 N，所以最少應有 10 片或 11 片。

將定子的流場以近似的二維葉片串模擬是否可行？要回答這個問題，首先以完整三維模型進行模擬。如此仍然可以利用其週期特性只算兩片徑向葉片間的流道

(圖 15-58)。當選擇 $N = 10$，每片之間的相隔週期角度為 360/10 ＝36°。從式 (15-8) 可得在尖端的 $s = 31.4$ cm 與在輪轂的 $s = 15.7$ cm 。取平均值得到 $s_{avg} = 23.6$ cm。我們建立六面體結構化網格，周圍設定速度入口，流出出口，輪轂與尖端各有圓柱壁面。在壓力面與吸入面設壁面，並設兩對週期邊界。週期邊界是旋轉而非平移的。壁面附近設置較細的網格，以求在邊界層有更好的解析度。流入的速度、紊流的強度等條件都與之前的設定相同。計算元素總數量為 800,000 個。

圖 15-59 所示為葉片表面及內部圓柱的壓力等高線。這個視角與先前圖 15-60 的相同，但是我們將計算區域繞 x- 軸旋轉複製九次，得到全風扇的圖形。你可以看出壓力面的壓力比吸入面來得高。也可以發現沿輪轂表面，上游到下游的壓力降。入口到出口計算得到的平均壓力變化為 3.29 kPa。

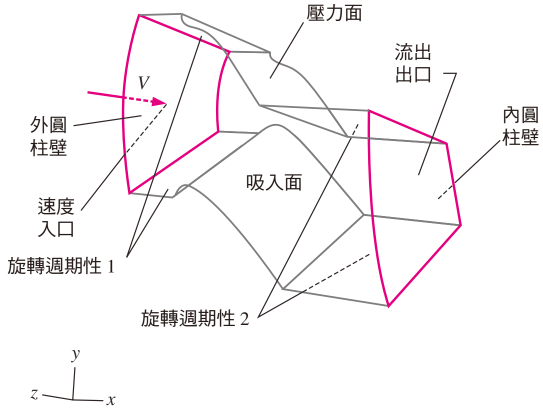


圖 15-58 在 $N = 10$ 之下，兩定子葉片之間的流道，所定義的三維計算區域 (葉片之間的角度為 36°)。計算區域的範圍，介於壓力面與吸入面，以及內側與外側圓柱之間。另外，還設定兩對旋轉週期邊界條件。

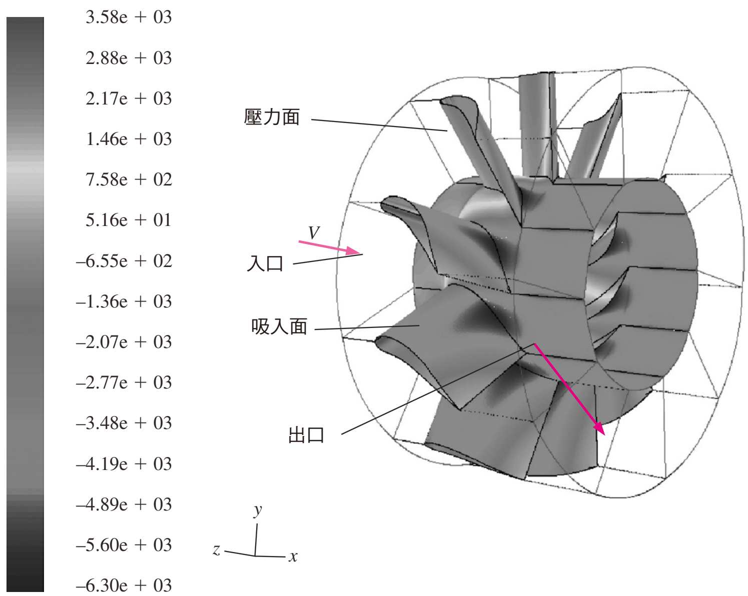


圖 15-59 經過定子葉片流道的靜定紊流，其三維 CFD 計算產生的壓力等高線圖。壓力以單位 N/m^2 顯示在葉片表面及內側的圓柱壁面。圖中也顯示入口與出口的邊線。雖然只用 CFD 計算其中一條流道，但我們將圖形繞 x- 軸複製九次，顯示全定子的流場。在這個圖形裡，亮色的是高壓區 (如葉片的壓力面)，暗色的是低壓區 (如吸入面)。

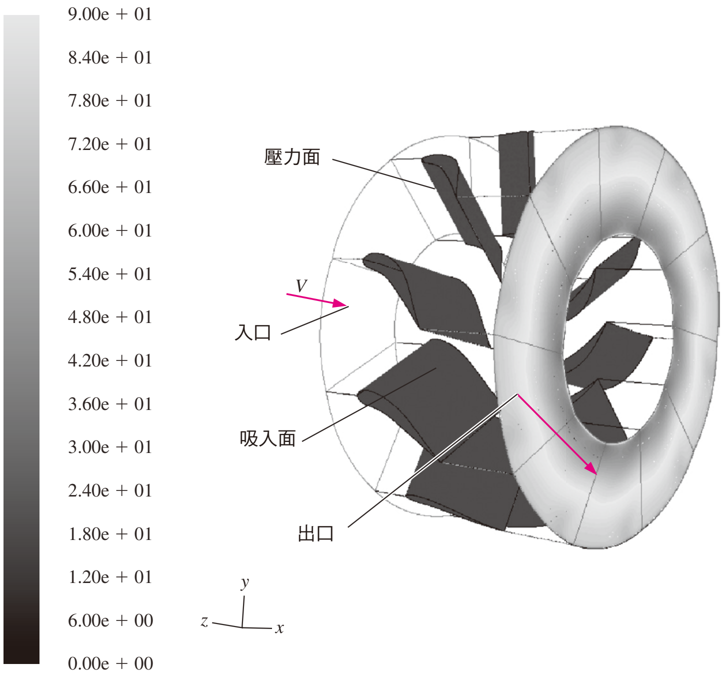


圖 15-60　經過定子葉片流道的靜定紊流，其三維 CFD 計算所產生的切線速度灰階等高線圖。切線速度分量以單位 m/s 顯示在計算區域的出口 (在葉片表面上速度為零)。為求清晰，圖中也顯示入口的邊緣。雖然只模擬一條流道，我們將圖形繞 x- 軸複製九次，顯示全定子的流場。在這個灰階圖形裡，切線速度的範圍從 0 (黑色) 到 90 m/s (白色)。

要比較二維與三維的計算結果，我們可以用 $s = s_{avg} = 23.6$ cm，再運算一次二維流場。二維與三維之比較列在表 15-4。從三維的計算可得每片葉片所受的淨軸向力為 $F_D = 183$ N。將這個值轉換成每單位深度的受力與二維的值相比。因為定子的葉片寬 0.25 m，$F_D/b = (183\text{ N})/(0.25\text{ m}) = 732$ N/m。從表 15-4 可知相對的二維值為 724 N/m，所以兩者很相近 ($\cong 1\%$ 的差異)。三維模型在出口的平均速度為 $V_{avg} = 84.7$ m/s，幾乎與二維的結果 84.8 m/s 相同 (二維近似解的差異小於 1%)。最後，從三維模型得到的平均出口流動角度 β_{avg} 為 53.3°，其輕易的達到設計規範要求的 45°，而二維模型得到的為 53.9°，其差異也在 1% 左右。

表 15-4　經過定子葉片流道的 CFD 計算結果：平均間隔 ($s = s_{avg} = 23.6$ cm) 的二維葉片串近似解，與三維計算結果的比較

	2-D $s = 23.6$ cm	3-D
β_{avg}	53.9°	53.3°
V_{avg}, m/s	84.8	84.7
F_D/b, N/m	724	732

* 數值都以三位有效數字表示。

圖 15-60 所示為在出口處切線速度分量的等高線。我們看到其分佈不是均勻的，而是從輪轂向尖端減少，這是因為葉片間隔 s 向外增大。我們也發現流出的壓力沿徑向向外增加，這符合我們的預期，因為我們知道維持切線流動需要徑向的壓力梯度。壓力向外增加會造成向心加速度，使流動繞 x- 軸旋轉。

另一個比較是在葉片之間的流道裡切面上的渦度等高線。圖 15-61 是兩個切面：一個靠近輪轂；一個靠近尖端。在兩個切面裡，渦度都只侷限在邊界層與尾流區。靠近輪轂處沒有分離現象，但是尖端處有。空氣在輪轂處的 β 角比尖端的

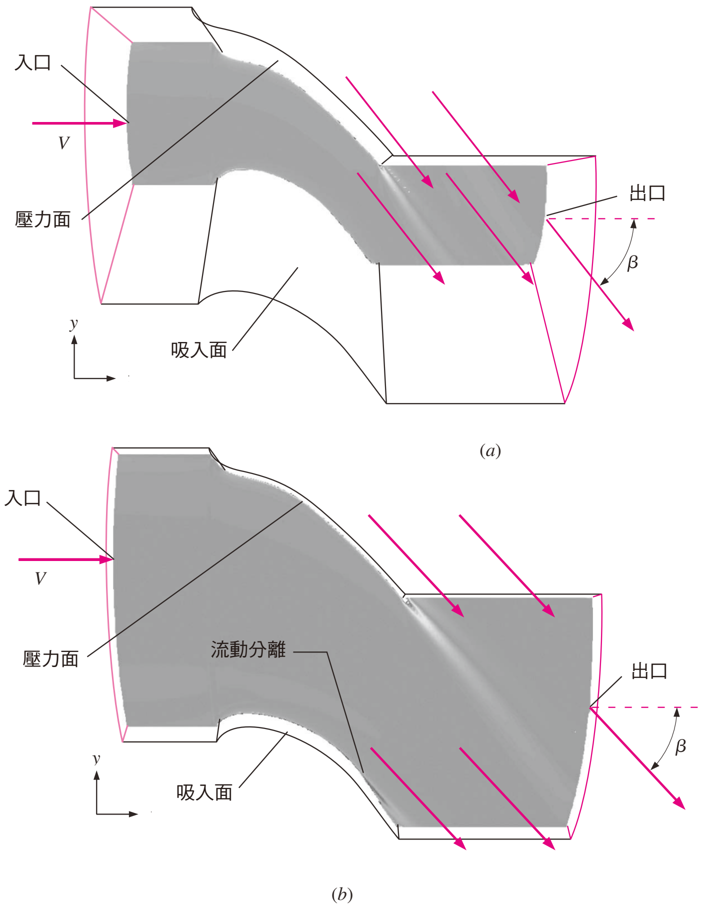


圖 15-61 經過定子葉片流道的靜定紊流，其三維 CFD 計算產生渦度等高線圖形：(*a*) 靠近葉片根部的剖視圖及 (*b*) 靠近尖端的剖視圖。因為這些面都幾乎垂直於 *z*- 軸，所以圖中顯示的是 *z* 渦度的等高線。在這些灰階圖形裡，深灰色表示負的 *z* 渦度 (逆時針方向) (例如尾流的上半部與流動分離區)，亮色表示正的 *z* 渦度 (順時針方向) (例如尾流的下半部)。靠近輪轂之處，沒有流動分離的跡象，但在尖端處，葉片吸入面的後緣有一些分離現象。圖中箭頭也顯示週期邊界的情形。從底面週期邊界離開的流動，以相同的速度從頂面的週期邊界進入。在輪轂附近的流出角度 β 比葉片尖端的大，因為其葉片間隔 *s* 較小，而且尖端有輕微的流動分離。

大。這也與在二維模型的近似值相符，因為葉片在輪轂處的間隔 *s* (15.7 cm) 小於尖端處的間隔 *s* (31.4 cm)。

結論是將三維定子的流場以二維分析近似，結果整體上與二維的葉片串模型分析結果相近，各值相差都在 1% 左右。這就是為何二維葉片串模型常被用在流體機械分析。再從細節上較高的三維分析結果，使我們確信 10 片葉片就能符合風扇的設計條件。但是運算結果顯示在靠近尖端處有輕微分離。更好的作法是使葉片稍微扭曲 (降低尖端的攻角) 以避免分離。另外，也可以將葉片數目增加到 11 或 12 片。

