習題答案

第一章　一階常微分方程式與應用

習題 1-1

1. (1) 三階一次線性微分方程式　　(2) 二階一次非線性微分方程式

(3) 二階一次線性微分方程式　　(4) 二階三次非線性微分方程式

(5) 四階一次線性微分方程式

2. 略　**3.** 略　**4.** 略　**5.** $m=-2$，2，3　**6.** 略

7. (1) $y=(x^2+2)e^{-x}$　　(2) $y=\left(x^2+\dfrac{3}{e}\right)e^{-x}$

8. (1) $y=3e4x+2e-3x$　　(2) $y=-2e-3x$

習題 1-2

1. (1) $\dfrac{y^5}{5}+y=\dfrac{x^2}{2}+x+c$，其中 c 為常數

(2) $\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)=\ln|y|+c$，其中 c 為常數

(3) $y^3+e^y=\sin x+c$，其中 c 為常數

(4) $x+\ln|x-1|+y-\ln|y+1|=c$，其中 c 為常數

(5) $\tan^{-1}x-\tan^{-1}y=c$，其中 c 為常數

2. (1) $\dfrac{1}{2}e^{x^2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}y^6-y=0$ 或 $\dfrac{1}{2}e^{x^2}+\dfrac{1}{6}y^6-y=\dfrac{1}{2}$

(2) $\dfrac{x^3}{3}+x-\left(-\dfrac{1}{3}-1\right)+\ln|y|-\ln 1=0$ 或 $\dfrac{x^3}{3}+x+\ln|y|=-\dfrac{4}{3}$

(3) $\frac{y^2}{2}+2y\Big|_0^y-\left(-\cos x\Big|_0^x\right)=0$ 或 $\frac{y^2}{2}+2y+\cos x=1$

(4) $\ln(1+e^x)-\ln|\cos y|=\frac{3}{2}\ln 2$

習題 1-3

1. (1) $f(x,\ y)$ 是二次齊次函數　　(2) $f(x,\ y)$ 是零次齊次函數

(3) $f(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 是 $-\frac{2}{3}$ 次齊次函數　　(4) $f(x,\ y)$ 是零次齊次函數

2. (1) $x^2+y^2=cx$，其中 c 為常數

(2) $-2\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln|y|=c$，其中 c 為常數

(3) $\ln|y|+\frac{1}{6}\ln\left[3\left(\frac{x}{y}\right)^4+1\right]=c$，其中 c 為常數

(4) $\ln|x|+\frac{2x}{y-x}=c$，其中 c 為常數

(5) $\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2=\ln|x|+c$，其中 c 為常數

(6) $\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=\ln|kx|$，其中 $c=\ln k$

習題 1-4

1. $M(x,\ y)=ye^{xy}+y^2-\frac{y}{x^2}+k(x)$

2. (1) $x^3+2x^2y+y^2=c$，其中 c 為常數

(2) $xe^{2y}-\sin xy+y^2=c$，其中 c 為常數

(3) $x^2+e^{xy}=c$，其中 c 為常數

(4) $yex^2-x^2=c$，其中 c 為常數

(5) $y\sin x+x\cos y=c$，其中 c 為常數

(6) $xy^2+e^x\sin y=c$，其中 c 為常數

3. (1) $y^3x+y^2\cos x-\frac{x^2}{2}=c$　(2) $y\sin^2 x-y^2\cos x=-9$　(3) $x^2y+y=-25$

習題 1-5

1. 略 **2.** 略 **3.** $3x^4+4x^3+6x^2y^2=c$，其中 c 為常數

4. $ye^{x^3}-\frac{1}{3}e^{x^3}=c$，其中 c 為常數 **5.** $x=ce^{y^2}$，其中 c 為常數

6. $x^9y^6e^{y^3}=k$，其中 $k=\left(\frac{c}{3}\right)^9$ **7.** $xy^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{y}}=c$，其中 c 為常數

8. $\frac{1}{2}x^2y^2-\ln|y|=c$，其中 c 為常數

9. $y=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)+ce^{-x}$，其中 c 為常數

10. $y=-\frac{1}{2}+ce^{x^2}$，其中 c 為常數 **11.** $y=\frac{1}{4}+\frac{c}{(x^2+1)^2}$，其中 c 為常數

12. $xe^{-\frac{3}{y}}=\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{y}}+c$，其中 c 為常數

13. $(1+\sin x)y=\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{x}{2}+c$，其中 c 為常數

14. $y=(x+c)\cos x$，其中 c 為常數 **15.** $x=\frac{1}{2}\ln y+\frac{c}{\ln y}$，其中 c 為常數

16. $y=-2\cos^2 x+c\cos x$，其中 c 為常數 **17.** $x^2y^2=x^3-3x^2+c$

18. $y=x^4-2x^2$

習題 1-6

1. $y=\frac{1}{1+ce^{x^2/2}}$，其中 c 為常數

2. $y^{-2}=\frac{1}{x^2(c-6x)}$，其中 c 為常數

3. $\frac{1}{y^2}=x+\frac{1}{2}+ce^{2x}$，其中 c 為常數

4. $y=\frac{1}{x^2\left(\frac{3}{2}\ln|x|+c\right)}$，其中 c 為常數

5. $y^3=\frac{1}{-1-2x+ce^x}$，其中 c 為常數

6. $x=\frac{1}{2-y^2-ce^{-\frac{1}{2}y^2}}$，其中 c 為常數

7. $y^4=x^2+15x^{-2}$

8. $x^2y=4$

習題 1-7

1. $y=-x+c$，其中 c 為常數　**2.** $x^2+y^2=cx$，其中 c 為常數

3. $2x^2+y^2=2c$，其中 c 為常數　**4.** $xy=c$，其中 c 為常數

5. $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\tan^{-1}\frac{y}{x}=k$，其中 k 為常數

6. $x-\frac{x^2}{2}-xy+\frac{y^2}{2}+y=k$，其中 k 為常數

7. $y^2-x^2=B$，其中 B 為常數　**8.** 大約 2.71 小時　**9.** $N(t)=N_0e^{-\frac{\ln 2}{20}t}$