至此所有的計算都基於固定座標，但現在的 CFD 軟體可以使用旋轉座標，因此也可以用來模擬轉子的葉片。

15-4 包含熱傳遞的 CFD

能量微分方程式與流體運動方程式的耦合，就可以用 CFD 計算有熱量傳遞

的流場與物質 (例如溫度分佈或從固體表面傳到流體熱量的速率)。能量方程式是一個純量式，故只需一道額外的傳輸方程式 (通常是溫度或焓)，計算成本 (CPU 時間及 RAM 的需求) 並不會明顯增加。大部分的商用 CFD 軟體都具有計算熱傳的能力，許多實際的問題也包含熱傳與流動。如先前所說，這時必須設定有關於熱傳的額外邊界條件。在固體壁面邊界，可以設定溫度 T_{wall} (K) 或壁面熱通量 $\dot{q}_{\text{wall}}$ (W/m^2)，其定義為從壁面到流體單位面積的熱傳速率 (兩者不能同時設定，如圖 15-62)。當模擬一個區域為固體時，其內有因電能或化學或核子反應所產生的熱時，是可以不設定其單位體積的熱量產生率 $\dot{g}$ (W/m^3)，而可以用壁面熱通量取代。CFD 也可以計算固體內的溫度分佈，以及設定其它邊界條件 (例如輻射熱傳)。

在本節裡，我們不詳細討論理論公式，只藉由一些基本例子解說 CFD 計算實際工程熱流問題的能力。

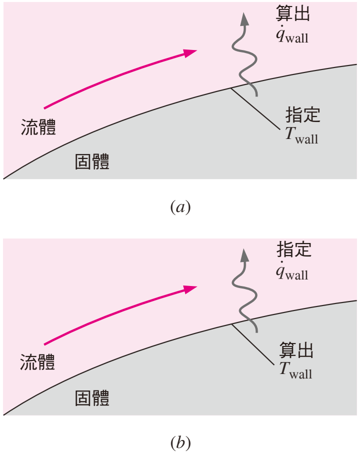


圖 15-62 在壁面邊界，我們可以設定 (*a*) 壁面的溫度或 (*b*) 壁面的熱通量，但不能兩者都設，這樣在數學上會有矛盾。

流過交叉流熱交換器的溫升

考慮空氣流經過如圖 15-63 所示的一系列的熱管子。在熱交換器種類，這種是稱為**交叉流熱交換器** (cross-flow heat exchanger)。如果氣流以水平方向進入 ($\alpha = 0$)，就可以將計算區域取一半，並可以設定頂邊及底邊為對稱邊界 (圖 15-25)。以這個例子而言，可以使氣流以某種角度進入計算區域 ($\alpha \neq 0$)。因此我們設定如圖 15-63 的平移週期邊界於頂邊及底邊。將入口空氣溫度設定為 300 K 及每根管的溫度為 500 K，選擇管徑及空氣速度使雷諾數約為 1×10^5。管的表面假設為平滑的 (無粗糙度)。熱交換管交排列如圖 15-63，水平及垂直相距都是管徑的三倍。假設流場是二維的靜定紊流，無重力效應，並設定入口的紊流強度為 10%。模擬時分別以 $\alpha = 0°$ 及 $\alpha = 10°$ 運算作為比較。我們的目標是要了解 α 值是否會影響熱量的傳遞。你認為哪一種情形會得到較大的熱傳？

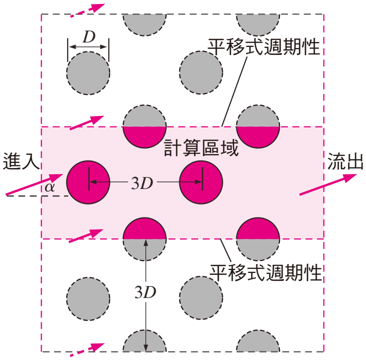


圖 15-63 用來模擬經過熱交換器流動的計算區域。流動與水平成 α 角度，由左邊進入。

我們建立一個二維多區塊的結構性網格，靠近管壁的解析度極細，如圖 15-64 所示。圖 15-65 所示為 $\alpha = 0°$ 計算結果的溫度等高線，圖 15-66 所示為 $\alpha = 10°$ 的溫度等高線。在 $\alpha = 0°$ 的情形，空氣溫度平均上升 5.51 K，而 $\alpha = 10°$ 則得到的值為 5.65 K。所以偏離軸向的效果較好，但卻只改善 2.5%。如果將

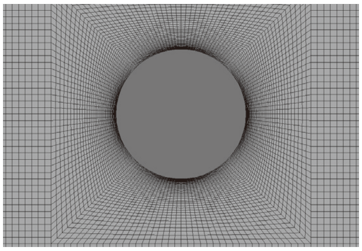


圖 15-64 一根熱交換器管子周圍的結構化網格放大視圖。壁面附近的網格較細，使壁面的邊界層解析度提高。

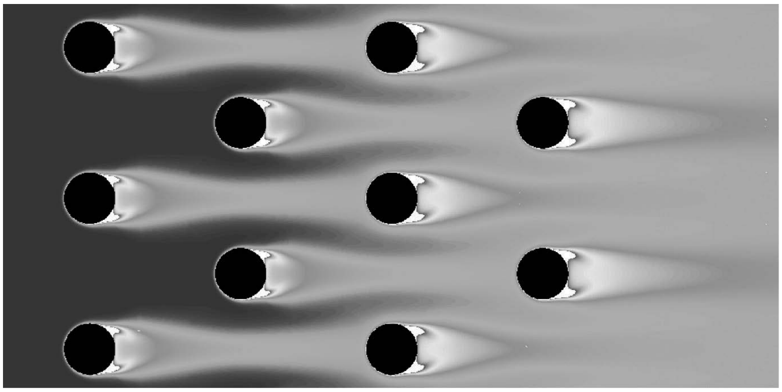


圖 15-65 以 $\alpha = 0°$ 流過平滑管熱交換器的靜定紊流，其 CFD 計算所產生的溫度等高線。灰階等高線的範圍從 300 K (最暗的) 到 315 K 或以上 (最亮的)。出口處的空氣平均溫度升高了 5.51 K。雖然計算是在圖 15-63 裡的計算區域進行，但是其圖形被複製 3 倍，便於了解。

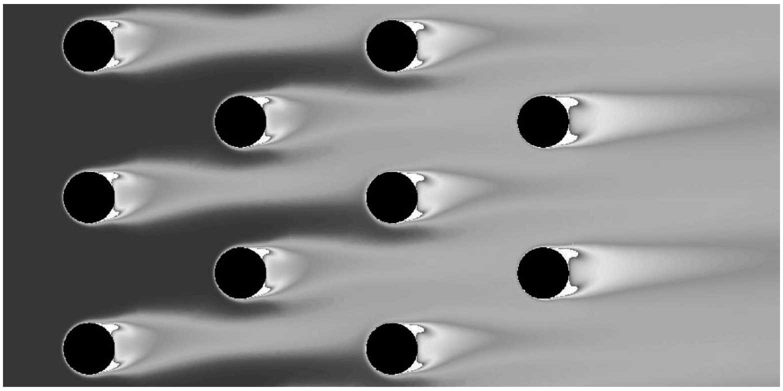


圖 15-66 以 $\alpha = 10°$ 流過平滑管熱交換器的靜定紊流，其 CFD 計算所產生的溫度等高線。灰階等高線的範圍從 300 K (最暗的) 到 315 K 或以上 (最亮的)。其出口的空氣平均溫度，比入口處升高了 5.65 K 。所以，偏離軸向的流動 ($\alpha = 10°$)，使 ΔT 增加2.5%。

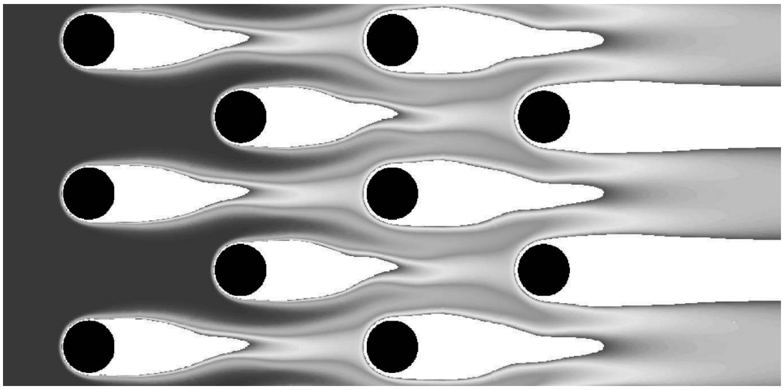


圖 15-67 以 $\alpha = 0°$ 流過粗糙管 (壁面平均粗糙度為管徑的 1%) 熱交換器的靜定紊流，其 CFD 計算所產生的溫度等高線。灰階等高線的範圍從 300 K (最暗的) 到 315 K 或以上 (最亮的)。其出口的空氣平均溫度，比入口處升高了 14.48 K。所以，即使表面微小的粗糙度，也會使 ΔT 增加 163%。

$\alpha = 0°$ 的紊流強度改為 25%，溫度差會提高至 5.87 K。

最後研究表面粗糙度的效應。我們模擬管壁上的粗糙高度為 0.01 m (圓柱直徑的 1%)。為求符合實際，我們還將鄰近管壁的網格變粗，使壁面上的網格大於粗糙高度。流入角度為 $\alpha = 0°$，其餘條件與圖 15-65 的相同。圖15-67 所示為溫度等高線。純白色區域表示溫度高於 315 K。從入口到出口的平均氣溫上升 14.48 K，相較於平滑壁面提高了 163%。因此從這個計算例子中，我們了解壁面的粗糙度是影

響紊流的極重要參數。

積體電路 (IC) 晶片陣列的冷卻

電子設備、儀器與電腦的組件，如**積體電路** (integrated circuits, IC) 之類的元件、電阻、電晶體、二極體，以及電容都焊接在**印刷電路板** (printed circuit boards, PCB) 上。PCB 通常都成列堆積，如圖 15-68 。很多電子元件都必須散熱，須用冷卻空氣吹過各 PCB 之間的空隙，以免元件過熱。如圖 15-68 所示，有幾片相同的 PCB 堆在一起。每片 PCB 為 10 cm×30 cm，其間隙為 2 cm。溫度為 30°C 的冷卻空氣以速度 2.60 m/s 進入 PCB 之間。電機工程師必須將八顆相同的 IC 晶片裝在 PCB 的 10 cm×15 cm 範圍內。每個 IC 的散熱功率是 6.24 W：其中 5.40 W 從頂面，0.84 W 從底面。(假設熱量不會從底面傳到 PCB 上。) 板上其它元件的散熱量與 IC 相比是可忽略。為確保 IC 晶片有足夠的效能，表面平均溫度不得超過 150°C，任何點的溫度不得高於 180°C。晶片的尺寸是 2.5 cm

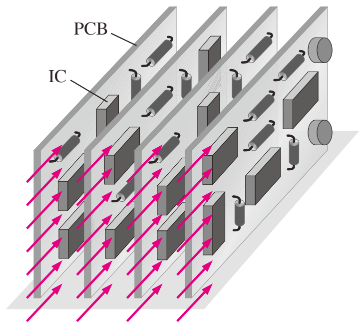


圖 15-68 四片印刷電路板 (PCB) 成列設置，空氣流經 PCB 之間以提供冷卻。

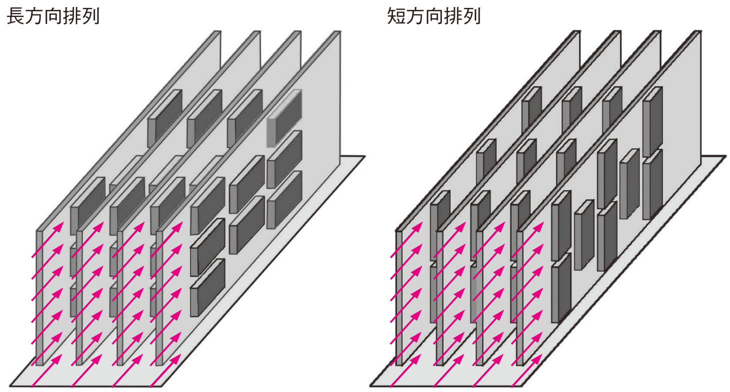


圖 15-69 八個 IC 在 PCB 的兩種可能的造型：長方向的及短方向的。你認為哪一種的晶片散熱較好呢？

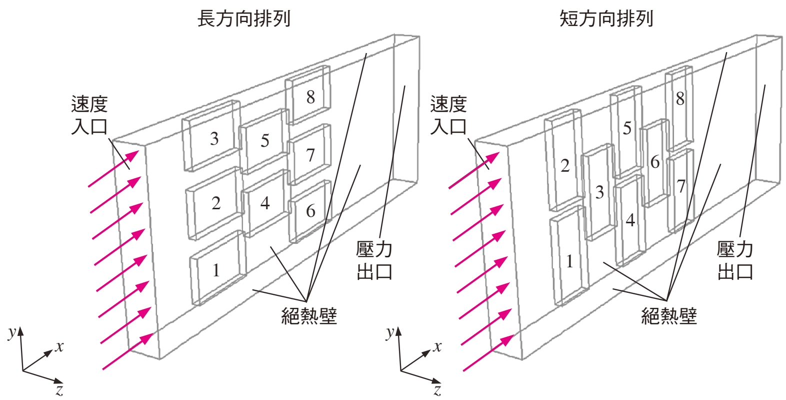


圖 15-70 晶片冷卻例題的計算區域。模擬的是兩片 PCB 之間的空氣流動。圖中有兩種網格：一種是長方向的；另一種是短方向的。圖中標示晶片 1 到 8，以供參考。這些晶片的表面將熱傳到空氣中，其它壁面則是絕熱面。

寬，4.5 cm 長，0.5 cm 厚。可能的設計造型有兩種，如圖 15-69 所示：晶片長方向與流動方向平行，或短方向與流動方向平行。排列方式如圖所示以增強冷卻效果。到底要計算哪一種流向排列會得到較低的表面最高溫度，且是否符合溫度要求？

對於每種排列，我們都定義三維計算區域，其幾何形式為兩片 PCB 之間的單一流道，如圖 15-70 所示。我們建立具有 267,520 個元素的結構性六面體網格。在間隙為 2 cm 的情形下，雷諾數約為 3600，以二維流道這雷諾數值是勉強足於產生紊流。然而，自入口以來表面粗糙度就很大，所以可將流場視為高度紊流的狀態。一般低雷諾數的紊流對多數紊流模型而言是具有挑戰性的。在此還是假設靜定紊流流場，並用具有壁面函數的 k-ε 模型解題。雖然這個計算的絕對精度可能有問題，但是兩種排列之間的差異是合理的。因其為一個流道內的流場，在此也忽略熱浮力效應。入口設定為 $V = 2.60$ m/s 及 $T_\infty = 30°\text{C}$，另設定入口的紊流強度為 20% 及紊流的尺度為 1.0 mm。出口設為壓力出口且其錶壓力為零。PCB 被設定為平滑的絕熱壁面 (無熱量從壁面傳到空氣中)。頂面與底面也設定為絕熱平滑面。

根據已知的晶片尺寸，頂面的表面積為 4.5 cm × 2.5 cm = 11.25 cm^2。四周的總面積為 7.0 cm^2。從已知的熱傳速率，計算得每單位表面積的熱通量為

$$\dot{q}_{\text{top}} = \frac{5.4\ \text{W}}{11.25\ \text{cm}^2} = 0.48\ \text{W/cm}^2$$

因此將晶片頂面模擬為平滑表面，其表面熱通量設定為 4800 W/m^2。類似地，晶片側面每單位面積的熱通量為

$$\dot{q}_{\text{sides}} = \frac{0.84\ \text{W}}{7.0\ \text{cm}^2} = 0.12\ \text{W/cm}^2$$

因為晶片的側面有接腳，視其為粗糙高度為 0.50 mm 的粗糙表面，並且側面的熱通量為 1200 W/m^2。

每種排列用 ANSYS-FLUENT CFD 軟體運算到收斂。其結果列在表 15-5，溫度等高線則如圖 15-71 與圖 15-72 所示。晶片頂面的平均溫度兩個排列大約相等

表 15-5　在晶片冷卻例題裡，長短方向排列的 CFD 結果比較

	長	短
$T_{\max}$，晶片頂面	187.5°C	182.1°C
T_{avg}，晶片頂面	144.5°C	144.7°C
$T_{\max}$，晶片側面	154.0°C	170.6°C
T_{avg}，晶片側面	84.2°C	91.4°C
入口到出口的平均 ΔT	7.83°C	7.83°C
入口到出口的平均 ΔP	−5.14 Pa	−5.58 Pa

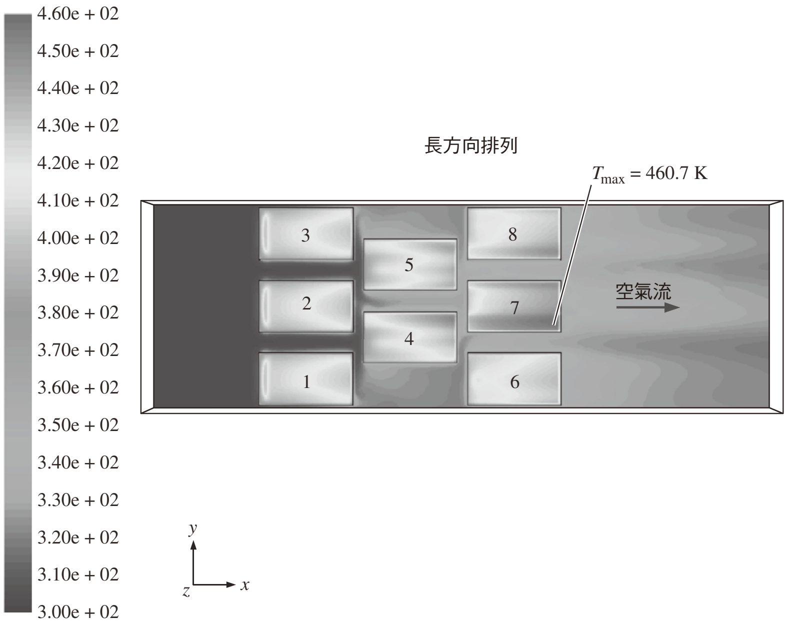


圖 15-71 在晶片冷卻例題裡，長方向造型的 CFD 結果：從晶片上方向下看的灰階溫度等高線。圖中溫度最高的位置，在晶片 7 的尾端。在晶片 1、2 及 3 前端的亮色區域，表示其表面高溫。

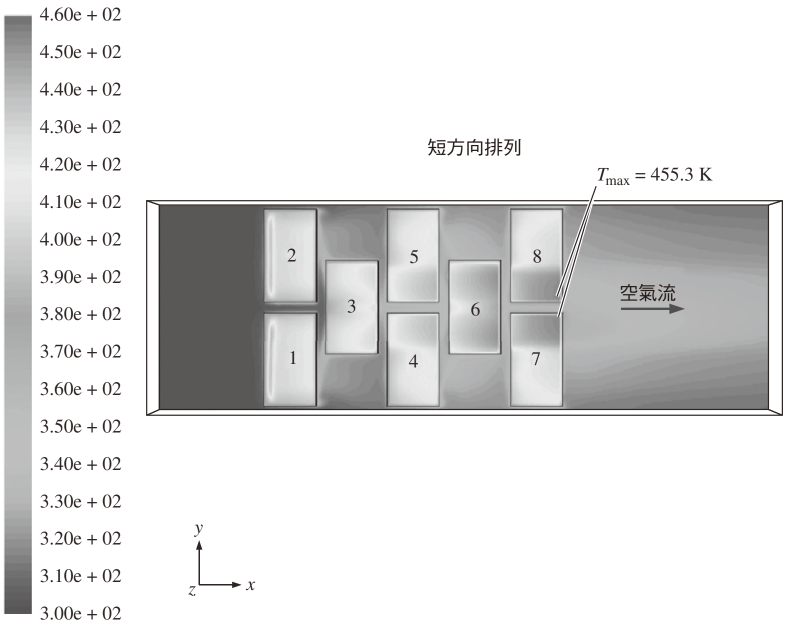
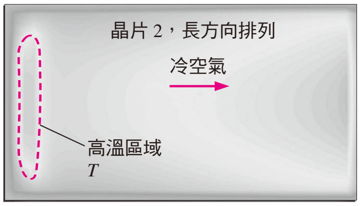
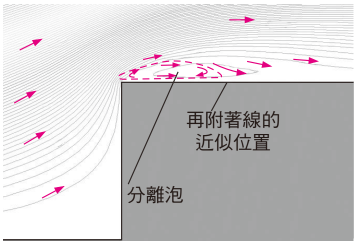


圖 15-72 在晶片冷卻例題裡，短方向造型的 CFD 結果：從晶片上方向下看的灰階溫度等高線。圖中溫度最高的位置，在晶片 7 與 8 的尾端靠 PCB 中心部分。在晶片 1 及 2 前端的亮色區域，表示其表面高溫。

(長方向排列為 144.4°C，短方向排列為 144.7°C)，且都低於設計上限 150°C。側面的溫度差異較大 (長方向排列 84.2°C 與短方向排列 91.4°C)，但是也都低於上限。在此最大的考量為最高溫度。對於長方向排列，T_{max} = 187.5°C，位於第 7 片晶片。對於短方向排列，T_{max} = 182.1°C，位於第 7 片與第 8 片晶片。兩者都超過溫度上限 180°C，雖然超過的值不多。短方向的冷卻性能較佳，但會有較大的壓降，



(a)



(b)

圖 15-73 (*a*) 在長方向排列的晶片 2 表面，灰階的溫度等高線俯視圖。高溫區域特別標示出來。溫度等高線的範圍與圖 15-71 的相同；(*b*) 流線的更靠近視圖，標出該區域的分離氣泡。圖中也顯示重貼的概略位置。

側面的熱傳也較差。

從表 15-5 可知，兩種排列方式入口與出口空氣的溫度上升值皆為 7.83°C。這是原本預期的，原因是從晶片傳到空氣的熱傳量為定值。這一點可以作為檢驗解答的參考。

我們還要指出這些流場的一些重要現象。在這兩種排列的情形下，下游晶片平均表面溫度都高於上游。這在物理上是合理的，因為第一個晶片遇到的是冷空氣，而其下游的晶片所遇到的是已經稍微加溫的空氣。我們也注意到最前列晶片的最高溫出現在其前端轉角，其放大如圖 15-73*a*。在晶片前端轉角的後方形成分離與渦流 (圖15-73*b*)，流速放緩會造成表面的區域熱點，使溫度升高。

總而言之，從 CFD 運算結果發現，短方向的設計得到較低的表面最高溫，乍看之下似乎效果較好。但是在相同體積流率下會有較大的壓力降 (表15-5)。對一個給定的風扇而言，較高的壓力降則會使操作點移至較低的空氣流量，也因此會降低冷卻效果。這種轉移是否使長方向較有利仍未知，還需要對風機及其它相關的分析，作進一步的探討。無論如何，兩種排列都無足夠的冷卻量，無法維持表面在最高溫度上限 180°C 以下。要解決問題，我們建議變更設計，使晶片分佈在整個 PCB 之上而非限制在 10 cm×15 cm 的區域內，晶片間的空間加大會有更充足的散熱效果。另一種作法是使用更高功率的風扇，增加空氣流入的速度。

15-5 可壓縮流之 CFD 計算

本章所討論的例題，到目前為止係針對不可壓縮流 ($\rho =$ 常數) 。當流場為可壓縮流時，密度不再為常數，而變為方程式之中的額外變數。我們在此討論的流體僅限於理想氣體，當引用理想氣體定律時，會引入另一個未知的參數，即溫度 T。因此能量方程式，必須與可壓縮式的質量與動量方程式同時求解 (圖 15-74)。此外，流體性質 (如黏度與熱傳導係數) 已不需要視為常數，這些流體性質為溫度的函數，這些性質在圖 15-74 的方程式中置於微分運算內。雖然這個方程組看起來很複雜，許多商用 CFD 軟體可以處理可壓縮流的問題，其中還包括震波分析。

當利用 CFD 求解可壓縮流的問題時，其邊界條件和不可壓縮流的邊界條件有些不同。例如在壓力入口處的邊界條件，需要指定停滯壓與靜壓值，還要指定停滯溫。可壓縮流場還有一個特別的邊界條件可用 [在 ANSYS-FLUENT 中稱為遠端壓