10. 略　**11.** (1) 39.6 分鐘 (2) 70.5℃　**12.** 95.1 磅

13. (1) $\frac{dv}{dt}=-g-\frac{k}{m}v$　(2) $v(t)=\left(v_0+\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{mg}{k}$　(3) $t=\frac{m}{k}\ln\left(1+\frac{v_0k}{mg}\right)$

14. $I(t)=\frac{1}{10}(1-e^{-50t})$　**15.** $I(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

16. (1) $I(t)=5(1-e^{-3t})$　(2) $I(1)\approx 4.75$ 安培　(3) $\lim_{t\to\infty} I(t)=5$

17. $I(t)=\frac{5}{101}(\sin 30t-10\cos 30t)+\frac{50}{101}e^{-3t}$　**18.** $Q(t)=3(1-e^{-4t})$，$I=12e^{-4t}$

第二章　高階線性微分方程式

習題 2-1

1. (1) 1，$\cos x$，$\sin x$ 為線性獨立　(2) 1，x，x^2 為線性獨立

(3) $\ln x$，$\ln x^2$，$\ln x^3$ 為線性相依

2. (1) 略　(2) $y=c_1x^2+c_2\frac{1}{x^2}$，其中 c_1、c_2 為常數　(3) $y=\frac{x^2}{4}+\frac{8}{x^2}$

3. (1) 略　(2) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$，其中 c_1、c_2 為常數　(3) $y=3e^{2x}-e^{3x}$

4. $y_2=-\frac{\cos x}{x}$　**5.** $y_2=-\frac{e^{-x}}{2x}$　**6.** $y_2=x$　**7.** 通解為 $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$

8. $y_2=\begin{cases} x^2\ln|x|, & x>0 \\ -x^2\ln|x|, & x<0 \end{cases}$，通解為 $y=c_1x^2+c_2x^2\ln|x|$

9. $f(x)=x^3+3x+1$　**10.** $x^2+c_1x\ln|x|+c_2x$ (因 c_2 為任意常數)

習題 2-2

1. $y=c_1e^{-6x}+c_2e^{7x}$ **2.** $y=e^{-2x}(c_1e^{2\sqrt{2}x}+c_2e^{-2\sqrt{2}x})$

3. $y=e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}\left(c_1\cos\frac{5}{2}x+c_2\sin\frac{5}{2}x\right)$ **4.** $y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x$

5. $y=e^{\frac{3}{4}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{23}}{4}x+c_2\sin\frac{\sqrt{23}}{4}x\right)$ **6.** $y=e^{2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$

7. $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}$ **8.** $y=c_1e^{x}+(c_2\cos x+c_3\sin x)$

9. $y=c_1e^{x}+e^{-x}(c_2\cos x+c_3\sin x)$ **10.** $y=(c_1+c_2x)e^{x}+c_3e^{3x}$

11. $y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{2x}$ **12.** $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}+(c_3\cos\sqrt{2}x+c_4\sin\sqrt{2}x)$

13. $y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x$

14. $y=(c_1+c_2x)+e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

15. $y=c_1e^{\frac{x}{3}}+e^{3x}(c_2\cos x+c_3\sin x)$ **16.** $y=e^{x}-2e^{2x}+e^{3x}$

17. $y=e^{2x}+\cos 2x-\sin 2x$ **18.** $y=e^{x}(4\cos 3x-\sin 3x)$

習題 2-3

1. (1) 略 (2) $y_c=c_1e^{x}+c_2e^{2x}$ (3) 略 (4) $y=y_c+y_p=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+2x^2+6x+7$

2. $y=y_c+y_p=c_1\cos x+c_2\sin x+3x+\frac{1}{2}x\sin x$

3. $y=y_c+y_p=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+\frac{1}{2}e^{3x}+2x+3$

4. $y=y_c+y_p=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}-\left(\frac{1}{10}\cos 2x+\frac{3}{10}\sin 2x\right)$

5. $y=y_c+y_p=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x-2x\cos 2x$

6. $y=y_c+y_p=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}+\frac{1}{2}x^3e^{-2x}$

7. $y=y_c+y_p=e^{\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)+\left(\frac{5}{32}-\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}x^2\right)e^{2x}$

8. $y=y_c+y_p=c_1e^{2x}+c_2e^{-4x}+\left(\frac{1}{13}\sin x-\frac{3}{26}\cos x\right)e^{x}$

9. $y=y_c+y_p=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+\frac{1}{2}x^2e^{2x}+e^{x}+\frac{1}{4}$

10. $y=y_c+y_p=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+c_3e^{-3x}+\dfrac{7}{10}x^2e^{2x}$

11. $y=y_c+y_p=c_1+c_2e^{2x}-\dfrac{1}{2}e^x\sin x$

12. $y=y_c+y_p=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x+\ln|\csc x-\cot x|+\cos x\ln|\csc x|-x\sin x$

13. $y=y_c+y_p=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}+\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{4}\right)e^x$

14. $y=y_c+y_p=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x-\dfrac{x}{12}\cos 3x+\dfrac{1}{36}\sin 3x\ln|\sin 3x|$

15. $y=y_c+y_p=c_1\cos x+c_2\sin x-\cos x\ln|\sec x+\tan x|$

16. $y=y_c+y_p=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+x^2e^{-x}\left(\dfrac{1}{2}\ln x-\dfrac{3}{4}\right)$

17. $y=y_c+y_p=c_1e^x+c_2xe^x+e^x(-x+x\ln|x|)$

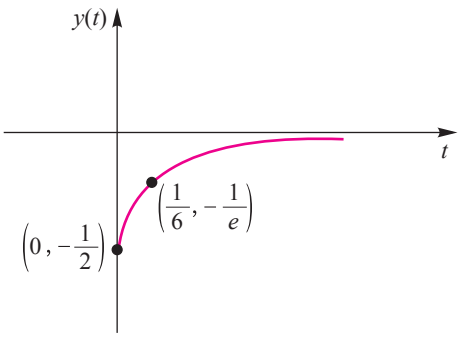
18. $y=y_c+y_p=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x+\ln|\sec x|-\sin x\ln|\sec x+\tan x|$