連續：　$\dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\dfrac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\dfrac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0$　　理想氣體定律：$P=\rho RT$

x-動量：
$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\rho g_x-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]$$

y-動量：
$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\rho g_y-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left(2\mu\frac{\partial v}{\partial y}+\lambda\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]$$

z-動量：
$$\rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\rho g_z-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left(2\mu\frac{\partial w}{\partial z}+\lambda\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right)$$

能量：
$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right)=\beta T\left(u\frac{\partial P}{\partial x}+v\frac{\partial P}{\partial y}+w\frac{\partial P}{\partial z}\right)+\vec{\nabla}\cdot(k\vec{\nabla}T)+\Phi$$

圖 15-74　卡氏座標中牛頓流體穩定、不可壓縮層流情況之運動方程式。共有 6 個方程式與 6 個未知數：ρ、u、v、w、T、P。其中 5 個方程式為非線性微分方程式，而理想氣體定律為一個代數方程式。R 為特定理想氣體常數，λ 為黏度的二次係數，通常設為 $-2\mu/3$；c_p 為定壓比熱，k 為熱傳導係數；β 為熱膨脹係數，且 Φ 為 White (1991) 所給以之逸散函數

$$\Phi=2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$$

力 (pressure far field)]，使用這個邊界條件，可以設定馬赫數、靜壓與溫度，可用於入口與出口處，非常適用於超音速外部流場的問題。

圖 15-74 的方程式是針對層流的方程式，然而很多可壓縮流的問題發生於高流速，流場為紊流狀態，所以圖 15-74 中的方程式必須修正 (轉換為 RANS 的方程式組) 來包含紊流模型，而且如前所述地必須增加更多的傳輸方程式。因此這些方程式會變得很長且複雜，並未在這裡呈現。然而在許多情況下，可幸運地可將流場近似為非黏性流，以消除圖 15-74 方程式中的黏度項 (將納維−斯托克斯方程式化簡為歐拉方程式)，則將如我們所看到的，對許多實際應用的高速流來說，由於沿著壁面的邊界層在較高的雷諾數下變得非常薄，所以非黏性流近似法的預測相當好。事實上，可壓縮流的 CFD 計算可預測通常非常不容易從實驗獲得的流場特性。例如許多實驗的量測技巧需要光學設置，但這些方法對三維流場來說是受限的，甚至受限於一些軸對稱的流場，但是 CFD 的計算則不受限。

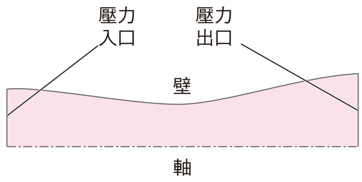


圖 15-75　對通過漸縮-漸擴噴嘴可壓縮流之計算區域。由於流場為對稱，故 CFD 都只需二維區域的一半。

通過漸縮−漸擴噴嘴的可壓縮流

第一個實例考量空氣通過一個軸對稱漸縮−漸擴噴嘴的可壓縮流。其計算區域則如圖 15-75 所示。入口處之半徑為 0.10

m，喉部之半徑為 0.075 m，出口處之半徑為 0.12 m，從入口到喉部的軸向距離為 0.3 m ── 與喉部到出口的軸向距離相同。在計算之中，使用大約 12,000 個四邊形的結構格點。壓力入口邊界上，設定停滯壓 $P_{0,\ \mathrm{inlet}}$ 為 220 kPa (絕對壓力)，靜壓 P_{inlet} 為 210 kPa，停滯溫 $T_{0,\ \mathrm{inlet}}$ 為 300 K。第一個例子設定壓力出口邊界之靜壓 Pb 為 50.0 kPa ($Pb/P_{0,\ \mathrm{inlet}} = 0.227$) ── 此值已低到使通過整個噴嘴的漸擴段的流場為超音速流，且噴嘴中不產生任何的垂直震波。此背壓比值對應於圖 12-22 中介於情況 E 與情況 F 之間，這種狀況下噴嘴出口的下游處會發生複雜的震波型態，但這些震波並不會影響噴嘴內的流體。離開噴嘴的流場為超音速流，在此不對噴嘴出口下游的流場進行模擬。

執行 CFD 軟體，使穩定、非黏性可壓縮流場模型達到收斂的解答。在沿著漸縮–漸擴噴嘴軸向的 25 個位置上 (每個間隔 0.025 m) 計算馬赫數 Ma 與壓力比 $P/P_{0,\ \mathrm{inlet}}$ 的平均值，圖形繪製於圖 15-76*a* 之中。其計算結果與一維等熵流場 (第 12 章) 的預測幾乎完全相同。在喉部 ($x = 0.30$ m) 處，平均馬赫數為 0.997，$P/P_{0,\ \mathrm{inlet}}$ 的平均值為 0.530；一維等熵流動理論則預測喉部的 Ma = 1，$P/P_{0,\ \mathrm{inlet}} = 0.528$。CFD 與理論之間微小的誤差原因是計算的流場並非一維的流

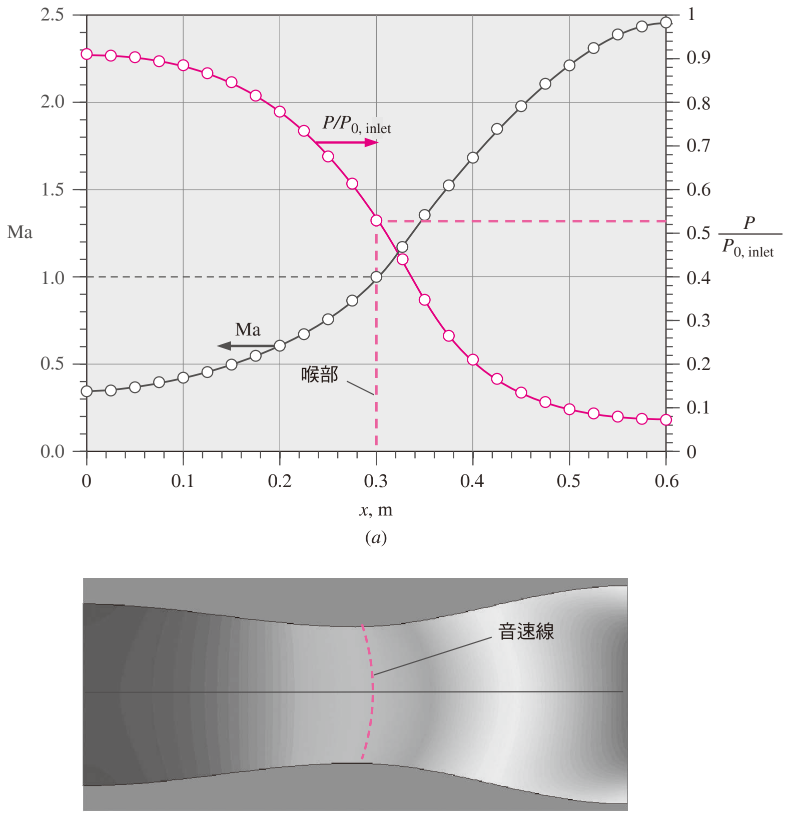


圖 15-76 對通過軸對稱漸縮–漸擴噴嘴的穩定絕熱，非黏性可壓縮流場：(*a*) 在 25 個軸向位置所計算的平均馬赫數與壓力比 (圓圈)，與一維可壓縮流理論所預測的結果 (實線) 比較；(*b*) 灰階馬赫數等量圖，範圍 Ma = 0.3 (最深色) 到 2.7 (最淺色)。雖然只計算上半部，為了清楚地說明，顯示的是對 *x*- 軸鏡射的影像，音速線 (M = 1) 也清楚標示出來，由於如 Schreier (1982) 所討論的徑向速度分量的影響，使此軸對稱流場的音速線為拋物線狀而非直線。

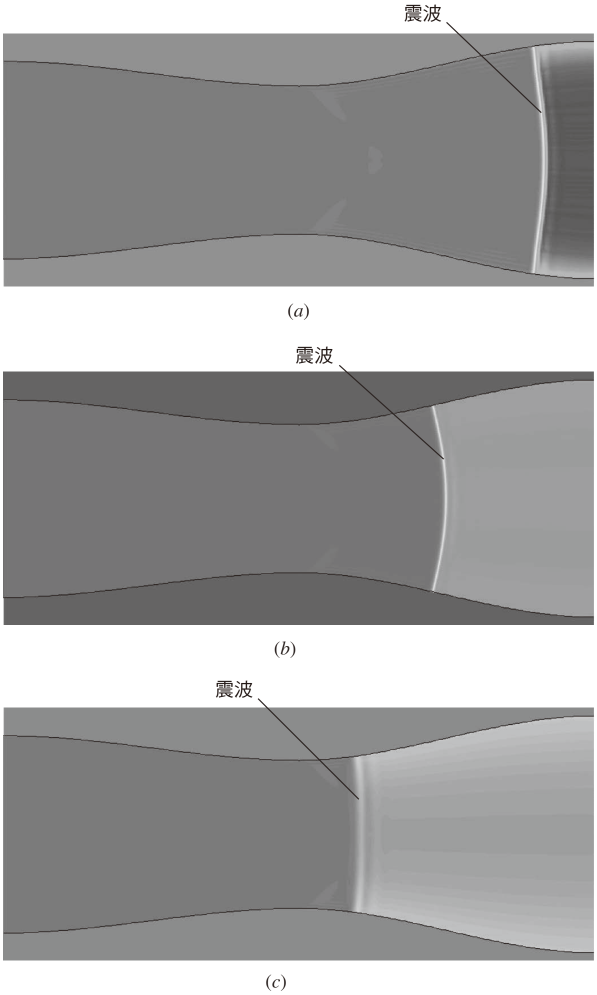


圖 15-77 對通過漸縮−漸擴噴嘴穩定、絕熱、非黏性可壓縮流場的 CFD 結果。其中顯示 $P_b/P_{0,\ \mathrm{inlet}} =$ (*a*) 0.455；(*b*) 0.682；與 (*c*) 0.909 時之滯壓比值之灰階等量圖。由於震波上游的滯壓為常數，而且穿越震波時的滯壓突然降低，所以滯壓可為噴嘴正震波位置與強度方便的指標。在這些等量圖中，$P_0/P_{0,\ \mathrm{inlet}}$ 範圍由 0.5 (最暗色) 到 1.05 (最淺色)。從震波下游灰階的顏色可清楚看出越往震波下游處，其強度越大 (滯壓穿越震波的壓降越大)。我們也注意到震波的形狀受到徑向速度分量的影響，形成彎曲線而非直線。

動，由於有徑向速度分量，所以造成馬赫數與靜壓在徑向上的差異。仔細檢查圖 15-76*b* 馬赫數的等量線，顯示這線條是彎曲的，並非如一維等熵理論所預期的直線。於圖中也可清楚地認出音速線 (Ma = 1)，雖然 Ma = 1 的線條就在喉部的壁面上，但是沿著噴嘴軸向的音速條件要到喉部下游才能達到。

接著我們執行一系列以背壓 P_b 為變化參數，而其餘邊界條件維持固定的情況。在圖 15-77 中顯示三個情況的結果：$P_b =$ (*a*) 100；(*b*) 150；和 (*c*) 200 kPa，即 $P_b/P_{0,\ \mathrm{inlet}} =$ (*a*) 0.455；(*b*) 0.682；和 (*c*) 0.909。對所有三個情況，正震波都發生在噴嘴漸擴部分的位置，當背壓進一步地增加時，震波朝向上游喉部移動，而且強度降低。由於流場在喉部為阻流，因此這三個情況的質量流率都相等 (之前圖 15-76 所顯示的情況也一樣)。我們注意到正震波不是直線而是曲線，則如之前所討論是受到速度的徑向分量影響的緣故。