習題 2-4

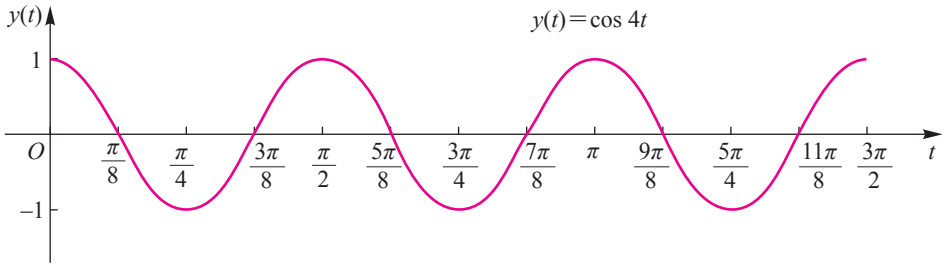
1. 頻率 $f=\dfrac{7\sqrt{10}}{2\pi}$ (赫茲)，週期 $T=\dfrac{2\pi}{7\sqrt{10}}$ (秒)

2. (1) $y(t)=\dfrac{1}{6}\cos 8t+\dfrac{1}{4}\sin 8t$　　(2) $y(t)=-\dfrac{1}{6}\cos 8t+\dfrac{1}{4}\sin 8t$

3. $y(t)=-\dfrac{1}{2}e^{-6t}(1+6t)$ 呎

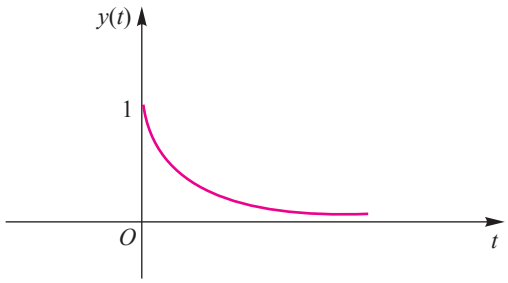


4. $y(t)=\cos 4t$，其圖形如下：



5. $y=\dfrac{1}{6}\cos\sqrt{96}\,t$，為一簡諧運動，週期＝0.641 秒，頻率＝1.56 週/秒，振幅＝$\dfrac{1}{6}$ 呎

6. $y(t)=e^{-t}(1+t)$



7. $Q(t)=\dfrac{4}{697}\left[\dfrac{e^{-20t}}{3}(-63\cos 15t-116\sin 15t)+(21\cos 10t+16\sin 10t)\right]$

$I(t)=\dfrac{1}{2091}\left[e^{-20t}(-1920\cos 15t+13{,}060\sin 15t)+120(-21\sin 10t+16\cos 10t)\right]$

8. 全態電流 $I=I_c+I_p=e^{-2t}(c_1\cos 4t+c_2\sin 4t)+\cos 4t+4\sin 4t$

穩態電流 $I=I_p=\cos 4t+4\sin 4t$

9. $Q(t)=\cos t+\dfrac{1}{3}\sin t-\dfrac{1}{6}\sin 2t$

第三章　拉普拉斯變換

習題 3-1

1. (1) $\dfrac{2e^{-4s}-1}{s}$　(2) $\dfrac{5(1-e^{-3s})}{s}$　(3) $\dfrac{e^{-\pi s}+1}{s^2+1}$　(4) $\dfrac{3-4e^{-2s}+e^{-4s}}{s}$

(5) $\dfrac{s\sin b+a\cos b}{s^2+a^2}$，$s>0$　(6) $\dfrac{s\cos b-a\sin b}{s^2+a^2}$，$s>0$

2. 略 **3.** (1) $-2\sqrt{\pi}$ (2) $\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$ (3) $-\frac{8\sqrt{\pi}}{15}$

4. (1) 略 (2) $\sqrt{\frac{\pi}{s}}$, $s>0$ (3) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}s^{-3/2}$

5. (1) $\cos 2t$ (2) t^2e^{2t} (3) e^{-2t} (4) te^{-t}

習題 3-2

1. (1) $\frac{4}{s^3}-\frac{3}{s^2}+\frac{4}{s}$ (2) $\frac{6}{s^4}+\frac{3}{s^2}-\frac{2}{s}$ (3) $\frac{216}{s^5}+\frac{12}{s^3}-\frac{16}{s}$

(4) $\frac{1}{s-\ln 10}+\frac{2}{s+1}$ (5) $\frac{10(s+1)}{s^2+100}$ (6) $\frac{8}{s(s^2+16)}$

(7) $\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$ (8) $\frac{1}{s^2+4}$ (9) $\frac{s(s^2+5)}{(s^2+9)(s^2+1)}$

(10) $\frac{2}{(s-3)^3}$ (11) $\frac{5}{(s+2)^2+25}$ (12) $\frac{3(s-8)}{s^2+4s+40}$

(13) $\frac{s-\ln 2}{(s-\ln 2)^2+9}$ (14) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}(s+4)^{-3/2}$ (15) $\sqrt{\frac{\pi}{s-2}}$

2. (1) $3e^{3t/2}$ (2) $2\cos t+3\sin t$ (3) $2\cos 3t-6\sin 3t$

(4) $\frac{1}{2}\cos\sqrt{5}t+\frac{3}{4\sqrt{5}}\sin 5t$ (5) $\frac{1}{2}t^3e^t+\frac{5}{24}t^4e^t$ (6) $e^t\cos\sqrt{2}t$

(7) $2e^{2t}(3\cos 4t+\sin 4t)$ (8) $\frac{1}{4}e^{-t/2}+\frac{5}{8}te^{-t/2}$

(9) te^t-e^t+1 (10) $e^{-t}+t-1$

習題 3-3

1. $\frac{1}{4}(e^{5t}-e^t)$ **2.** $\frac{11}{3}e^{2t}-e^t+\frac{1}{3}e^{-t}$ **3.** $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t$

4. $-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}e^{-2t}+\frac{5}{2}te^{-2t}$ **5.** $1+4t-e^{-t}$ **6.** $\frac{1}{2}t^2e^{-t}-\frac{1}{6}t^3e^{-t}$

7. $(3t-5)e^{2t}+(2t+5)e^t$ **8.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{1}{4}e^{-2t}$ **9.** $\frac{1}{2}(e^{-2t}-\sin 2t)$

10. $\frac{1}{16}e^{-3t}-\frac{1}{16}e^{t}+\frac{1}{4}te^{t}$

習題 3-4

1. (1) $\frac{s(s+2)}{(s^2+2s+2)^2}$ (2) $\frac{2}{(s-1)^3}$ (3) $\frac{2a(3s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^3}$ (4) $\frac{2s(s^2-3a^2)}{(s^2+a^2)^3}$

(5) $\frac{6}{(s-4)^4}$ (6) $\frac{105}{16}\sqrt{\pi}s^{-9/2}$ (7) $\frac{18(s^2+2s-2)}{(s^2+2s+10)^3}$ (8) $\ln\left|\frac{s+1}{s}\right|$

2. (1) te^{2t} (2) $\cos t-\frac{1}{2}t\sin t$ (3) $\frac{1}{2}t\sinh 2t$ (4) $\frac{e^{t}\sin t}{t}$

習題 3-5

1. $y=\frac{1}{2}(e^{-x}-\cos x+\sin x)$ **2.** $y=(1+t)e^{-2t}$ **3.** $I=0.1-0.1e^{-50t}$

4. $y=5e^{2t}-2t^2$ **5.** $y=\cos t+t\sin t$ **6.** $y=\frac{7}{24}e^{-t}\sin 3t+\frac{1}{8}e^{-t}\sin t$

7. $y=x+\cos x-3\sin x$ **8.** $Q=2(3-3e^{-4t}\cos 3t-4e^{-4t}\sin 3t)$

9. $y=te^{t}\left(\frac{1}{24}t^3+\frac{1}{2}t-1\right)$ **10.** $x=2e^{-2t}-e^{-3t}$, $y=2(e^{-3t}-e^{-2t})$

11. $x=\sin t$, $y=\cos t$

習題 3-6

1. (1) $\frac{1-e^{-2s}}{s}$ (2) $\frac{2e^{-s}}{3}$ (3) $\frac{s}{s^2+1}+e^{-\pi s}\cdot\frac{s}{s^2+1}-\frac{s(1+e^{-\pi s})}{s^2+1}$

(4) $\frac{1}{s^2+1}+e^{-\pi s}\left(\frac{\pi}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2+1}\right)$ (5) $\frac{2e^{-2s}}{s}\left(2+\frac{2}{s}+\frac{1}{s^2}\right)$

(6) $\frac{3e^{-s}}{s}\left(1+\frac{3}{s}+\frac{4}{s^2}+\frac{4}{s^3}\right)$

2. (1) $\frac{u(t-4)(t-4)^2}{2}$ (2) $u\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)$

(3) $u(t-2)\cos 4(t-2)$ (4) $u(t-3)e^{-3(t-3)}\sin(t-3)$

3. $y=2u(x-1)[1-\cos(x-1)]$

習題 3-7

1. $\dfrac{1}{s(1-e^{-s})}$ **2.** $\dfrac{1-e^{-s}(s+1)}{s^2(1-e^{-s})}$ **3.** $\dfrac{1-e^{-s}-se^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})}$ **4.** $\dfrac{e^{-2s}(s+1)+s-1}{s^2(1-e^{-2s})}$

5. $\dfrac{1}{s^2}\tanh\dfrac{s}{2}$ **6.** $\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}\coth\dfrac{\pi s}{2\omega}$ **7.** $\dfrac{\omega}{(s^2+\omega^2)(1-e^{-\pi s/\omega})}$

習題 3-8

1. (1) $t-\sin t$ (2) $\dfrac{1}{4}(1-\cos 2t)$ (3) $\dfrac{1}{2}t\sin t$ (4) $te^{-t}+2e^{-t}+t-2$

2. $y(t)=2e^{t}$ **3.** $y(t)=\sin t$ **4.** $y(t)=t^2+\dfrac{1}{12}t^4$ **5.** $y(t)=1$ **6.** $y(t)=1+\dfrac{t^2}{2}$

習題 3-9

1. $I(t)=\dfrac{1}{R}\left[(1-e^{-Rt/L})+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u(t-n)(1-e^{-R(t-n)/L})\right]$

2. $I_1=3(1-e^{-20t})$，$I_2=\dfrac{3}{2}(1-e^{-20t})$

3. $y(t)=3u(t-2)e^{-(t-2)}$ **4.** $y(t)=u(t-1)\sin(t-1)$

第四章　矩陣與線性方程組

習題 4-1

1. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ **2.** $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&4\\4&7\\9&12\end{bmatrix}$

3. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&-2\\2&1&-2\\2&2&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^T=\begin{bmatrix}1&2&2\\-2&1&2\\-2&-2&1\end{bmatrix}$ **4.** $\boldsymbol{A}^T=\begin{bmatrix}2&3&0\\1&7&-1\\4&5&9\end{bmatrix}$

5. $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 均非斜對稱矩陣，$\boldsymbol{D}$ 為斜對稱矩陣 **6.** 11

7. [1]，[2]，[3]，[4]，$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$，[1，3]，[2，4]，$\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}$，共 9 個

習題 4-2

1. $x=-2,\ y=3$ **2.** $\boldsymbol{X}=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}11 & 24 & 27\\ 13 & 15 & -103\end{bmatrix}$

3. (1) $\begin{bmatrix}4 & -1\\ -5 & -11\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}1 & 9 & -9\\ -5 & 4 & -2\\ 8 & 5 & -11\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}12 & 23\\ -7 & 17\\ 0 & 52\end{bmatrix}$

4. $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}15 & -5 & -10\\ -5 & 21 & 6\\ -10 & 6 & 11\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}21 & -9 & -2 & -7\\ -9 & 10 & -3 & 0\\ -2 & -3 & 2 & 3\\ -7 & 0 & 3 & 6\end{bmatrix}$

5. $(3\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-182 & -232\\ -2 & 12\end{bmatrix}$, $3\boldsymbol{AC}-4\boldsymbol{BC}=\begin{bmatrix}-182 & -232\\ -2 & 12\end{bmatrix}$；相等