對於 (*b*) $P_b/P_{0,\ \mathrm{inlet}} = 0.682$，沿著漸縮−漸擴噴嘴軸向的 25 個位置上 (每個間隔

0.025 m) 計算馬赫數 Ma 與壓力比 $P/P_{0,\ \mathrm{inlet}}$ 的平均值，並將圖形繪製於圖 15-78 之中。為與理論比較，使用一維等熵流關係式場於震波的上游與下游處，使用正震波關係式來計算穿越震波的壓力跳升 (第 12 章)。為了符合指定的背壓值，一維的分析需要正震波位於 $x = 0.4436$ m 處，來考量 P_0 與 A^* 兩者穿越震波之變化。CFD 計算的結果與一維理論的結果再次地相當一致。壓力與馬赫數兩者於震波稍為下游處之些微誤差是震波曲線形狀所造成的 (圖 15-77*b*)，如之前所述。此外，在 CFD 計算中的震波並非無窮薄，如一維分析理論所預測，而是分佈於幾個計算格點之間，後者的不準確性則可藉由對震波區域附近的網格細化來稍微降低 (未顯示)。

之前的 CFD 計算係針對穩定、非黏性之絕熱流場。當無震波發生時 (圖 15-76)，由於流場既為絕熱與不可逆 (無不可逆損失) 其為等熵流動。但是當流場中存在震波 (圖 15-77) 時，由於穿越震波時產生不可逆損失，雖然流場仍是絕熱的，但是流場不再是等熵的。

執行最後一個 CFD 的例子，增加兩個額外的不可逆性，即摩擦與紊流，可修改圖 15-77 的 (*b*)，利用具壁面函數的 k-ε 模型，以求解穩定絕熱的紊流流動，入

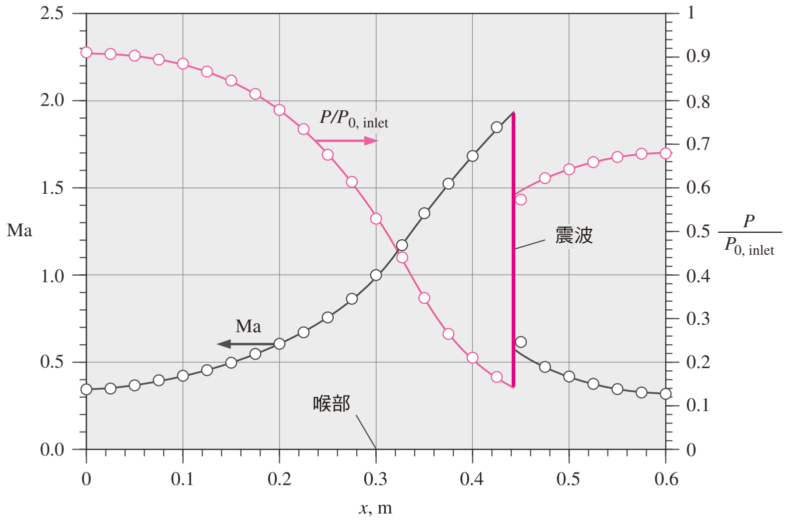


圖 15-78 針對 $P_b/P_{0,\ \mathrm{inlet}} = 0.682$ 之情況，以沿著漸縮-漸擴噴嘴軸向距離為函數之馬赫數與壓力比之圖形。對穩定、非黏性之絕熱可壓縮流在 25 個軸向位置的平均 CFD 計算結果 (圓圈) 與一維可壓縮流理論之預測結果 (實線) 比較。

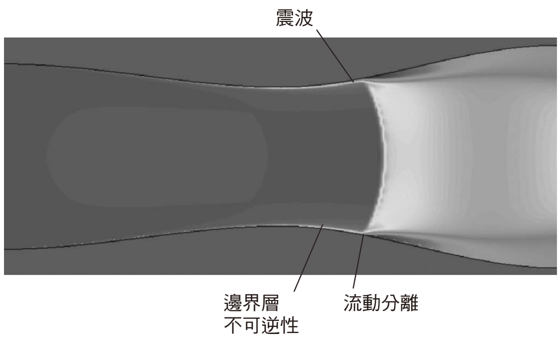


圖 15-79 通過漸縮–漸擴噴嘴之穩定、絕熱之可壓縮紊流之 CFD 計算結果。對 $P_b/P_{0,\ \mathrm{inlet}} = 0.682$ 之情況顯示滯壓比 $P_0/P_{0,\ \mathrm{inlet}}$ 之灰階等量圖。其背壓與圖 15-77*b* 相同，其中發現流動分離與邊界層中的不可逆性。

口的紊流強度設為 10% 及紊流長度 0.050 m。$P/P_{0,\,\mathrm{inlet}}$ 的等量圖呈現在圖 15-79。比較圖 15-77*b* 與圖 15-79 顯示紊流的震波發生在更上游的地方，因此震波較為弱。此外沿著流道壁面非常細薄區域中的滯壓很小，這是由於在細薄的邊界層中的摩擦損失。邊界層區域中的紊流與黏滯不可逆性是造成滯壓降低的主要原因。還有邊界層在震波後產生分離，導致更多的不可逆性產生。

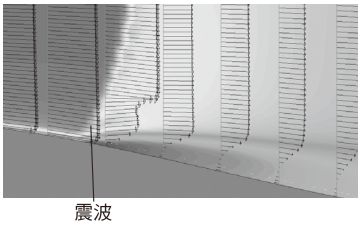


圖 15-80　圖 15-79 流動分離鄰近區域速度向量間放大視圖。可看出穿越陡震時速度突然降低，而且看到震波下游反向流動的區域。

沿著壁面的分離點的鄰近區域，將速度向量放大圖顯示於圖 15-80，可注意到這例子的解答並未收斂好，故其本質上屬非穩定；震波與邊界層之間的交互作用對 CFD 而言，是非常不容易的工作項目。因為我們使用壁面函數，紊流邊界層內流場的細節，未於 CFD 計算中解答。但是實驗的結果顯示震波與邊界層的交互影響更為顯著，產生如第 12 章應用焦點所討論的"λ 腳"。

最後，我們比較此黏性紊流情況與非黏性紊流情況的質量流率，並發現降低 0.7%，為何？如同第 10 章所討論，沿著壁面的邊界層會影響外部的流場，以致壁面顯得較厚，其厚度等於位移厚度 δ^*。因此有效的喉部面積，會因邊界層的出現而縮小一些，導致通過漸縮−漸擴噴嘴的質量流率減少。在此實例中，由於邊界層相對於噴嘴尺寸是非常薄，所以效應很小，結果使用非黏性近似法分析結果是相當好的 (小於 1% 的誤差)。

在楔形物上的斜陡震

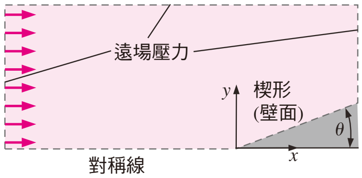


圖 15-81　對半角為 θ 之楔形物可壓縮流的計算區域與邊界條件。由於流場與 x- 軸對稱，所以 CFD 的分析只對上半部的流場進行模擬分析。

最後的可壓縮流實例，模擬流體通過半角 θ 楔形物的穩定、絕熱且二維非黏性的可壓縮流場 (圖 15-81)。由於流場上下對稱，只對流場的上半部進行模擬分析，沿著底緣使用對稱的邊界條件。我們計算三種情況：$\theta = 10$、20 和 30°，入口處的馬赫數為 2.0。圖 15-82 顯示 CFD 對三種情況的計算結果，在 CFD 的圖形中，為了清楚呈現計算結果，將計算域相對於對稱線作鏡像投射。

對 10° 的情況 (圖 15-82*a*) 而言，觀察到在楔形物的頂點產生一個直線的斜震波，亦如同非黏性理論所預測之結果。流場經過斜震波之後轉了 10°，使得流場平行於楔形物的壁面。由非黏性理論所預測之震波角 β 為 39.31°，預測在震波下游的馬赫數為 1.64。利用量角器對圖 15-82*a* 量測得出 $\beta \cong 40°$，而 CFD 對震波下游馬赫數的計算結果為 1.64，所以 CFD 的結果與理論值相當一致。

對 20° 的情況 (圖15-82*b*) 而言，CFD 的計算結果得出震波下游的馬赫數為 1.21，而預測之震波角 β 約為 54°，由非黏性理論所預測之馬赫數為 1.21、震波角

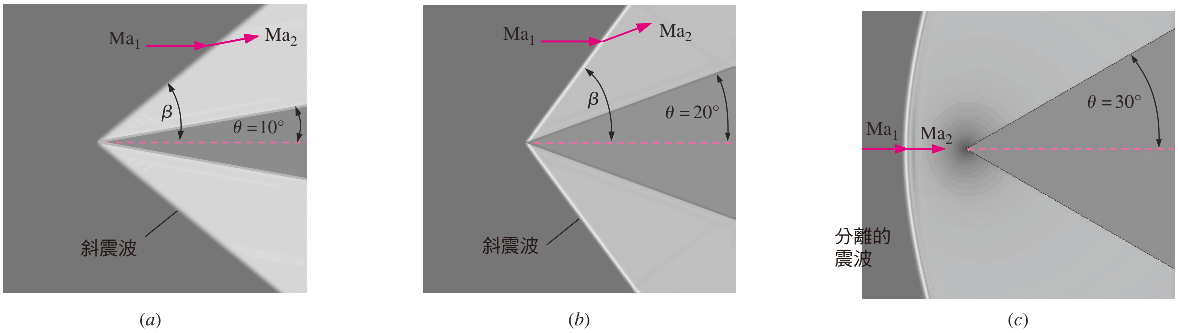


圖 15-82 針對 $Ma_1 = 2.0$ 在楔形物之上的穩定、絕熱、非黏性可壓縮流之 CFD 計算結果 (灰階馬赫數等量圖)。楔形物之半角 $\theta = (a)\ 10°$；$(b)\ 20°$；$(c)\ 30°$。在所有情況下，馬赫數之範圍從 Ma = 0.2 (最深) 到 2.0 (最淺)。對兩個較小楔形半角的情況而言，在楔形物的前緣形成微弱貼附的斜震波，但是對 30° 的情況，分離震波 (弓形波) 在楔形物之前形成。震波強度隨 θ 之增加而增加，如圖所示，當 θ 增加時，震波下游的色影顏色越深。

為 53.4°，CFD 的結果與理論值再度地非常一致。由於對 20° 的情況，震波是比較陡峭的 (較接近垂直波)，所以震波比 10° 情況強，20° 震波下游的馬赫數等量圖以較深的顏色表示。

在空氣馬赫數為 2.0 時，在最大楔形半角度 23° 以下會形成直的斜震波 (第 12 章)，當楔形半角度大於此值時，震波必會往楔形物的上游移動 (變成分開的)，形成**分離震波** (detached shock)，其形狀像個**弓形波** (bow wave) (第 12 章)。在 $\theta = 30°$ 的情況 (圖 15-82*c*)，CFD 的計算結果顯示確實是這樣的情況。楔形物前緣的正上游分離震波的一部分為垂直波，因此震波下游部分的流場為次音速。當震波曲線向後彎曲時，震波持續變弱，震波下游的馬赫數增加，如圖中的顏色所表示。

15-6 明渠流之 CFD 計算

到目前為止，我們所有的實例都是對單相流體 (空氣或水) 進行，但是許多可用的商用 CFD 軟體則能夠處理氣體混合流場 (例如空氣中的一氧化碳)、相同流體之兩相流 (例如水蒸汽與液態水)，甚至是兩種不同相態的不同流體 (例如液態水與氣態空氣)。在此對後者較有興趣了解，即具有自由液面的水流，其上為氣態的空氣，也就是明渠流。這裡提出幾個明渠流 CFD 解答的簡單實例。

在流道底部凸塊之上的流動

考量一個具有平坦底部的二維流道，沿著流道底部的某個位置上有一個平滑的凸塊，其長度為 1.0 m，中心的高度為 0.10 m (圖 15-83)。入口速度分為兩個部分：下面的部分是液態水，上面的部分是空氣。在 CFD 的計算中，空氣和水的入口速度設為 V_{inlet}，計算域的入口水深設為 y_{inlet}，其餘的計算區域需要計算水面的位置，此流場以非黏性之模型建立。