6. 略 **7.** $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$

8. 略 **9.** 略 **10.** $(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$ 並不是一個正確的矩陣恆等式

11. 略 **12.** 略 **13.** 略 **14.** 略

習題 4-3

1. (1) $\boldsymbol{A}$ 為不可逆 (2) $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$ (3) $\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{11} & \frac{2}{11}\\ \frac{4}{11} & \frac{3}{11}\end{bmatrix}$

2. $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ **3.** $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & 1\\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7}\end{bmatrix}$

4. (1) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\neq\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ (2) $(c\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{c}\boldsymbol{A}^{-1}$

5. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ -\frac{3}{16} & \frac{1}{8}\end{bmatrix}$ **6.** $x=2$ **7.** 略

8. $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$ **9.** $(2A)^{-3}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{12} & -\frac{1}{24} \\ \frac{5}{24} & \frac{1}{24} \end{bmatrix}$

習題 4-4

1. (1) 基本矩陣 (2) 非基本矩陣 (3) 基本矩陣 (4) 基本矩陣 (5) 非基本矩陣

2. (1) $7R_1+R_2$ (2) $\frac{1}{6}R_3$ (3) $R_1\leftrightarrow R_3$, $R_3\leftrightarrow R_4$ (4) $\frac{1}{5}R_3\leftrightarrow R_1$

3. (1) $\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $\boldsymbol{E}_4=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. (1) $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{6} \end{bmatrix}$

(3) $\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

5. $\boldsymbol{A}$ 是簡約列梯陣，$\boldsymbol{B}$ 是簡約列梯陣，$\boldsymbol{C}$ 不是簡約列梯陣，$\boldsymbol{D}$ 不是簡約列梯陣

6. $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

習題 4-5

1. (1) $x_1=-\frac{3}{4}$，$x_2=-\frac{5}{4}$，$x_3=\frac{13}{4}$

(2) $\begin{cases} x_1=2t \\ x_2=\frac{5t}{3}-\frac{1}{3} \\ x_3=t \end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$　(3) $\begin{cases} x_1=\frac{1}{2}+s \\ x_2=1+2s-t \\ x_3=s \\ x_4=t \end{cases}$，$s\in\mathbb{R}$，$t\in\mathbb{R}$

2. (1) $x_1=-\frac{3}{4}$，$x_2=-\frac{5}{4}$，$x_3=\frac{13}{4}$　(2) $x_1=1$，$x_2=-1$，$x_3=2$

3. (1) 無解：$a=-3$　(2) 唯一解：除 $a=\pm3$ 之外的所有 a 值

(3) 有無限多解：$a=3$

4. (1) 方程組具有非必然解　(2) 方程組具有必然解　(3) 方程組具有非必然解

5. (1) $x_1=5$，$x_2=4$，$x_3=7$　(2) $x_1=\frac{3}{2}$，$x_2=\frac{1}{2}$，$x_3=\frac{3}{2}$

6. $\begin{cases} x_1=-\frac{t}{3} \\ x_2=\frac{2}{3}t \\ x_3=t \end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$　**7.** $\lambda=3$ 或 $\lambda=-2$

習題 4-6

1. (1) $\det(\boldsymbol{A})=-40$　(2) $\det(\boldsymbol{A})=-66$　(3) $\det(\boldsymbol{A})=-240$

2. (1) 0　(2) 0　(3) 2

3. $\boldsymbol{A}_{13}=-9$，$\boldsymbol{A}_{23}=0$，$\boldsymbol{A}_{33}=3$，$\boldsymbol{A}_{43}=-2$

4. $\lambda=-4$ 或 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=0$　**5.** $(10+x)x^3$

6. (1) $\operatorname{adj}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -7 & 8 & -13 \\ 5 & 4 & -15 \\ -4 & -10 & 12 \end{bmatrix}$　(2) $\det(\boldsymbol{A})=-34$　(3) 略

7. $\lambda=-5$ 或 $\lambda=0$ 或 $\lambda=3$　**8.** $\lambda=4$ 或 $\lambda=0$

9. $x_1=\frac{15}{34}$，$x_2=-\frac{1}{34}$，$x_3=-\frac{6}{34}$

10. (1) 方程組具有非必然解　(2) 方程組具有必然解

11. (1) $x_1=4$，$x_2=8$，$x_3=19$　(2) $x_1=3$，$x_2=-2$，$x_3=1$，$x_4=2$

習題 4-7

1. (1) $P(\lambda)=\lambda^2-5\lambda+7$　(2) $P(\lambda)=\lambda^2-4$　(3) $P(\lambda)=\lambda^2+3$

(4) $P(\lambda)=\lambda^3-4\lambda^2+7$　(5) $P(\lambda)=\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8$

2. (1) $\lambda_1=2$，$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$；$\lambda_2=3$，$\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

(2) $\lambda_1=1$，$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$；$\lambda_2=2$，$\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$；$\lambda_3=4$，$\mathbf{x}_3=\begin{bmatrix}7\\-4\\2\end{bmatrix}$

(3) $\lambda_1=0$，$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$；$\lambda_2=2$，$\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}-2\\-3\\1\end{bmatrix}$；$\lambda_3=3$，$\mathbf{x}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$

習題 4-8

1. (1) 可對角線化　(2) 不可被對角線化　(3) 可對角線化

(4) 可對角線化　(5) 不可被對角線化

2. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$　**3.** $A^3=\begin{bmatrix}1&13&26\\0&1&0\\0&13&27\end{bmatrix}$

習題 4-9

1. (1) $\begin{bmatrix}-e^2+2e & -e^2+e\\ 2e^2-2e & 2e^2-e\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}e^3 & 2e^2-2e^3 & -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}e^3\\ 0 & e^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 2e^2-e^3 & -2e+2e^2 & \frac{e}{2}-\frac{e^3}{2} \\ -e^2+e^3 & 2e-e^2 & -\frac{e}{2}+\frac{e^3}{2} \\ -4e^2+4e^3 & 4e-4e^2 & -e+2e^3 \end{bmatrix}$

2. $e^{At}=\begin{bmatrix} -e^{2t}+2e^{2t} & -e^{2t}+e^{t} \\ 2e^{2t}-2e^{t} & 2e^{2t}-e^{t} \end{bmatrix}$

第五章　向量分析

習題 5-1

1. $\overrightarrow{P_1P_2}=\sqrt{14}$　**2.** (1) $-10\mathbf{i}-4\mathbf{j}+8\mathbf{k}$　(2) $6\sqrt{5}$

3. $\dfrac{-5(3\mathbf{i}+\mathbf{j}-7\mathbf{k})}{\sqrt{59}}$　**4.** 略　**5.** $\left(\dfrac{4}{3},\ 1,\ \dfrac{4}{3}\right)$

6. $\dfrac{3}{7}\mathbf{i}+\dfrac{6}{7}\mathbf{j}-\dfrac{2}{7}\mathbf{k}$　**7.** $a=-2,\ b=1,\ c=-3$

8. (1) 線性獨立向量　(2) 線性獨立向量

9. $\cos\alpha=-\dfrac{3}{7},\ \cos\beta=\dfrac{2}{7},\ \cos\gamma=-\dfrac{6}{7}$

10. $\begin{cases} x=-3+2t \\ y=\ 2-3t, \quad t\in\mathbb{R} \\ z=\ 1+4t \end{cases}$　**11.** $\begin{cases} x=\ 2+2t \\ y=-3+5t, \quad t\in\mathbb{R} \\ z=\ 1+4t \end{cases}$

習題 5-2

1. $\angle ABC=\cos^{-1}\left(\dfrac{73}{53\sqrt{2}}\right)\approx 0.2288$ 弧度 $\approx 13.11°$

2. $\dfrac{10}{7}(-6,\ 2,\ 3)$ 與 $-\dfrac{10}{7}(-6,\ 2,\ 3)$

3. $\text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}=\dfrac{5}{19}\mathbf{i}+\dfrac{15}{19}\mathbf{j}-\dfrac{15}{19}\mathbf{k},\ \|\text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}\|=\dfrac{5}{\sqrt{19}}$　**4.** $\|\text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}\|=\dfrac{4}{\sqrt{59}}$

5. $\mathbf{u}=\left\langle \frac{6}{25}, \frac{12}{25}, -\frac{3\sqrt{5}}{25} \right\rangle+\left\langle -\frac{81}{25}, \frac{13}{25}, -\frac{22\sqrt{5}}{25} \right\rangle$

6. 略 **7.** $\|\mathbf{v}\|=\frac{5}{\sqrt{6}}$ **8.** 24 呎-磅 **9.** 略 **10.** 略

習題 5-3

1. $-6\mathbf{i}+13\mathbf{j}+8\mathbf{k}$ **2.** $\frac{4}{9}\mathbf{i}+\frac{1}{9}\mathbf{j}+\frac{8}{9}\mathbf{k}$, $-\frac{4}{9}\mathbf{i}-\frac{1}{9}\mathbf{j}-\frac{8}{9}\mathbf{k}$

3. $3\sqrt{5}$ **4.** $\sqrt{638}$ **5.** $\frac{3\sqrt{33}}{2}$ **6.** 69

7. (1) $K=9$ (2) $A=\sqrt{35}$ (3) $\theta=40.01°$ **8.** 略 **9.** $\frac{1}{6}|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|=\frac{88}{3}$

10. $a=-3\pm\sqrt{8}$, $b=\frac{1}{-3\pm\sqrt{8}}$ **11.** $\frac{x+1}{6}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{4}$

12. $4x+7y-5z+3=0$ **13.** $3x-y-z=2$

習題 5-4

1. $D_F=\{t|t\geq\sqrt{2}\}$ **2.** $\lim_{t\to 2}\mathbf{F}(t)=<\sqrt{2}, \sin^2 2, 0>$

3. (1) $\mathbf{F}'(t)=\cos t\mathbf{i}-\sin t\mathbf{j}$

(2) 因 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{F}'(t)=0$，故 $\mathbf{F}'(t)$ 恆平行於 xy-平面

(3) $\mathbf{j}\cdot\mathbf{F}'(t)=-\sin t=0\Rightarrow t=n\pi$ $(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$

(4) 是. $|\mathbf{F}(t)|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1}=\sqrt{2}$

(5) 是. $|\mathbf{F}'(t)|=\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}=1$

(6) $\mathbf{F}''(t)=-\sin t\mathbf{i}-\cos t\mathbf{j}$

4. (1) $\mathbf{F}'(t)=2\mathbf{i}+3t^2\mathbf{j}$

(2) $\mathbf{F}'(t)=\cos t\mathbf{i}-e^{-t}\mathbf{j}+\mathbf{k}$

(3) $\mathbf{F}'(t)=2t\mathbf{i}-(5t^4+e^t)\mathbf{j}+(3t^2-e^t)\mathbf{k}$

(4) $\mathbf{F}(t)=(\sin t+t^2)\mathbf{i}+(\sin t+t^2)\mathbf{j}+3(\sin t+t^2)\mathbf{k}$

$\Rightarrow\mathbf{F}'(t)=(\cos t+2t)\mathbf{i}+(\cos t+2t)\mathbf{j}+3(\cos t+2t)\mathbf{k}$

(5) $\mathbf{F}'(t)=\mathbf{0}$

5. (1) $f'(t)=6t-10t\sin t-5t^2\cos t$ (2) $f'(t)=\dfrac{8t}{\sqrt{8t^2+1}}$ (3) $f'(t)=1-12t^3$

6. 略 **7.** 略 **8.** 略 **9.** $\mathbf{F}(t)=(1+\sin t)\mathbf{i}-\cos t\mathbf{j}$

10. $\mathbf{F}(t)=2(t-2)\,\mathbf{i}+\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{t^2+1}{2}\right)\mathbf{j}+12\,(t^2-1)\,\mathbf{k}$

11. $\mathbf{F}(t)=(t^4+2)\,\mathbf{i}-(t^2+4)\,\mathbf{j}$

習題 5-5

1. $L=2\pi\sqrt{a^2+c^2}$ **2.** 曲率 $\kappa=\dfrac{1}{2}$，扭率 $\tau=-\dfrac{1}{2}$