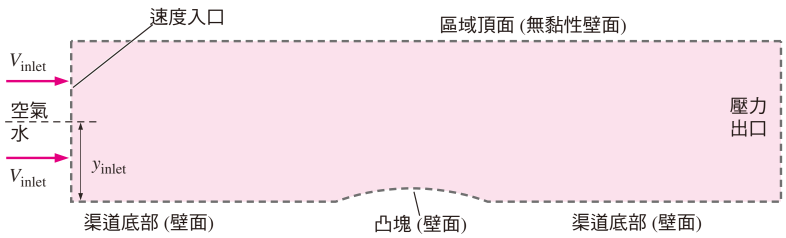


圖 15-83 針對具確定邊界條件，沿著流道底部的凸塊之上的穩定，不可壓縮之二維水流的計算域。在流場中對兩種流體建立模型。一液態水與自由水面之上的空氣。已知液體深度為 y_{inlet} 與入口速度 V_{inlet}。

在此同時考量次臨界流動與超臨界流動入口 (第 13 章)，圖 15-84 顯示三種情況的 CFD 計算結果以供比較。對第一個情況 (圖 15-84*a*)，y_{inlet} 設為 0.30 m，且 V_{inlet} 設為 0.50 m/s，對應的福勞數為

福勞數：
$$\mathrm{Fr} = \frac{V_{inlet}}{\sqrt{g y_{inlet}}} = \frac{0.50\ \mathrm{m/s}}{\sqrt{(9.81\ \mathrm{m/s^2})(0.30\ \mathrm{m})}} = 0.291$$

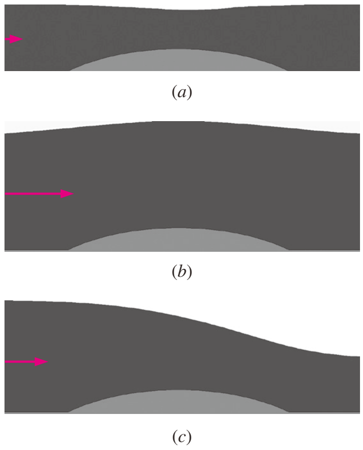


圖 15-84 沿著流道底部的凸塊之上的不可壓縮之二維水流的 CFD 計算結果。其中繪出相態等量圖，深色表示液態水而白色表示氣態的空氣：(*a*) 次臨界流至次臨界流；(*b*) 超臨界至超臨界流；(*c*) 次臨界流至超臨界流。

由於 Fr < 1，所以入口的流場為次臨界流動，在凸塊之上的液面稍微下沉 (圖 15-84*a*)，凸塊下游的流場則維持在次臨界流動，並且液面高度緩慢地升起，回復至凸塊之前的液面高度，所以此流場在任何區域都是次臨界流動。

對第二個情況 (圖15-84*b*)，y_{inlet} 設為 0.50 m，且 V_{inlet} 設為 4.0 m/s，對應的福勞數為 1.81。由於 Fr > 1，所以入口的流場為超臨界流動，在凸塊之上的液面上升 (圖 15-84*b*)。在下游遠端處，液面深度返回 0.50 m，且平均速度回復至 4.0 m/s，使得 Fr = 1.81 —— 與入口值相同，因此流場在任何地方都是超臨界流動。

最後顯示第三個情況的結果 (圖 15-84*c*)。在此情況中，流入的流場為次臨界流動 ($y_{inlet} = 0.50$ m、$V_{inlet} = 1.0$ m/s，且 Fr = 0.452)，結果在凸塊之上的水面，如同對次臨界流動所預期的下降， 但是在凸塊的下游，$y_{outlet} = 0.25$ m、$V_{outlet} = 2.0$ m/s 且 Fr = 1.28。所以這個流動是從次臨界流開始，但是在凸塊下游改變為超臨界流。如果計算域延伸至更下游處，我們可能會看見水躍的情況，這會將使福勞數回復至低於 1 的值 (次臨界流)。

經過閘門流動 (水躍)

對於最後的實例，考量具有平坦水平底部的二維流道，但是這次有一個水閘門 (圖 15-85)。計算域的入口水深設為 y_{inlet}，且入口流速設為 V_{inlet}。閘門底部與流道底部的距離為 a，此流場以非黏性之模型建立。

以 $y_{inlet} = 12.0$ m 與 $V_{inlet} = 0.833$ m/s 的條件執行 CFD，得出入口的福勞數

$Fr_{inlet} = 0.0768$ (次臨界流)。閘門底部與流道底部的距離為 $a = 0.125$ m。CFD 的計算結果顯示於圖 15-86 中。水通過閘門下方之後，其平均速度增加至 12.8 m/s，且其深度減少為 $y = 0.78$ m 。因此，在閘門下游與水躍上游之間的 $Fr = 4.63$ (超臨界流)。再往下游方向我們看到水閘門，其平均水深增為 $y = 3.54$ m ，而且水流的平均速度降低至 2.82 m/s，水閘門下游的福勞數 $Fr = 0.478$ (次臨界流)。我們注意到水閘門下游處的水深比水閘門上游的水深低很多，表示相當大的能量經過水躍散逸，而且相對應的流動比能量降低 (第 13 章)。這種明渠流經過水躍的比能量損失與可壓縮流經過震波的停滯壓損失的相似性再次得到證明。

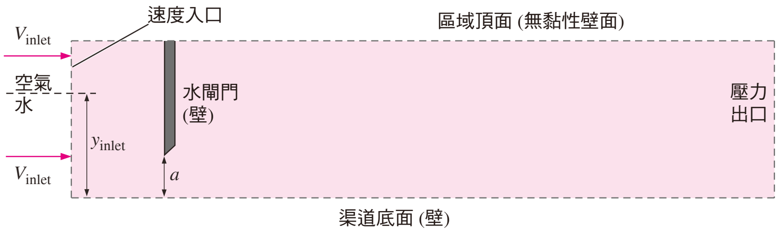


圖 15-85 針對具有確定邊界條件通過閘門之穩定，不可壓縮的二維水流的計算區域。在流場中對兩種流體建立模型 — 液態水與自由水面之上的空氣。已知液體水深 y_{inlet} 與入口速度 V_{inlet}。

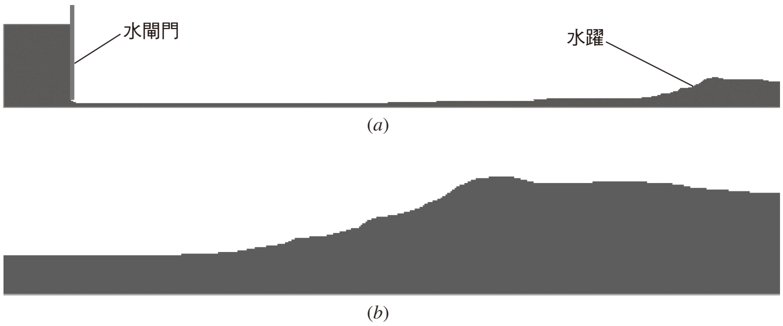


圖 15-86 在明渠流中通過閘門的二維不可壓縮水流之 CFD 計算結果。其中繪出相態等量圖，深色表示液態水，而白色表示氣態的空氣：(*a*) 閘內與水躍的整體視圖；(*b*) 水躍的放大視圖。此流場為高度不穩定流動，而且這些在某個任意時間的瞬間照片。

應用聚焦燈 — 虛擬胃 (A Virtual Stomach)

客座作者：James G. Brasseur 與 AnupamPal，賓州州立大學

胃的機械功能 (稱為胃的“能動性”) 是適當營養、可靠藥物傳遞以及許多像是胃脹氣的胃功能失調的重點。圖 15-87 顯示胃的核磁共振影像 (MRI)，胃的功能如同一個混合器、磨碎機、儲藏室與精密的泵，控制釋放胃內液體與固體的物質，進入吸收養份的小腸。營養物的釋放係藉由胃部尾端的閥門 (幽門) 之開關，與胃和十二指腸之間壓差的時間變化來控制，胃壓則由胃壁肌肉張力與通過腔室的蠕動收縮波來控制 (圖 15-87)。腔室蠕動收縮波亦可打碎食物顆粒並在胃內混合食物與藥品。但是目前不可能在人體的胃部量測流體混合的運動，例如核磁共振影像只顯像出在胃內特殊磁性流體的輪廓。為了研究這些看不見的流體運動與其效應，我們已發展胃部計算流體模型。

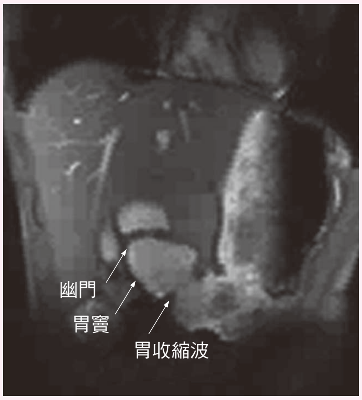


圖 15-87　某瞬間下對在消化中人體胃的核磁共振影像， 其中顯示胃部 (胃竇) 尾端區域的蠕動 (即傳播) 收縮波 (CW)。幽門是括約肌，或是閥門，使得養分進入十二指腸 (小腸)。

Developed by Anupam Pal and James Brasseur. Used by permission.

上述計算模型所構成的數學基礎係推導自流體力學定律，此模型是將胃的幾何形狀隨時間變化的核磁共振影像量測技術，擴展至胃內流體運動的一種方式。鑑於電腦模型不能完整描述胃的生理機能的複雜性，但是它們的優點在於允許系統控制參數變化，使無法以實驗量測到的敏感性質，卻能夠以數值方式研究。我們的虛擬胃應用了“晶格波茲曼”演算數值方法，這方法非常適合在複雜的幾何形狀之中的流體流動，且從 MRI 數據得出其邊界條件。在圖 15-88 中，我們預測在胃裡的 1 cm 大小的長效藥丸之運動、分解與混合。在此數值實驗當中，藥丸的密度高於周圍黏度極高的食物。我們預測腔室蠕動波會在胃部內產生渦旋與逆脈動之“噴流” ，這接著產生大剪應力，使藥丸表面磨損，然後釋放藥性，接著藥丸與釋放藥丸的流體運動混合。我們發現胃液的運動與混合，係依據胃的幾何形狀與幽門隨時間變化的細節而改變。

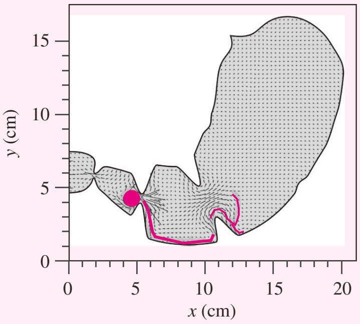


圖 15-88　電腦模擬在胃部流體腔室蠕動收縮波 (圖 15-87) 產生的運動 (速度向量)，以及藥丸 (顏色圓圈) 移動的軌跡 (顏色路徑)。

Developed by Anupam Pal and James Brasseur. Used by permission.

參考文獻

Indireshkumar, K., Brasseur, J. G., Faas, H., Hebbard, G. S., Kunz, P., Dent,J., Boesinger, P., Feinle, C., Fried, M., Li, M., and Schwizer,W., “Relative Contribution of ‘Pressure Pump’ and ‘Peristaltic Pump’ to Slowed Gastric Emptying,” *Amer J Physiol*, 278, pp. G604–616, 2000.

Pal, A., Indireshkumar, K., Schwizer, W., Abrahamsson, B., Fried, M., Brasseur, J. G., “2004 Gastric Flow and Mixing Studied Using ComputerSimulation,” In Press, *Proc. Royal Soc. London, Biological Sciences*, October 2004.