3. 單位切向量 $\mathbf{T}=\dfrac{-a\sin t\mathbf{i}+a\cos t\mathbf{j}+c\mathbf{k}}{\sqrt{a^2+c^2}}$，曲率 $\kappa=\dfrac{a}{a^2+c^2}$，

單位主法向量 $\mathbf{N}=-\cos t\mathbf{i}-\sin t\mathbf{j}$，

單位副法向量 $\mathbf{B}=\dfrac{c\sin t\mathbf{i}-c\cos t\mathbf{j}+a\mathbf{k}}{\sqrt{a^2+c^2}}$，扭率 $\tau=\dfrac{c}{a^2+c^2}$

4. $\mathbf{T}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{j}+\dfrac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{k}$，$\mathbf{N}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{j}-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{k}$

$\mathbf{B}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\mathbf{i}$，$\kappa\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{5\sqrt{5}}$，$\tau\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

5. 略 **6.** 略

習題 5-6

1. (1) $\nabla f(x,\ y,\ z)=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$

(2) $\nabla f(x,\ y)=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{i}-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{j}$

(3) $\nabla f(x,\ y,\ z)=-e^{-x}\cos yz\mathbf{i}-ze^{-x}\sin yz\mathbf{j}-ye^{-x}\sin yz\mathbf{k}$

2. $\nabla\ln\|\mathbf{R}\|=\dfrac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{x^2+y^2+z^2}$，$\nabla\left(\dfrac{1}{\|\mathbf{R}\|}\right)=\dfrac{-x\mathbf{i}-y\mathbf{j}-z\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

3. 略 **4.** $\dfrac{df}{ds}=\dfrac{37}{3}$ **5.** $\dfrac{22}{\sqrt{21}}$

6. $-\frac{1}{3}\mathbf{i}+\frac{2}{3}\mathbf{j}+\frac{2}{3}\mathbf{k}$ 或 $\frac{1}{3}\mathbf{i}-\frac{2}{3}\mathbf{j}-\frac{2}{3}\mathbf{k}$

7. $7x-3y+8z=26$ **8.** $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{8}{3\sqrt{21}}\right)\approx 54.5°$

9. div $\mathbf{F}=3yz+4xy-2xyz$，curl $\mathbf{F}=-xz^2\mathbf{i}+(3xy+yz^2)\mathbf{j}+(2y^2-3xz)\mathbf{k}$

10. 略 **11.** 略 **12.** 略 **13.** 0

習題 5-7

1. $\frac{1}{12}(17\sqrt{17}-1)$ **2.** 1638.4 **3.** 320 **4.** (1) $\frac{4}{3}$ (2) 0 (3) $\frac{4}{3}$

5. $-\frac{8}{3}$ **6.** $1-\pi$ **7.** (1) $\frac{5}{3}$ (2) $\frac{8}{3}$ (3) 2 **8.** 0 **9.** $\frac{3}{5}$

10. 略 **11.** $1-\frac{1}{e}$ **12.** (1) -4 (2) -4 (3) -4 (4) 0

習題 5-8

1. 0 **2.** 0 **3.** 9π **4.** 0 **5.** π **6.** $\frac{1}{30}$ **7.** 0 **8.** $\frac{14}{3}$ **9.** (1) 6 (2) -2π (3) $\frac{2}{3}$

10. (1) 略 (2) $\phi(x, y, z)=y^2\sin x+xz^3-4y+2z+c$ (3) $4\pi+15$

習題 5-9

1. 11 **2.** 90 **3.** 24 **4.** $2\pi r^3$ **5.** 1

習題 5-10

1. $\frac{1}{2}$ **2.** 84π **3.** $3V$ **4.** 0 **5.** 略 **6.** 0

第六章　線性微分方程組

習題 6-1

1. 略 **2.** 略 **3.** 略 **4.** 略

5. $\mathbf{x}(t)=c_1\begin{bmatrix}2e^{3t}\\ e^{3t}\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-2e^{-t}\\ e^{-t}\end{bmatrix}$

6. $\mathbf{x}(t)=c_1e^{2t}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}+c_2e^{2t}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ t\end{bmatrix}$

7. $\mathbf{x}(t)=c_1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-\cos t\\ \frac{1}{2}(\cos t-\sin t)\\ \cos t+\sin t\end{bmatrix}+c_3=\begin{bmatrix}-\sin t\\ \frac{1}{2}(\cos t+\sin t)\\ \sin t-\cos t\end{bmatrix}$

習題 6-2

1. $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}e^{t}+\frac{4}{3}e^{4t}\\ -\frac{1}{3}e^{t}-\frac{2}{3}e^{4t}\end{bmatrix}$

2. $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{3}e^{2t}\\ -\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{t}+\frac{2}{3}e^{2t}\\ \frac{1}{6}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{t}+\frac{4}{3}e^{2t}\end{bmatrix}$

3. $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}e^{2t}-2e^{3t}\\ e^{t}-2e^{2t}+2e^{3t}\\ -2e^{2t}+2e^{3t}\end{bmatrix}$

4. $\mathbf{x}(t)=c_1\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}e^{-3t}+c_2\left(\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}t\right)e^{-3t}$

5. $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}-\frac{9}{8}e^{-t}-\frac{1}{56}e^{7t}\\ \frac{3}{4}e^{-t}-\frac{1}{28}e^{7t}\end{bmatrix}$

6. $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{8t}\\ \frac{2}{3}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{8t}\\ -\frac{4}{3}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{8t}\end{bmatrix}$

習題 6-3

1. $\mathbf{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}+c_2e^{3t}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-5\\1\end{bmatrix}$

2. $\mathbf{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}+c_2e^{3t}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+e^{t}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$

3. $\mathbf{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}+c_2e^{3t}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}-t\\ \frac{1}{2}t\end{bmatrix}e^{-t}$

4. $\mathbf{x}(t)=c_1e^{(3+\sqrt{7})t}\begin{bmatrix}-6\\5-\sqrt{7}\end{bmatrix}+c_2e^{(3-\sqrt{7})t}\begin{bmatrix}-6\\5+\sqrt{7}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}(t+1)\end{bmatrix}$

第七章　傅立葉級數與變換

習題 7-1

1. $f(x)=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cos n\pi}{\pi(1-4n^2)}\cos nx$

2. $f(x)=\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2(-1)^n}{n^2}\cos nx+\frac{2[(-1)^n-1]-\pi^2n^2(-1)^n}{\pi n^3}\sin nx\right\}$

3. $f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi-1}{n^2}\cos nx$

4. $f(x)=\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\left(\cos\pi x+\frac{\cos 3\pi x}{3^2}+\frac{\cos 5\pi x}{5^2}+\cdots\right)$

$+\frac{1}{\pi}\left(\sin\pi x-\frac{\sin 2\pi x}{2}+\frac{\sin 3\pi x}{3}+\cdots\right)$

5. $f(x)=\frac{12}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin n\pi x}{n^3}$

6. $f(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{n\pi}{2}\cos nx+\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\sin nx\right)\right]$

7. $f(x)=\frac{20}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{6}{5}\sin 5x+\cdots\right)$

習題 7-2

1. 奇函數：(2) (4)；偶函數：(1) (3) (5) (7)；兩者皆非：(6)

2. $f(x)=2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(1-e\cos n\pi)}{n^2\pi^2+1}\sin n\pi x$

3. $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin n\pi x$

4. $f(x)=\frac{4}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}$

5. $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\cos n\pi x$

6. $f(x)=\frac{\sin 2}{2}+4\sin 2\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4-n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]$

習題 7-3

1. $y_n(t)=\frac{0.2(-1)^n}{D_n}\cos 2n\pi t+\frac{40(-1)^n(10n^2\pi^2-1)}{n\pi D_n}\sin 2n\pi t,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$

2. $y_n(t)=\frac{F_0}{9}+A_n\cos\frac{2n\pi t}{3}+B_n\sin\frac{2n\pi t}{3},\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$

3. $I_n(t)=A_n\cos 100n\pi t+B_n\sin 100n\pi t,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$

$A_n=\frac{100n^2\pi}{(1-4n^2)(D_n^2+25n^2\pi^2)},\ B_n=\frac{20nD_n}{(4n^2-1)(D_n^2+25n^2\pi^2)},$

$D_n=50-2n^2\pi^2$

4. $I_n(t)=A_n\cos 200n\pi t+B_n\sin 200n\pi t,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$

$A_n=\frac{0.0002D_n}{D_n^2+144n^2\pi^2},\ B_n=\frac{0.0014n\pi}{D_n^2+144n^2\pi^2},\ D_n=2.5-4n^2\pi^2$

習題 7-4

1. (1) $f(t)=\int_0^{\infty}\left[\frac{2\sin(\lambda\pi)}{\pi\lambda^2}-\frac{2}{\lambda}\cos(\lambda\pi)\right]\sin(\lambda t)\,d\lambda$

(2) $f(t)=\int_0^{\infty}\frac{20}{\pi\lambda}\sin(10\lambda)\cos(\lambda t)\,d\lambda$

2. (1) $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\sin(\lambda t)\,d\lambda$ (2) $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos(\lambda t)\,d\lambda$

3. (1) $f(x)=\frac{2}{\pi\lambda^2}\int_0^{\infty}[\sin(2\lambda)-3\lambda\cos(2\lambda)+\lambda\cos\lambda]\sin(\lambda x)\,d\lambda$

(2) $f(x)=\frac{2}{\pi\lambda^2}\int_0^{\infty}[\cos(2\lambda)-1+3\lambda\sin(2\lambda)-\lambda\sin\lambda]\cos(\lambda x)\,d\lambda$

4. $f(t)=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\left[\frac{\sin\lambda}{\lambda}+\frac{\cos\lambda-1}{\lambda^2}\right]\cos(\lambda t)\,d\lambda$ **5.** 略

6. (1) $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda$ (2) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\,d\lambda=\frac{\pi}{2}$

習題 7-5

1. (1) $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda\cos(\lambda x)}{\lambda}\,d\lambda$ (2) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\,d\lambda=\frac{\pi}{2}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda\cos\lambda x}{\lambda}=\frac{\pi}{4}$

2. (1) $f(x)=xe^{-|x|}=\dfrac{-2i}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda}{(1+\lambda^2)^2}e^{i\lambda x}\,d\lambda$

(2) $f(x)=i\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(5\lambda)}{\lambda^2-\pi^2}e^{i\lambda x}\,d\lambda$

3. $f(t)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin\lambda x}{\pi^2}-\frac{\pi\cos\lambda x}{\lambda}\right)\sin(\lambda t)\,d\lambda$

4. (1) $F_s(\omega)=\dfrac{\omega}{1+\omega^2}$, $F_c(\omega)=\dfrac{1}{1+\omega^2}$ (2) $F_s(\omega)=\dfrac{\omega}{k^2+\omega^2}$, $F_c(\omega)=\dfrac{k}{k^2+\omega^2}$

(3) $F_s(\omega)=\dfrac{1}{\omega}(1-2\cos\omega+\cos 2\omega)$, $F_c(\omega)=\dfrac{1}{\omega}[2\sin\omega-\sin(2\omega)]$

(4) $F_s(\omega)=\dfrac{2\omega}{(1+\omega^2)^2}$, $F_c(\omega)=\dfrac{1-\omega^2}{(1+\omega^2)^2}$

5. (1) $f(t)=\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}=e^{6it}\,u(t-4)e^{-4(t-4)}$

(2) $f(t)=\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}=-6e^{-\pi it}[u(t+5)-u(t-5)]$

(3) $f(t)=\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}=u(t)[2e^{-3t}-e^{-2t}]$

6. $\mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{\sin(5\omega)}{\omega(2+i\omega)}\right\}=\dfrac{1}{4}u(t+5)[1-e^{-2(t+5)}]-\dfrac{1}{4}u(t-5)[1-e^{-2(t-5)}]$

7. $y(t)=\begin{cases}-\dfrac{1}{4}e^{2t}, & t<0\\[2ex] -\dfrac{1}{4}e^{-2t}, & t\geq 0\end{cases}$ **8.** $f(t)=\dfrac{2}{\pi(1+t^2)}$