總結

雖然 CFD 軟體不如電腦試算表普遍，也不像數學求解器一樣容易使用，但是它仍持續地進步，而且越來越普及。從前只有專業科學家寫出自有的程式並使用超級電腦，現在具有多項特性與易懂的市售 CFD 軟體，可在合理的成本下取得，並使用個人電腦操作，以及對所有工程領域皆可使用。但是如本章所示，不佳的格點、未適當選取層流或紊流、不恰當的邊界條件或其它錯誤會造成 CFD 的解答與實際不符，所以 CFD 的使用者必須對流體力學理論有良好的基礎，以避免從 CFD 模擬得到錯誤的答案。此外，只要可能的話，應與實驗數據作適當比較，以確認 CFD 的預測。謹慎記住這些，則 CFD 有很廣的潛力，包含流體流動方面。

我們展示了層流與紊流 CFD 解答的實例。對不可壓縮層流，CFD 可以提供非常好的解答，甚至對具有分離的非穩定流。事實上，層流 CFD 的解答是“確實的”，但受限於格點解析度與邊界條件的範圍。然而，許多實際工程所關注的流場為紊流，不是層流。直接數值模擬 (direct numerical simulation, DNS) 在模擬複雜的紊流流場方面具有潛力，而且求解運動方程式 (三維的連續與納維−斯托克斯方程式) 的演算法也已完全建立。但是，高雷諾數的複雜紊流的細微尺寸的解析度，則需要使用比現在最快的電腦還快上幾十倍的電腦來計算。在電腦進步到 DNS 對實際工程問題有用的時候，需要再幾十年的時間。在這期間，我們所能做最好的事是使用紊流模型，這是半經驗的傳輸方程式，這些方程式模擬 (而非解答) 紊流場渦流所增加的混合度與擴散。當使用紊流模型執行 CFD 軟體時，必須注意要有足夠細微的網格，以及適當地應用所有的邊界條件。但是不論網格多細或是邊界條件如何成立，紊流 CFD 的計算結果只能像所使用的紊流模型一樣好。儘管如此，沒有一個紊流模型是萬用的 (可應用於所有的紊流流場)，對許多模擬實際的流場仍可獲得合理的結果。

在本章中亦示範 CFD 對具有熱傳的流場、可壓縮流與明渠流，可得到有用的結果。但是在所有實例中，CFD 的使用者必須小心選擇適當的計算區域、應用適合的邊界條件、產生良好的格點與使用適當的模型與近似方法。當電腦越來越快、功能越來越強時，CFD 在複雜的工程系統的設計與分析中將扮演重要的角色。在本簡介章節內，我們只是對 CFD 作淺易的描述而已。為了在 CFD 領域之中成為箇中高手，你必須修習高等的課程，像數值方法、流體力學、紊流與熱傳學。我們希望這章的內容能夠啟發你進一步在這個有趣的領域研習。

參考資料和建議讀物

1. C-J. Chen and S-Y. Jaw. *Fundamentals of Turbulence Modeling*. Washington, DC: Taylor & Francis, 1998.
2. J. M. Cimbala, H. Nagib, and A. Roshko. “Large Structure in the Far Wakes of Two-Dimensional Bluff Bodies,” *Fluid Mech*., 190, pp. 265–298, 1988.
3. S. Schreier. *Compressible Flow*. New York: Wiley-Interscience, Chap. 6 (Transonic Flow), pp. 285–293, 1982.
4. J. C. Tannehill, D. A. Anderson, and R. H. Pletcher. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, 3rd ed. Washington, DC: Taylor & Francis, 2012.
5. H. Tennekes and J. L. Lumley. *A First Course in Turbulence*. Cambridge, MA: The MIT Press, 1972.
6. D. J. Tritton. *Physical Fluid Dynamics*. New

York: Van Nostrand Reinhold Co., 1977.
7. M. Van Dyke. *An Album of Fluid Motion*. Stanford, CA: The Parabolic Press, 1982.
8. F. M. White. *Viscous Fluid Flow*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 2005.
9. D. C. Wilcox. *Turbulence Modeling for CFD*, 3rd ed. La Cañada, CA: DCW Industries, Inc., 2006.
10. C. H. K. Williamson. "Oblique and Parallel Modes of Vortex Shedding in the Wake of a Circular Cylinder at Low Reynolds Numbers," *J. Fluid Mech*., 206, pp. 579–627, 1989.
11. Tu, J., Yeoh, G.H., and Liu, C. *Computational Fluid Dynamics: A Practical Approach*. Burlington, MA: Elsevier, 2008.

習題

有"C"題目是觀念題。

基本原理、網格與邊界條件

15-1C CFD 軟體用來求解二維 (x, y) 且不具自由表面的不可壓縮層流。流體為牛頓流體。已設定適當的邊界條件，列出題目裡的變數 (未知數)，並列出電腦要求解的方程式。

15-2C 寫出以下各詞的概略定義與敘述：(a) 計算區域；(b) 網格；(c) 傳輸方程式；(d) 耦合方程式。

15-3C 什麼是格點與分格的差異，它們與元素有何關係？在圖 P15-3C 裡，每邊有多少個格點與多少段分格？

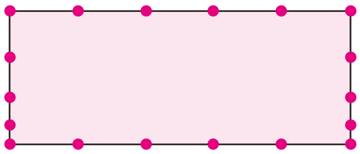


圖 P15-3C

15-4C 對於圖 P15-3C 裡的二維計算區域，根據現有的格點，用四邊形元素繪出結構性網格及用三邊形元素繪出非結構性網格。各有幾個網格？

15-5C 對於圖 P15-3C 裡的二維計算區域，根據現有的格點，用四邊形元素繪出結構性網格，並繪出非結構性多邊網格：三邊、四邊與五邊，試避免大幅的扭曲度，比較各個網格數。

15-6C 對穩定層流流場，總結一般 CFD 分析所含的八個步驟。

15-7C 假設你正在使用 CFD 模擬流體流過一個管道，其內部有一個圓柱，如圖 P15-7C 所示。管子很長，但是為了節省電腦資源，你選擇一個只含圓柱附近的計算區域。解釋為何計算域下游的邊要比上游的長。

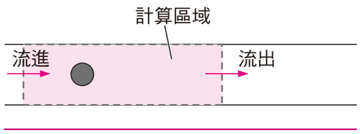


圖 P15-7C

15-8C 關於 CFD 解題方法，概略 (以幾句話) 討論以下各項的重要意義：(a) 初始條件；(b) 殘值；(c) 疊代，及 (d) 後處理。

15-9C 概略討論 CFD 軟體如何用以下觀念加快疊代的過程：(a) 多重網格，與 (b) 虛擬時間。

15-10C 在本章所討論的邊界條件裡，列出所有可以用在圖 P15-10C 裡，二維計算域右邊的邊界條件。為何其它的邊界條件不能使用？

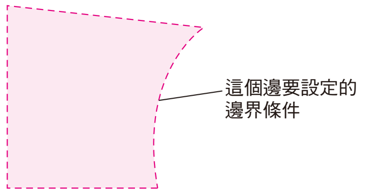


圖 P15-10C

15-11C 在使用 CFD 時，測試網格解析度是否足夠的標準方法是什麼？

15-12C 壓力入口與速度入口邊界條件，有何差別？解釋為何兩者不能同時設定？

15-13C 用一不可壓縮 CFD 軟體模擬二維矩形流道內的空氣流動 (圖 P15-13C)。計算域包含如圖所示的四個區塊。流動由右上方進入，由區塊 1 的左邊出去。入口速度 V 與出口壓力 P_{out} 為已知。在每個區塊的每一邊，標示出應有的邊界條件。

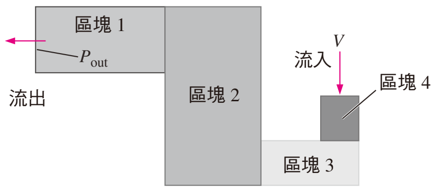


圖 P15-13C

15-14C 考慮習題 15-13C，令區塊 1 與 2 的共用邊為風扇，由右往左經過風扇的壓力增加。假設兩題都以 CFD 軟體求解 (有或無風扇)。解釋在入口處的壓力會增加或減少？出口處的速度會怎麼樣？

15-15C 列出六個在用 CFD 解不可壓縮流問題時所使用的邊界條件。簡單敘述並提出每個邊界條件的例題。

15-16 CFD 軟體用於模擬經過一個有攻角的二維翼形體的流場，部分鄰近翼型體的計算域示於圖 15-16 (計算域遠大於圖中虛線所示的範圍)。用四邊形元素草繪一個所示區域的粗的結構性網格，另用三角形元素草繪製一個粗的非結構性網格。討論每種網格形式的優缺點。

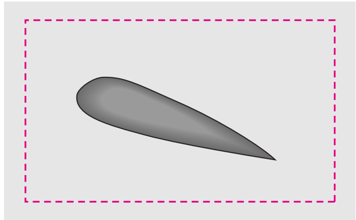


圖 P15-16

15-17 對於習題 15-16 的機翼，草繪一個粗的混合網格，並解釋其優點。

15-18 用一不可壓縮 CFD 軟體，模擬內有一個圓柱的矩形流道二維的水流 (圖 P15-18)。使用紊流模型解時間平均紊流。假設圓柱上下的流動為對稱。水由左進入，由右流出。已知入口速度 V 與出口壓力 P_{out}。用四邊形區塊建立結構性網格，並用四邊形元素草繪一個粗的網格。確定壁面附近的元素密集，並且小心避免過度扭曲的元素。標出每個區塊每邊所應使用的邊界條件。(提示：六到七個區塊就夠了。)

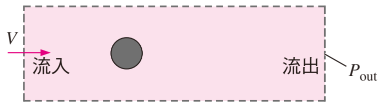


圖 P15-18

15-19 一不可壓縮 CFD 軟體，被用來模擬二維矩形流道內的汽油流動。流道內有如圖 P15-19 所示的沉澱腔體 (settling chamber)。汽油從左側流入，從右側流出。使用紊流模型求解時間平均紊流流動。假設頂邊與底邊為對稱條件。入口速度 V 與出口壓力 P_{out} 為已知。建立結構性網格用的四邊型區塊，並用四邊形元素草繪一個粗的網格。確定壁面附近的網格密集，小心避免網格過度扭曲。標出每個區塊的邊界上應有的邊界條件。

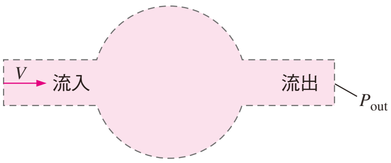


圖 P15-19

15-20 重繪圖 15-12*b* 的結構性多重區塊網格，使原只能處理基本區塊的 CFD 軟體可以用。重新標示區塊並列出各區塊內所含的 *i* 與 *j* 分格數目。計算區塊總數與元素總數，並檢驗元素的總數是否改變。

15-21 假設你的 CFD 軟體能處理非基本區塊。將圖 15-12*b* 的區塊儘量合併。條件是每個區塊內的 *i* 與 *j* 分格數目維持固定。證明你可以只用三個基本區塊建立結構性網格。重新標示區塊並列出各區塊內所含的 *i* 與 *j* 分格數目。計算元素總數並檢驗元素的總數是否改變。

15-22 一新型散熱器的設計目標，是要使下游每階段的流體儘量混合。Anita 設計一款造型，其中一階段的斷面如圖 P15-22。其幾何造型往上下週期性延伸。她使用幾十個高攻角的矩形管，以確定流場在尾流區充分混合。此設計的性能要以紊流模型、二維時間平均的 CFD 模擬作為測試。繪出可用來模擬流動的最簡單計算區域。在圖形裡標出所有的邊界條件。

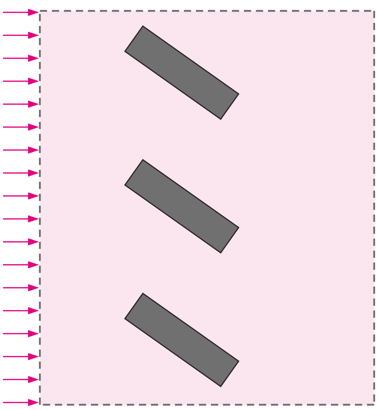


圖 P15-22

15-23 對於習題 15-22 的計算區域，繪出具有四邊形基本區塊與四邊形元素的結構性多重區塊網格。

15-24 Anita 將習題 15-22 與習題 15-23 所建立的計算域與網格，用 CFD 軟體運算求解。但是 Anita 發現在出口處 (右側邊緣) 有回流，所以 CFD 運算無法收斂。解釋為何有回流，Anita 該如何修正這項錯誤？

15-25 延續習題 15-22 的熱交換器設計。假設 Anita 的設計是根據單階段的 CFD 分析得到的。現在她需要模擬兩階段的熱交換器。第二列矩形管是與第一列交錯且傾斜方向相反，以增進混合 (圖 P15-25)。其幾何上下週期性延伸至非示於圖中之區域，繪出可用來模擬流動的計算區域。在圖形裡標出所有的邊界條件。

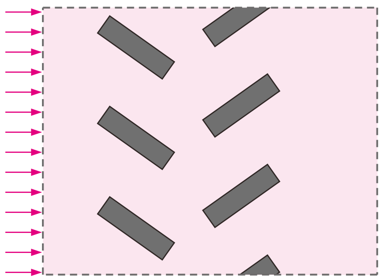


圖 P15-25

15-26 對於習題 15-25 的計算域，繪出具有四邊形基本區塊的結構性多重區塊網格。每個區塊都有四邊形的結構性網格。你不必繪出網格，只需繪出區塊的形狀。設法使區塊儘量維持矩形，以免角落的網格過度扭曲。假設 CFD 軟體要求週期邊界的格點分佈相同。且假設 CFD 軟體不接受區塊的邊分成不同的邊界條件。

一般的 CFD 問題*

15-27 考慮題 15-27 的二維分岔管。單位是 m，圖 P15-27 沒有照比例表示。不可壓縮流由左側進入，且分岔成兩部分。使計算區域每邊的格點都相同，以此建立三種粗網格：(a) 結構性多重區塊網格；(b) 非結構性三角形網格，與 (c) 非結構性四邊形網格。比較每種情形的網格數目，並討論其網格品質。

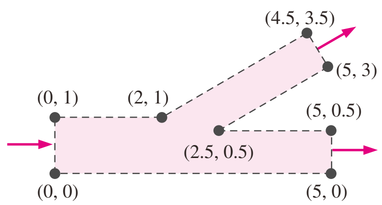


圖 P15-27

15-28 選出習題 15-27 的網格之一，並設定均勻的入口速度為 0.02 m/s 的層流空氣流動，以 CFD 求解。設定兩個出口的壓力相等，計算此流道的壓力降。計算各分岔的出口所占的流量百分比，並建立流線圖形。

15-29 重做習題 15-28，但是入口速度改成 10.0 m/s 的紊流；此外，設定入口的紊流強度為10% 與紊流尺度為 0.5 m。使用具有壁面函數的 k-ε 紊流模型，設定兩個出口的壓力相等，計算此流道的壓力降。計算各分岔的出口所佔的流動百分比，並建立流線圖形。將此圖形與習題 15-28 的比較。

15-30 建立一計算區域，探討平板上的層流在 Re = 10,000 下，邊界層的發展。先建立一粗網格，然後逐漸將網格變細，直到解答幾乎不受網格影響。

15-31 重做習題 15-30，但是改為紊流邊界層的 $\mathrm{Re} = 10^6$。討論其結果。

15-32 建立一計算區域來研究室內的通風 (圖 P15-32)。建立一矩形房間，其天花板有一速度入口，以模擬空氣供應，並且有一壓力出口，以模擬空氣回風。你可以用二維的近似的設定以求簡化 (垂直於圖形的長度無限大)。使用結構性矩形網格，繪出流線與速度向量圖形並討論。

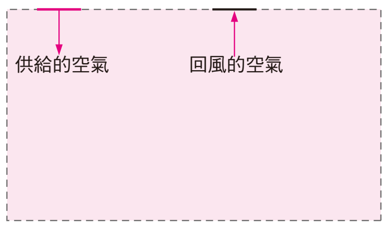


圖 P15-32

15-33 重做習題 15-32，改用非結構性三角形網格，比較並討論所得結果。

15-34 重做習題 15-32，將天花板上的送風與回風口移動到天花板上不同點，比較並討論結果。

15-35 選擇習題 15-32 及 15-34 的室內幾何設計其中之一，加上能量方程式求解。模擬一個有冷氣空調的房間，設定送風空氣溫度 $T = 18°\mathrm{C}$，而壁面、地板及天花板的溫度為 $T = 26°\mathrm{C}$。調整空氣進入的速度，直到室內的平均溫度趨近 22°C。需要多少送風量 (以室內空氣每小時的變氣次數計) 才能將房間冷卻到 22°C？

15-36 重做習題 15-35，但是建立三維的房間，在天花板設有供風與回風。將這個較符合實際的三維計算結果與習題 15-35 比較。

15-37 建立一個計算區域，以探討圖 P15-37 漸縮噴嘴內的可壓縮流。噴嘴出口壓力為大氣壓力。噴嘴壁面可以用非黏性流近似解 (無剪應力)。用各種入口壓力計算這個流場。發生阻流所需的入口壓力為何？討論如果入口壓力高於此值會怎麼樣？

* 這些題目需要用 CFD 軟體解題，但是不需用任何特定軟體。與前幾個題目不同，學生必須從頭開始自行求解，包括分割出最適當的網格。

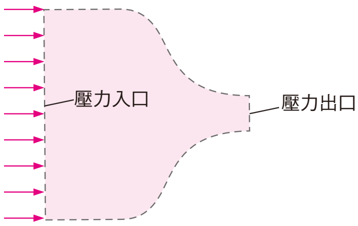


圖 P15-37

15-38 重做習題 15-37，但不用非黏性流的近似解。令流動為紊流，有平滑而無滑動的壁面。將結果與習題 15-37 相比較，討論摩擦力的主要影響是什麼？

15-39 建立一計算域，以探討經過二維流線型物體的不可壓縮層流 (圖 P15-39)。設計各種物體形狀，並計算其阻力。你能達到的最小阻力係數 C_D 的值為何？

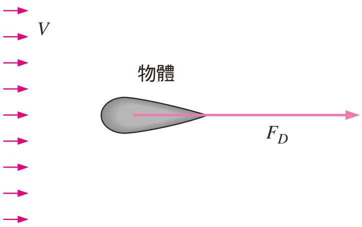


圖 P15-39

15-40 重做習題 15-39，使用軸對稱而非二維物體。與二維的情形相比較，討論何者的阻力係數較低？

15-41 重做習題 15-40，但改用紊流。比較何者的阻力係數較低？

15-42 建立一計算區域，以探討在二維超音速流道裡的馬赫波 (圖 P15-42)。計算區域裡需要包含一具有超音速入口 (Ma = 2.0) 的簡單矩形流道，以及底面一極小的隆起障礙。用非黏性流近似解，建立如圖中空氣的馬赫波。量測馬赫角並與理論值 (第 12 章) 相比較。討論馬赫波撞擊對面壁上時，會消失或反彈？如果反彈，其反彈角度為何？

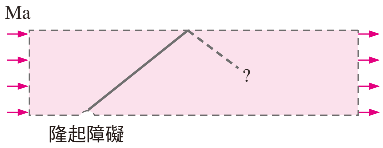


圖 P15-42

15-43 重做習題 15-42，但是馬赫數為介於 1.10 與 3.0 之間的幾個值。繪出所計算的馬赫角，及與馬赫數的函數關係，並與理論值 (第 12 章) 相比較。

複習題

15-44C 對於以下各敘述，概略解釋其正確與否。

(a) CFD 解會隨其網格越來越細而越合乎真實答案。

(b) 納維–斯托克斯方程式的 x- 分量是傳輸方程式的例子之一。

(c) 在二維網格裡，如果格點數相同，結構性網格的數目通常少於非結構性三角形網格的數目。

(d) 時間平均紊流 CFD 解答，其適用程度只能跟它所用的紊流模型一樣。

15-45C 在習題 15-19 裡，我們在建立計算區域與網格時，在頂面與底面運用對稱條件。為何不能在左右側也這樣？以勢流的情形重複討論。

15-46C 蓋瑞建立了如圖 P15-46C 的計算域，要模擬二維管突然收縮的流動。他想知道該突然收縮流動會造成的時間平均壓力降及次要損失係數。他使用 CFD 軟體建立網格並計算流場。假設流場為穩定、紊流且不可壓縮。

(a) 討論一種方法， 使蓋瑞可以改善計算域與網格，以將近一半的時間得到相同的答案。

(b) 在蓋瑞的計算域裡可能有一個基本的瑕疵。是什麼瑕疵？討論該如何修改設定？

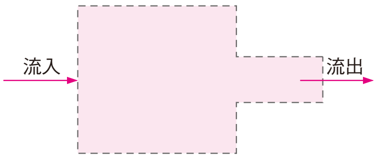


圖 P15-46C

15-47C 現代化的電腦系統速度快且記憶體大。在使用 CFD 解題時，這些電腦的哪些特性適合於多重區塊？每區塊有相同數量的網格。

15-48C 多重網格與多重區塊有什麼不同？討論它們各自如何增進 CFD 的計算速度，它們可以同時使用嗎？

15-49C 假設你有一個幾何相當複雜的問題，與一套可以快速建立非結構性三角形網格的 CFD 軟體。提出一些理由，使你寧可花時間建立多重區塊的網格。換句話說，值得多花這些工夫嗎？

15-50 建立一計算域與網格，計算習題 15-22 的一段熱交換器裡的流動。將加熱元件方向設為使流入 (水平) 氣流之攻角為 45°。設定入口的空氣溫度為 20°C，而加熱元件的壁面溫度為 120°C。計算出口的平均空氣溫度。

15-51 以不同氣流之攻角重做習題 15-50 的計算，攻角取數個介於 0 (水平) 到 90° (垂直) 之間的值。每一個攻角在計算時都設定相同的入口與壁面條件。哪一個攻角能傳遞最大熱量到空氣中？哪一個攻角得到最高的出口平均空氣溫度？

15-52 建立習題 15-25 的計算域與網格，並計算兩段熱交換器的流動。將第一段加熱元件的角度設定為與水平成 45°，第二段的設定為 −45°。設定入口的空氣溫度為 20°C，而加熱元件的壁面溫度為 120°C。計算出口的平均空氣溫度。

15-53 以不同加熱元件之攻角重做習題 15-52 的計算，第一段元件的角度為介於 0 (水平) 到 90° (垂直) 之間的值。每個計算都設定同樣的入口與壁面條件。第二段元件的攻角設為第一段之負值。哪一個角度傳遞最大熱量到空氣中？哪一個角度得到最高的出口平均空氣溫度？討論答案是否與習題 15-51 相同？

15-54 建立一計算區域與網格，計算流體經過一旋轉圓柱時的靜定紊流流場 (圖 P15-54)。物體側面的受力方向為何 —— 往上或往下？繪出流線圖形，哪裡是上游的停滯點？

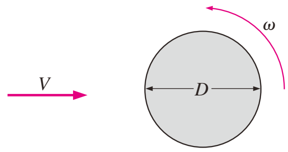


圖 P15-54

15-55 對於圖 P15-54 的旋轉圓柱，建立一旋轉速度相對於自由流速度的無因次參數 (結合變數 ω、D 與 V 成為無因次 Π 組)。用同樣的入口條件，以幾個 ω 值重做習題 15-54 的計算。繪出升力與阻力係數，及其與這個無因次參數的函數關係並討論。

15-56 空氣自一個大房間地板上一個二維的孔縫流入，x- 軸於地板上 (圖 P15-56)。建立一適當的計算區域及網格，利用 CFD 軟體的非黏性流近似，沿著 y- 軸計算垂直速度 V，作為離孔縫距離的函數。將結果與第 10 章流入線沉的勢流情形比較。

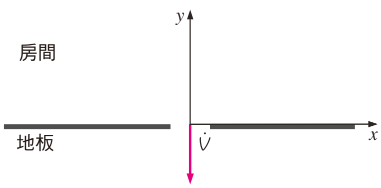


圖 P15-56

15-57 在習題 15-56 裡，將非黏性流改成層流，

重新計算流場。將其結果與非黏性流及第 10 章的勢流情形比較。繪出旋渦的等高線。討論哪裡是非旋轉流近似解適用的區域。

15-58 建立計算區域與網格，用非黏性流的近似，計算空氣流入一個二維真空吸塵器入口的流場 (圖 P15-58)。將其結果與第 10 章的勢流情形比較。

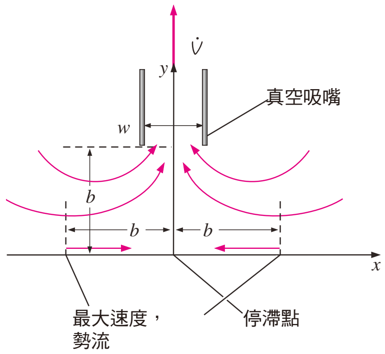


圖 P15-58

15-59 在習題 15-58 裡，將非黏性流改成層流，重新計算流場。將其結果與非黏性流及第 10 章的勢流情形比較。